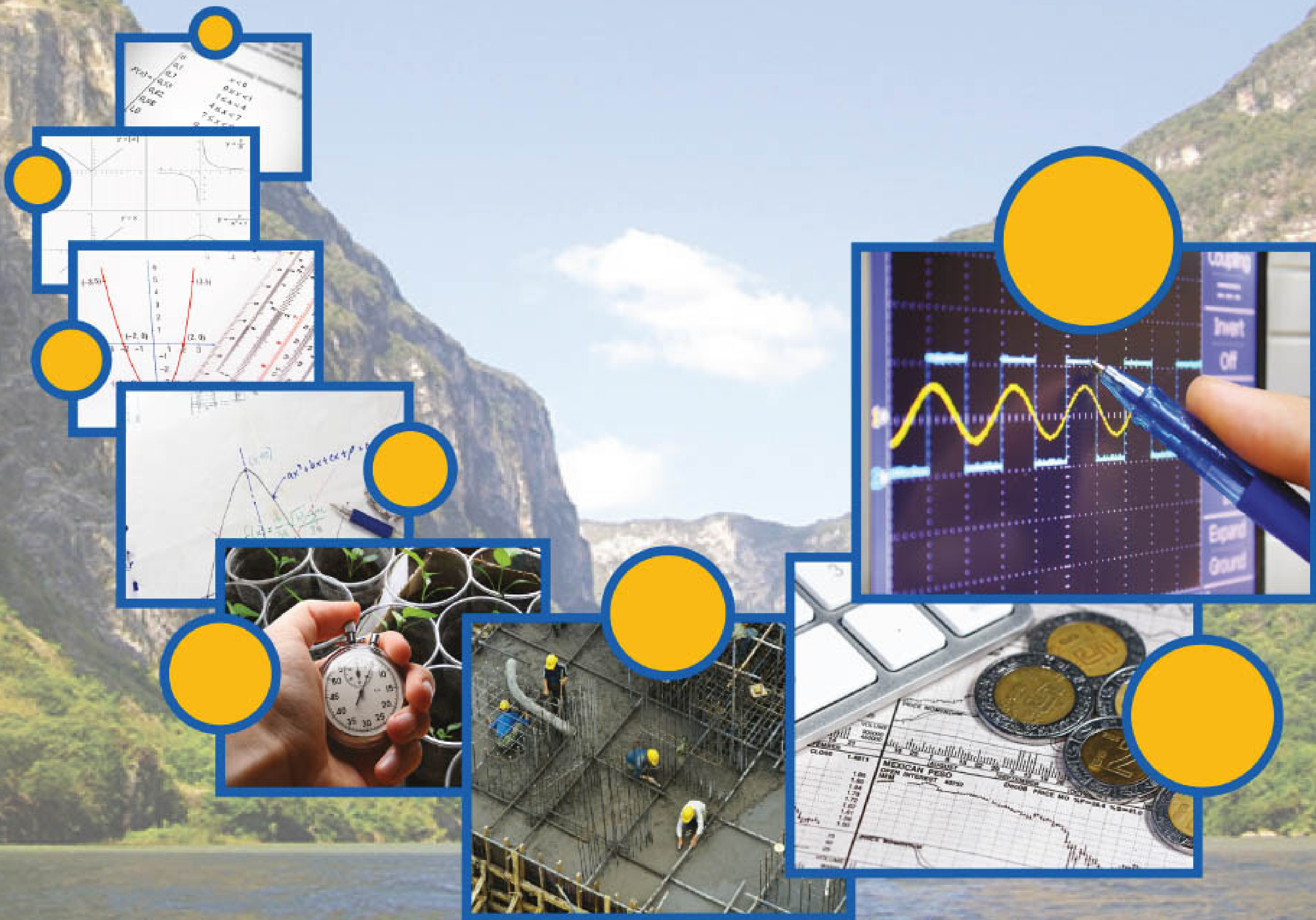
Matemáticas IV



Cuarto semestre

Matemáticas IV

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEBACHILLERATO COMUNITARIO

Telebachillerato Comunitario. Cuarto semestre

Matemáticas IV

Autor
Misael Garrido Méndez

Asesoría académica
Marcos Jesús Núñez Linares

Asesoría técnico-pedagógica
Dirección de Coordinación Académica

Diseño y diagramación
Saúl Ríos Bernáldez

Argentina 28, Centro, 06020, Ciudad de México.
ISBN: 978-607-9463-07-6
Séptima reimpresión
Impreso en México

Prefacio

Estimado estudiante, el libro que tienes en tus manos fue elaborado pensando en ti, en tus necesidades e inquietudes, como un instrumento que te apoye ahora que estudias el bachillerato. En sus páginas encontrarás contenidos y actividades que son fundamentales para que, paso a paso, puedas alcanzar las metas que esta asignatura te propone para este semestre.

A ti te toca, ahora, sacarle el mayor provecho a este libro, que es fruto del esfuerzo de un grupo de profesores y especialistas. Si lo haces tu amigo, lo aprovechas al máximo y lo combinas con el apoyo de tu maestro y de los demás recursos didácticos que están a tu alcance, seguramente ampliarás tus competencias y habilidades para construir un mejor futuro para ti y contribuir al desarrollo de tu comunidad, de tu estado y de nuestro México.

Te deseamos éxito en esta importante etapa de tu formación: el bachillerato.

Tabla de contenido

Matemáticas IV

Bloque I. Reconoces y realizas operaciones con distintos tipos de funciones

Bloque II. Aplicas funciones especiales y transformaciones gráficas

Bloque III. Empleas funciones polinomiales de grado cero, uno y dos

Bloque IV. Utilizas funciones polinomiales de grado tres y cuatro

Bloque V. Utilizas funciones factorizables en la resolución de problemas

Tabla de contenido

Bloque VI. Aplicas funciones racionales

Bloque VII. Utilizas funciones exponenciales y logarítmicas

Bloque VIII. Aplicas funciones periódicas

Presentación general

Como parte de la formación básica, se presenta la asignatura **Matemáticas IV**. Ésta pertenece al campo disciplinar de las Matemáticas, que conforme al Marco Curricular Común, tiene la finalidad de propiciar el desarrollo de tu pensamiento lógico y crítico, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que faciliten tu formación como ciudadano reflexivo y participativo, enfatizando una perspectiva plural y democrática.

Para que el resultado final responda a estas expectativas, tendrás que esforzarte mucho en esta etapa de desarrollo, crecimiento y preparación para el futuro.

Te invito a que aproveches al máximo todo lo que te ofrece este texto, realizando ejercicios, buscando información relevante sobre la cual reflexionar y argumentar o comprendiendo lo que tu programa de estudios busca lograr con su propuesta. Tienes la oportunidad de leer previamente, practicar, repasar para el examen, aclarar tus dudas, entre muchas otras posibilidades.

¿Qué es una competencia?

En el contexto educativo, una competencia se define como “la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico” (Acuerdo 442, Secretaría de Educación Pública, 2008).

El Bachillerato General busca consolidar y diversificar los aprendizajes y desempeños, ampliando y profundizando el desarrollo de competencias relacionadas con el campo disciplinar que promueve la asignatura **Matemáticas IV**. Por ello se busca el desarrollo de las **11 competencias genéricas** y se pondrá énfasis particular en las que se resaltan en negritas:

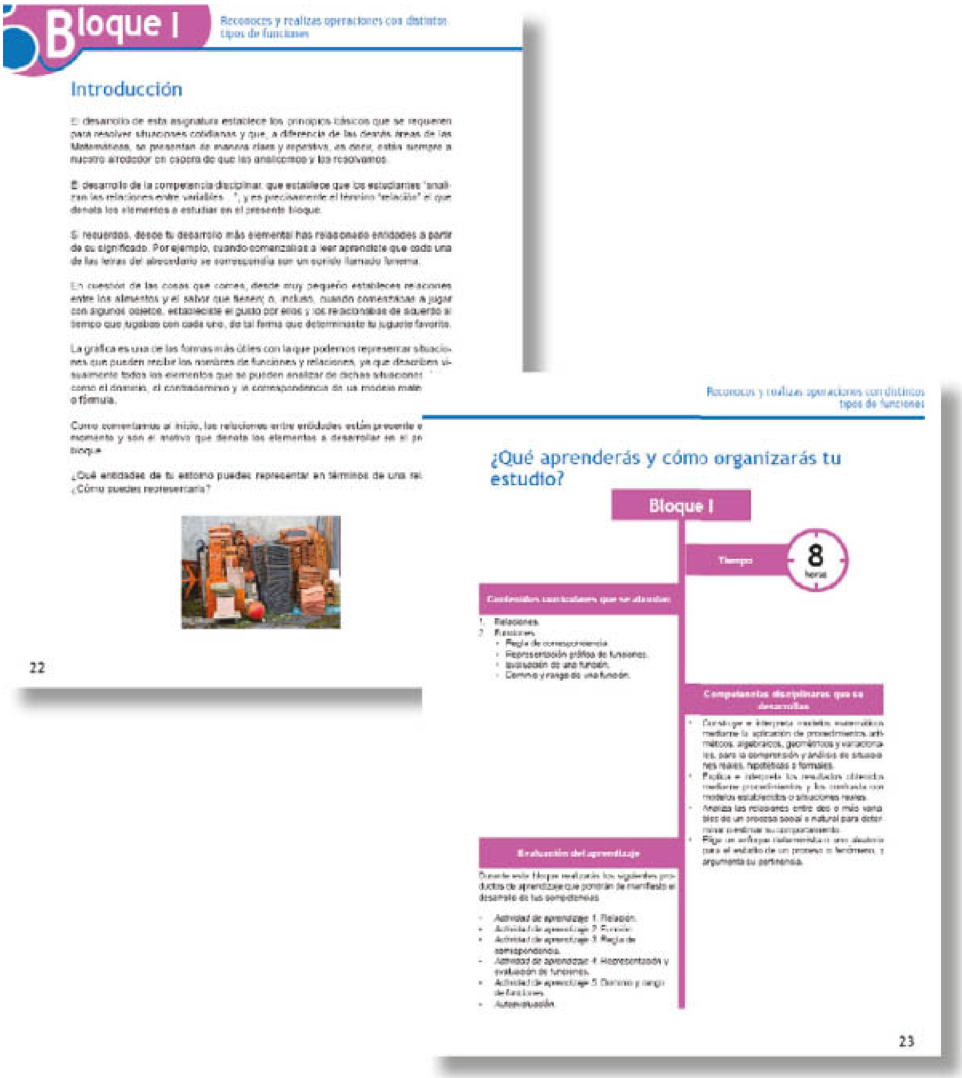
1. **Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.**
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. **Elige y practica estilos de vida saludables.**
4. **Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.**
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. **Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.**
7. **Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.**
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9. **Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.**
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. **Contribuye al desarrollo sostenible de manera crítica, con acciones responsables.**

Las **competencias disciplinares**, que son las habilidades que debes desarrollar y lo que tienes que aprender dentro del campo del conocimiento y la asignatura, se enunciarán al principio de cada bloque, y te servirán para identificar tu aprendizaje.

¿Cómo está estructurado este libro?

Inicio del bloque

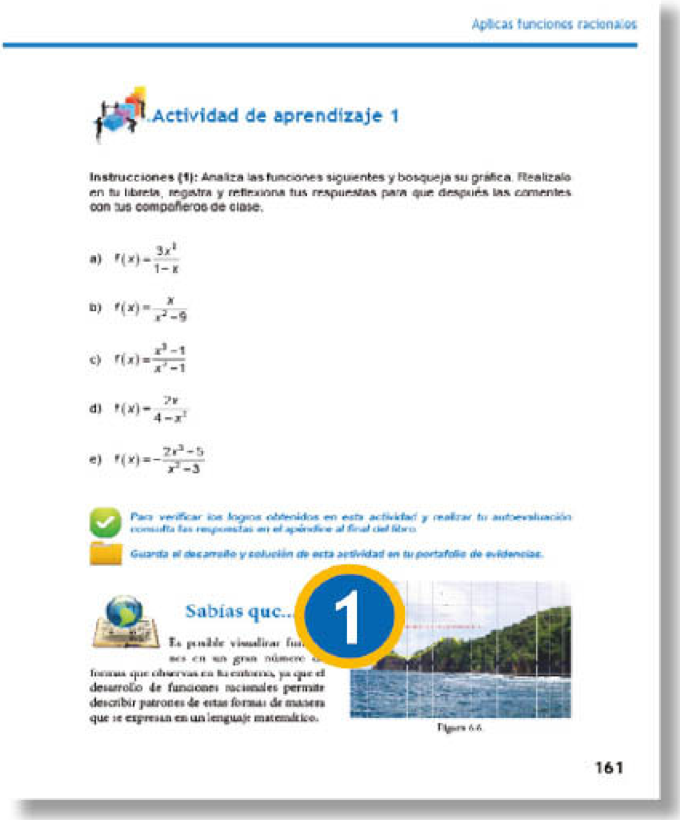
Al inicio de cada bloque encontrarás una breve introducción para acercarte al contenido, las competencia disciplinares y los desempeños que se obtendrán a partir de las actividades y los productos de aprendizaje.



Desarrollo del bloque

Esta parte es fundamental, aquí encontrarás el contenido general y disciplinar que necesitas para acercarte intelectualmente al tema de las Matemáticas.

A lo largo del bloque se intercalan estrategias didácticas de aprendizaje, actividades acompañadas de imágenes, ejemplos, preguntas detonadoras y evaluaciones. Todo esto estará relacionado con los contenidos y las competencias a desarrollar. También encontrarás algunos apoyos de estudio como cápsulas con datos interesantes y cuadros al margen del texto para reforzar tu aprendizaje, por ejemplo:



Aplicas funciones racionales

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones (1): Analiza las funciones siguientes y bosqueja su gráfica. Realízalo en tu libreta, registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

a) $f(x)=\frac{3x^2}{1-x}$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2-9}$

c) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$

d) $f(x)=\frac{2x}{4-x^2}$

e) $f(x)=-\frac{2x^3-5}{x^2-3}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta las respuestas en el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Sabías que...

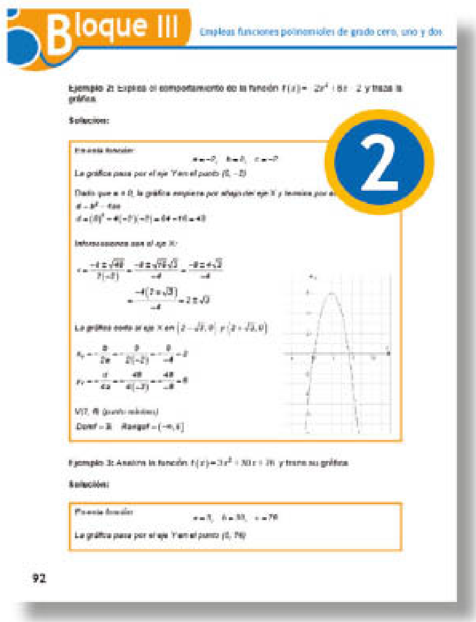
Es posible visualizar funciones en un gran número de formas que observas en tu entorno, ya que el desarrollo de funciones racionales permite describir patrones de estas formas de manera que se expresan en un lenguaje matemático.

Figura 6.6

161

1. **Datos interesantes**, que faciliten la relación de los contenidos con tu vida diaria.

2. **Procedimientos**, que muestran la secuencia lógica para llegar a soluciones.



Bloque III Empleas funciones polinomiales de grado cero, uno y dos

Ejemplo 2: Explica el comportamiento de la función $f(x)=-2x^2+8x-2$ y traza la gráfica.

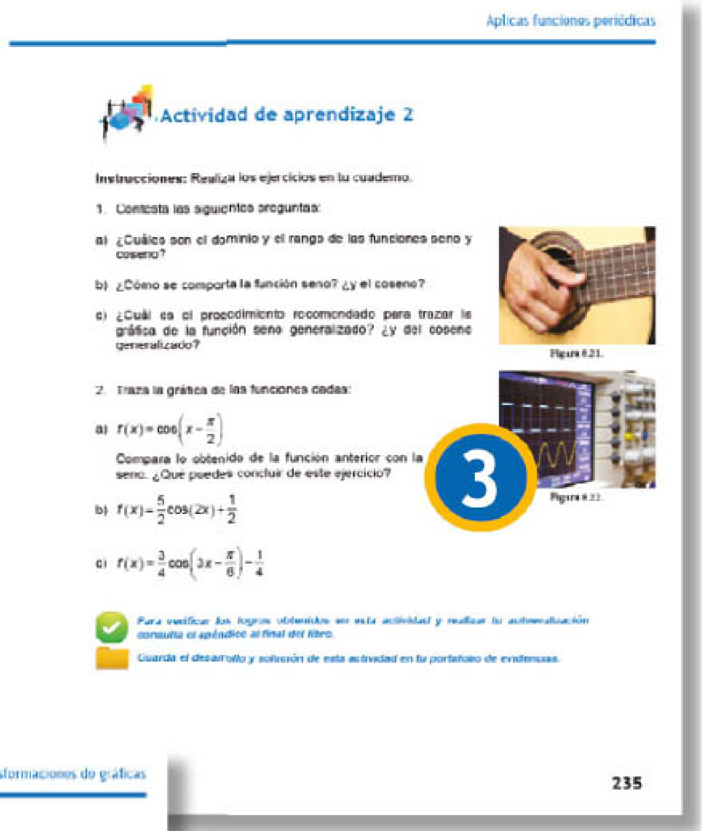
Solución:

Ejemplo 3: Analiza la función $f(x)=3x^2+30x+78$ y traza su gráfica.

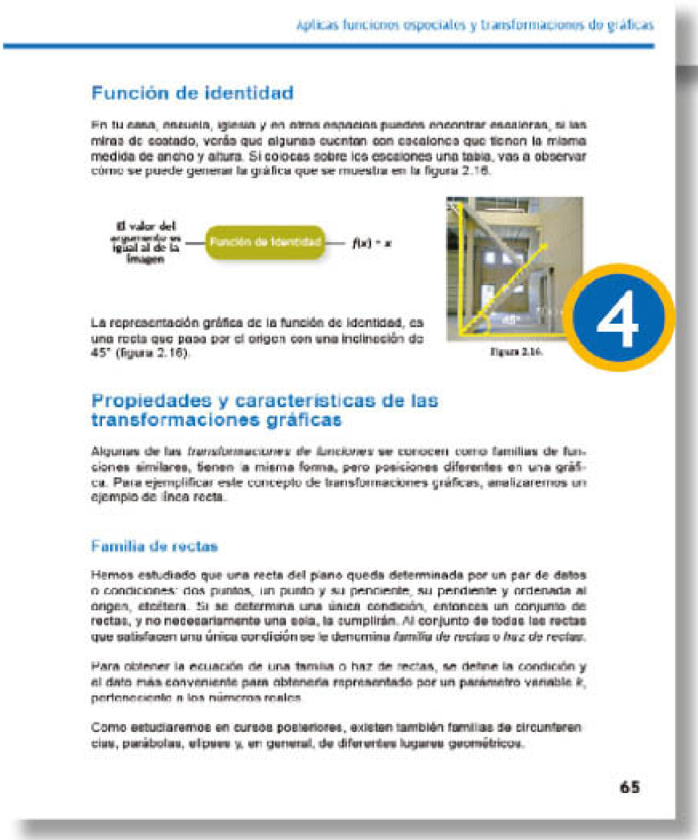
Solución:

92

3. **Imágenes**, que te ayudarán a la mejor comprensión de conceptos.



4. **Figuras**, que te permitirán realizar las actividades de aprendizaje.



Simbología que facilitará tu proceso de aprendizaje

Diseño instruccional

 Para iniciar, reflexiona

 Aprende más

 Actividad de aprendizaje

Apoyos para reforzar el aprendizaje

 Glosario

 Reflexionemos sobre la actividad

 Sabías que...

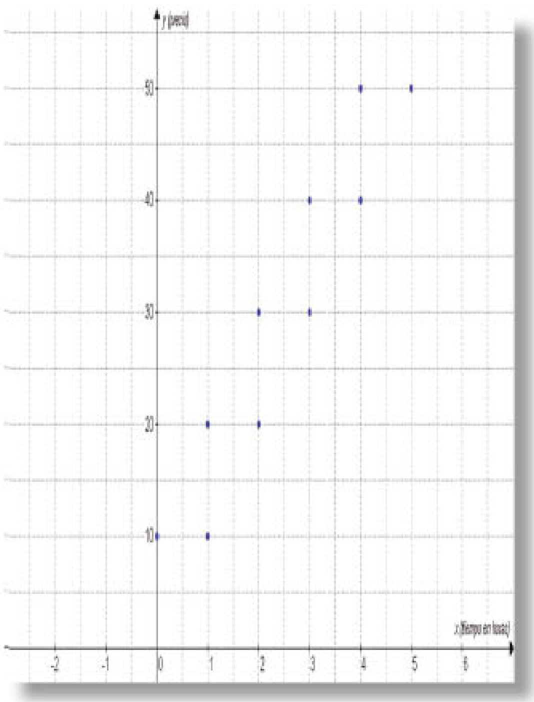
 Verifica tus logros

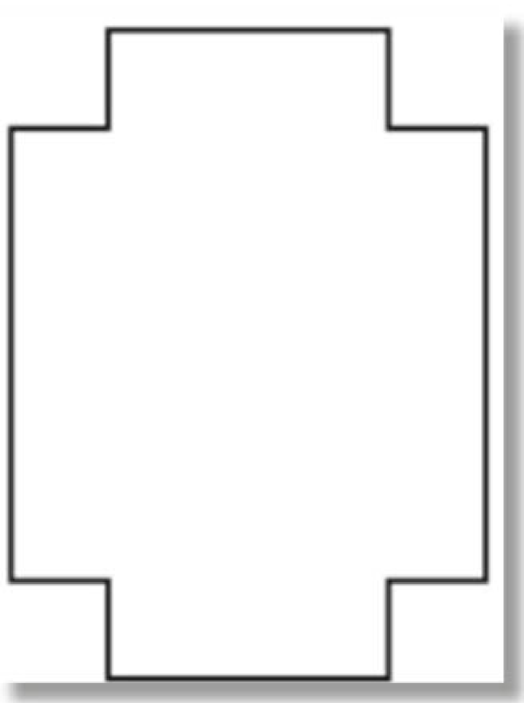
 Portafolio de evidencias

Cierre del bloque

Al terminar cada tema se ofrece un resumen y se propone una actividad que te permita evaluar qué tanto has avanzado y cuáles son tus áreas de oportunidad. Para este fin, tendrás que analizar, investigar, reflexionar y argumentar sobre lo aprendido.

El libro incluye actividades de aprendizaje para que puedas autoevaluar tu desempeño en el logro de las competencias. Al finalizar cada actividad puedes consultar la retroalimentación que se encuentra en el apéndice al final del libro. Ten presente que el trabajo realizado deberás asentarlo en una evidencia que irás recopilando en tu cuaderno para que tu maestro pueda evaluarte.





Los contenidos y las actividades se presentan de una manera atractiva. Aprovecha cada pregunta, el contenido, las actividades, ya que cada una incidirá en tu crecimiento personal, familiar y social. Trabaja con tu profesor y con tus compañeros, acércate a ellos, resuelvan dudas y aprendan juntos; date la oportunidad de construir con ellos este viaje. Esperamos que el curso sea interesante y fructífero.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

El propósito de esta sección es determinar los conocimientos, habilidades y actitudes en función de las expectativas planteadas en Matemáticas IV. Dependiendo de los resultados de esta evaluación, se definirán las estrategias para acortar la brecha entre tus conocimientos antecedentes y los necesarios para acceder a los nuevos.

Instrucciones (I): Realiza las razones o justificaciones necesarias para resolver lo que se solicita escribiendo los procedimientos completos en tu cuaderno de trabajo, a fin de que sirvan como evidencia de tu análisis y solución.

1. Escribe la respuesta correcta en el espacio correspondiente:

Término algebraico	Coeficiente numérico	Literal	Grado absoluto	Grado relativo a la primera variable
$7x^2y^3$	....	....	....	....
$-3mn^2$	....	....	....	....
$7.5\ a^3bc^2$	....	....	....	....
x^2	....	....	....	....
$\frac{xy}{5}$	....	....	....	....
$-x^4y^5$	....	....	....	....
$\frac{ab^3}{3}$	....	....	....	....
$-\frac{1}{2}mn$	....	....	....	....
$\sqrt[3]{10}\,r^2s^3$	....	....	....	....
-5.75	....	....	....	....

2. Encuentra el valor de la expresión $4c-\frac{5a}{3c+2b+1}+\frac{1}{2}$ para **a = −11, b = 3** y $c = 5$

3. Encuentra el resultado del producto $(7x-2y)(7x+2y)$

4. Despeja la variable y de la expresión $\frac{5x}{2y-1}=2$

5. Resuelve la ecuación $3x(x+2)+x=30-2x$

6. Simplifica la fracción $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

Instrucciones (II): Subraya la respuesta correcta:

7. La ecuación $y=3x^2+2x+1$ es de grado:

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

8. La ecuación $x^2-4x+4=0$ factorizada es igual a:

a) $(x-1)(x-4)=0$ b) $(x+4)(x-1)=0$ c) $(x+2)(x-2)=0$

d) $(x-2)(x-2)=0$

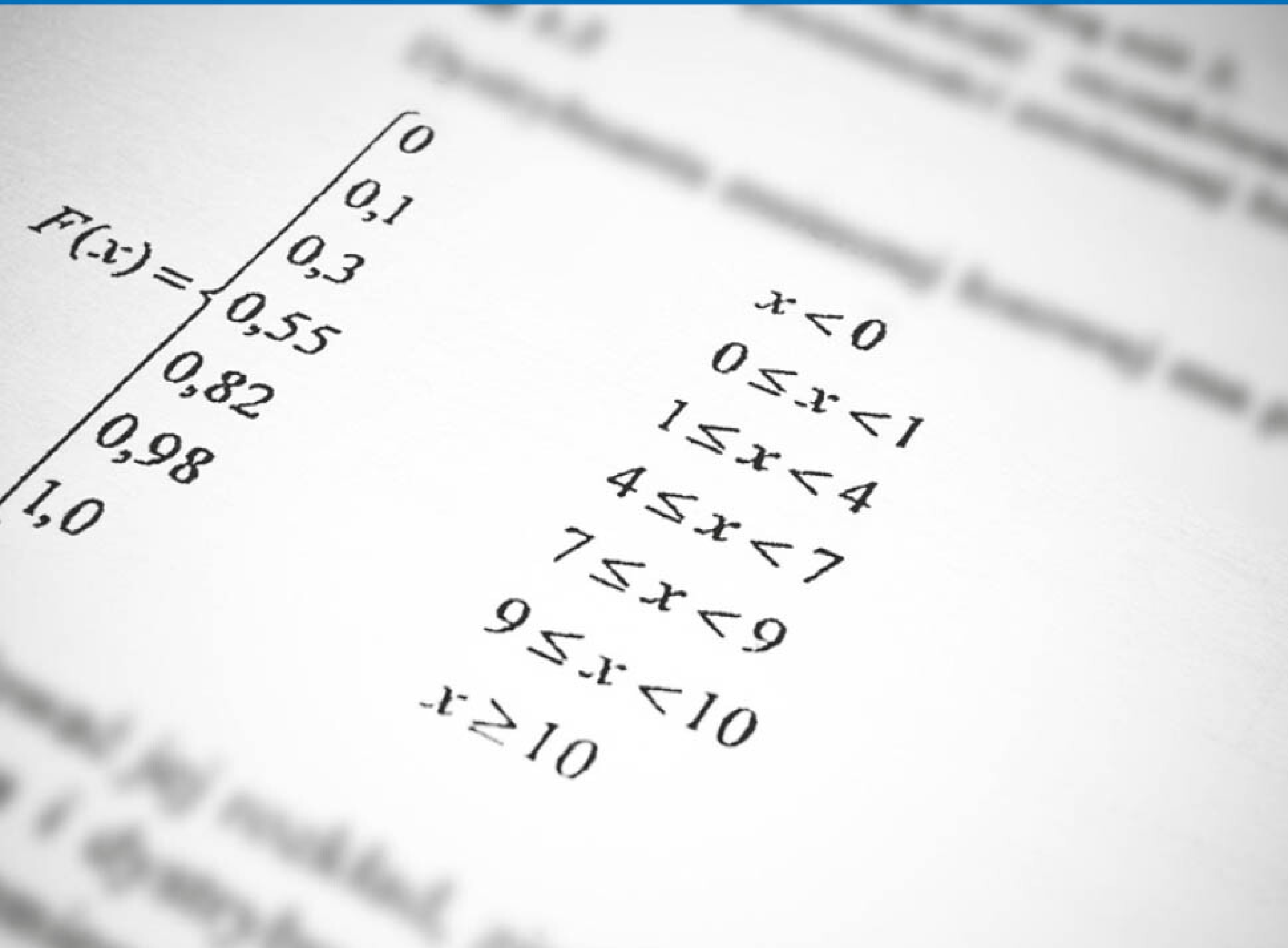
Instrucciones (III): Realiza lo siguiente.

9. Determina la ordenada del punto $P_1(-1, y_1)$ para que su distancia al punto $P_2(7, 4)$ sea igual a 10 unidades.

10. Ordena los siguientes términos de forma descendente (de mayor a menor) por el grado con respecto a la variable y: **$30x^3y^7$, $70xy^8$, $12x^5y^3$, $-7x^2y^6$, x^4y.**

Bloque I

Reconoces y realizas operaciones con distintos tipos de funciones



Introducción

El desarrollo de esta asignatura establece los principios básicos que se requieren para resolver situaciones cotidianas y que, a diferencia de las demás áreas de las Matemáticas, se presentan de manera clara y repetitiva, es decir, están siempre a nuestro alrededor en espera de que las analicemos y las resolvamos.

El desarrollo de la competencia disciplinar, que establece que los estudiantes "analizan las relaciones entre variables…", y es precisamente el término "relación" el que denota los elementos a estudiar en el presente bloque.

Si recuerdas, desde tu desarrollo más elemental has relacionado entidades a partir de su significado. Por ejemplo, cuando comenzabas a leer aprendiste que cada una de las letras del abecedario se correspondía con un sonido llamado fonema.

En cuestión de las cosas que comes, desde muy pequeño estableces relaciones entre los alimentos y el sabor que tienen; o, incluso, cuando comenzabas a jugar con algunos objetos, estableciste el gusto por ellos y los relacionabas de acuerdo al tiempo que jugabas con cada uno, de tal forma que determinaste tu juguete favorito.

La gráfica es una de las formas más útiles con la que podemos representar situaciones que pueden recibir los nombres de funciones y relaciones, ya que describen visualmente todos los elementos que se pueden analizar de dichas situaciones, tales como el dominio, el contradominio y la correspondencia de un modelo matemático o fórmula.

Como comentamos al inicio, las relaciones entre entidades están presente en todo momento y son el motivo que denota los elementos a desarrollar en el presente bloque.

¿Qué entidades de tu entorno puedes representar en términos de una relación? ¿Cómo puedes representarla?

¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque I

Tiempo 8 horas

Contenidos curriculares que se abordan

1. Relaciones.
2. Funciones.
   - Regla de correspondencia.
   - Representación gráfica de funciones.
   - Evaluación de una función.
   - Dominio y rango de una función.

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

Evaluación del aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias

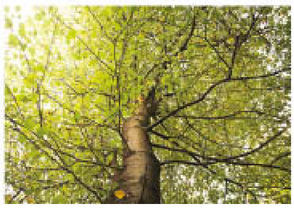
- *Actividad de aprendizaje 1*. Relación.
- *Actividad de aprendizaje 2*. Función.
- *Actividad de aprendizaje 3*. Regla de correspondencia.
- *Actividad de aprendizaje 4*. Representación y evaluación de funciones.
- *Actividad de aprendizaje 5*. Dominio y rango de funciones.
- *Autoevaluación*.

Para iniciar, reflexiona

Desde la niñez hemos aprendido a establecer relaciones con todos los elementos que nos rodean. Por ejemplo, al probar las cosas ácidas, aprendiste si te gustan así o si prefieres las cosas dulces; también determinaste si la relación del objeto y el color es necesaria en tus objetos personales, como la ropa, zapatos, etcétera.

I. Siguiendo la misma idea, asocia las imágenes y escribe una palabra que relaciones directamente con ellas:

....



....

II. Ahora escribe una palabra que relaciones con lo siguiente:

Abeja .... Vaca ....

Gallina .... Borrego ....

III. En plenaria, o por equipos, comenten sus respuestas y establezcan lo siguiente:

1. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias con las respuestas de tus compañeros?

....

2. ¿Cómo y por qué se relacionan los cuatro conceptos que se ilustran?

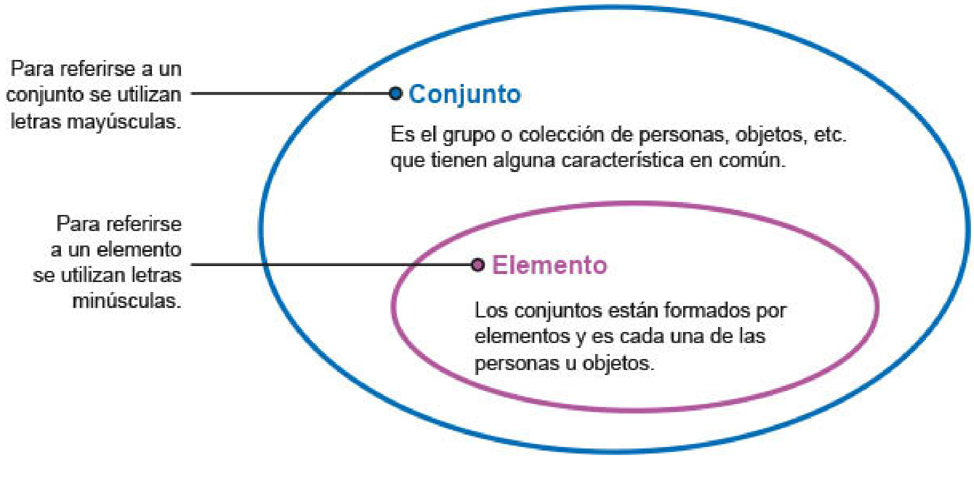
3. De los cuatro elementos que se mencionan, existe uno que no tiene relación directa, ¿cuál es?, ¿por qué no se relaciona?

4. ¿Cuál es la relación directa de los primeros cuatro elementos? ¿Por qué?

Aprende más

Relaciones

La idea intuitiva de *conjunto* está relacionada con el concepto de agrupación o colección de objetos; por ejemplo, cuando escuchamos un grupo de músicos tocando juntos una melodía, decimos que se trata de un conjunto musical; a una agrupación de casas construidas de manera similar podemos denominarla conjunto habitacional. De esta manera, se puede definir:



Existen tres formas de representar a los conjuntos:

$$\text{Representación de conjuntos}\begin{cases}\text{Extensión}\\ \text{Comprensión}\\ \text{Diagramas de Venn}\end{cases}$$

Por ejemplo: el conjunto de los colores primarios (rojo, azul, amarillo) puede representarse por *extensión*:

$$A = \{\text{rojo, azul, amarillo}\}$$

Por *comprensión*:

$$A = \{x \mid x \text{ es un color primario}\}$$

En donde la línea | debe leerse como "tal que". Así, lo anterior representa al "conjunto de x tal que x es un color primario".

Por *diagrama de Venn*: para representar conjuntos mediante un diagrama de Venn primero debe indicarse quién es el conjunto universo, es decir, el conjunto que contiene a todos los elementos con los que se va a trabajar (este conjunto puede variar). Para representar al conjunto A en un diagrama de Venn podemos definir el conjunto universo de la siguiente manera:

$$U = \{x \mid x \text{ es un color primario}\}$$

Figura 1.1.

El símbolo $\in$ sirve para indicar que un elemento pertenece a un conjunto, por ejemplo: azul $\in A$, se lee como "azul pertenece al conjunto A".

El símbolo $\subset$ representa a un subconjunto, definido como "es el conjunto que queda comprendido dentro de otro", por ejemplo: el conjunto A de los colores primarios es un subconjunto del conjunto U = {todos los colores}, esto es $A \subset U$.

Si analizamos los conjuntos:

$$A = \{\text{rojo, azul, amarillo}\}$$
$$B = \{\text{blanco, negro}\}$$

Cuando se consideran dos conjuntos y tomamos el primer elemento del conjunto A: rojo, y formamos parejas que tengan como primer componente al rojo y como segundo componente a cada uno de los elementos de B, y así sucesivamente, repitiendo el procedimiento con el azul y amarillo, formamos un conjunto cuyos elementos sean todas estas parejas: (rojo, blanco), (rojo, negro), (azul, blanco), (azul, negro), (amarillo, blanco), (amarillo, negro), a este conjunto se le llama *producto cartesiano* de A y B.

Se refiere al conjunto de parejas ordenadas cuyo primer componente pertenece al conjunto A y el segundo al B.

Se representa por A × B

Por extensión se representa así:
A x B = {(rojo,blanco),(rojo,negro),(azul,blanco),(azul,negro),(amarillo,blanco),(amarillo,negro)}

Observemos que las parejas son ordenadas, es decir, no es lo mismo (rojo, blanco) que (blanco, rojo), de modo que debemos colocar antes del símbolo ×, los primeros componentes de las parejas pertenecientes al conjunto, así:

$$(\text{rojo, blanco}) \in A \times B$$
$$(\text{blanco, rojo}) \in B \times A$$

Un *producto cartesiano* $A \times B$ puede representarse de la siguiente manera: en un eje horizontal marcamos los elementos de A y en uno vertical, los de B. Se trazan perpendiculares a los ejes a partir de cada una de estas marcas y el punto donde se cortan representa a la pareja correspondiente, por ejemplo:

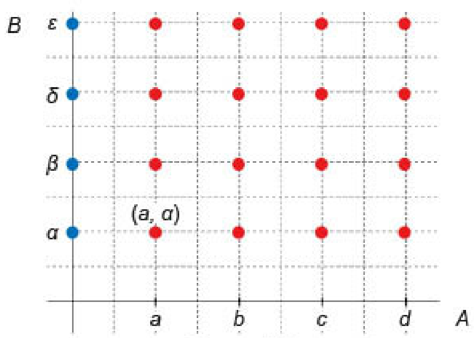


Figura 1.2.

Si comparamos con el conjunto $A \times B$ vemos que son las mismas parejas ordenadas. También podemos obtener el producto cartesiano de un conjunto con él mismo. Como ejemplo podemos considerar las estaciones del año y le llamaremos A:

$$A = \{\text{primavera } (p), \text{ verano } (v), \text{ otoño } (o), \text{ invierno } (i)\}$$

El producto cartesiano de $A \times A$ está dado por:

$$A = \{(p, p), (p, v), (p, o), (p, i), (v, p), (v, v), (v, o), (v, i), (o, p), (o, v), (o, o), (o, i),\\ (i, p), (i, v), (i, o), (i, i)\}$$

Puede afirmarse que se asocian todos los elementos de A con ellos mismos. Un caso importante es cuando se considera al conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ y su producto cartesiano con él mismo $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Este producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genera el plano, ya que sus elementos son todas las parejas (x, y) de números reales (abscisas, ordenadas), es decir:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Observa que a diferencia del ejemplo de la figura 1.2, este caso posee una infinidad de elementos, ya que el conjunto $\mathbb{R}$ es infinito.

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones: En equipos resuelvan lo siguiente, escriban el desarrollo en su cuaderno y verifiquen con otros equipos.

I. Problemas.

1. ¿Qué obtendrías al relacionar los elementos de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ mismo?

2. Considera el punto $A(0, -1)$. Encuentra las coordenadas del punto B, agregando 1 a la abscisa del punto A y 2 a su ordenada. Representa el punto sobre el plano cartesiano. Aplicando la misma regla (sumar 1 a la abscisa y 2 a la ordenada), encuentra ahora los puntos C y D y así sucesivamente. Escribe la secuencia de los puntos A, B, C,…, F. ¿Cómo pasas de un punto al subsecuente? ¿Cuál es la coordenada del punto L? Explica cómo determinar las coordenadas del punto P y ¿cuál es el modelo matemático para relacionar los puntos obtenidos?

II. De forma individual, realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios:

3. Dar tres ejemplos de conjuntos:

a) Representarlos en las tres formas.
b) Utiliza los conjuntos para dar un subconjunto de cada uno de ellos.

4. Obtener los siguientes productos cartesianos si $A = \{2, 5\}$ y $B = \{0, 4, 9\}$:

a) $A \times B$
b) $A \times A$
c) $B \times B$

5. Escribe un problema y represéntalo gráficamente con cualquiera de las formas estudiadas.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Las expresiones simbólicas, así como el significado de la *relación* entre las abscisas y las ordenadas de los puntos en la secuencia, son importantes.

Anteriormente vimos que el plano cartesiano es una representación de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir, que contiene a todos los puntos cuyas coordenadas sean números reales. De esta manera podremos estudiar a los subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, los cuales toman formas diversas. Un ejemplo es una curva (figura 1.3).

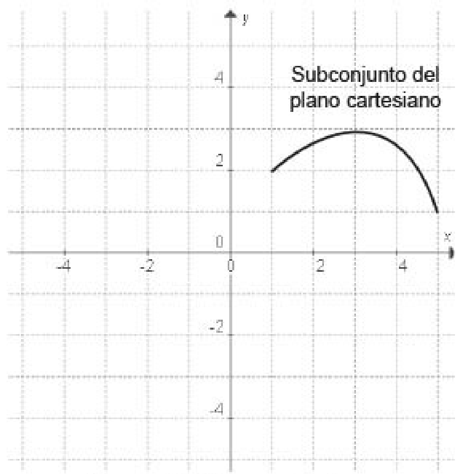


Figura 1.3. Plano cartesiano.

A las rectas que forman el plano se les llama ejes: el horizontal es el eje X y el vertical, Y. Para comenzar se establecerán relaciones entre los elementos de X y Y.

En la vida cotidiana, para comprender y organizar el entorno que nos rodea asociamos objetos o elementos que presentan alguna característica común. Seguramente has escuchado frases como depende de… o en función de…

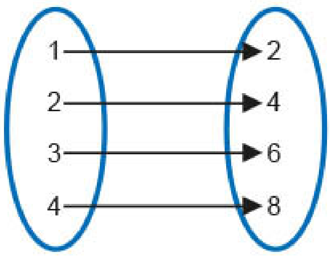
Por ejemplo:

- A cada libro le corresponde un número total de páginas.
- Los resultados obtenidos en los exámenes están relacionados con el tiempo dedicado a estudiar.
- A cada persona le corresponde una fecha de nacimiento.
- La distancia recorrida por un vehículo con su velocidad o el consumo de gasolina.

Una *relación* es el subconjunto de un producto cartesiano formado por los elementos de éste último, normalmente definido por una regla o ley dada. Tales elementos se denotan como (x, y) y significa que x está relacionado con y.

Existen muchas formas de describir una relación, por ejemplo:

- Una *oración*: a cada número natural menor que 5 se le asocia su doble.
- Un *diagrama:*



- Una *tabla:*

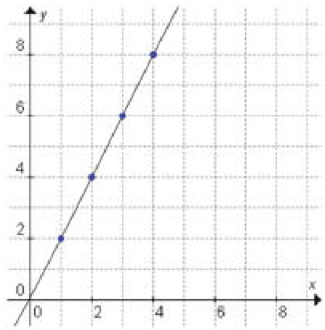
x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

- *Parejas ordenadas:*

$$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

- *Ecuación:* $y = 2x$

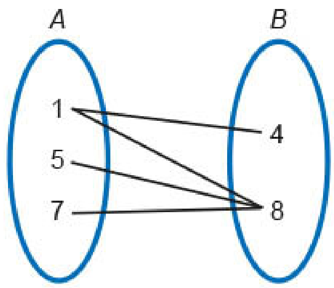
- Gráfica:



Todas las formas anteriores representan la misma relación.

Un ejemplo de relación es sean $A = \{1, 5, 7\}$ y $B = \{4, 8\}$, su producto cartesiano es: de acuerdo con la definición de relación, consideremos la regla "*A* menor que *B*", entonces analicemos qué parejas de $A \times B$ tienen como primer elemento un número menor que el del segundo. Se observa que son (1,4),(1,8),(5,8),(7,8). El subconjunto formado por estas parejas es una relación $R = \{(1,4),(1,8),(5,8),(7,8)\}$

La representación de esta relación es la siguiente:



Los conjuntos relacionados reciben nombres especiales:

Dominio de la relación

Es el conjunto formado por los primeros componentes de las parejas que pertenecen a la relación.

En la relación anterior el dominio es *A*.

Contradominio o codominio

Se refiere al conjunto al cual pertenecen los segundos componentes de las parejas contenidas en la relación.
En la relación anterior, *B* es el codominio.

Es importante señalar que en algunas relaciones no se utilizan todos los elementos del codominio y los que se utilizan forman un tipo de conjunto llamado:

Rango o conjunto imagen

Es el conjunto formado por los primeros componentes de las parejas que pertenecen a la relación.

En la relación anterior el dominio es *A*.

Por ejemplo, en la relación de la figura 1.4 se tiene que:

$C = \{0,1,2\}$ → Dominio

$D = \{0,1,2,3,4\}$ → Codominio

0, 1, 2 → Argumentos

$E = \{0,2,4\}$ → Rango

0, 2, 4 → Imágenes

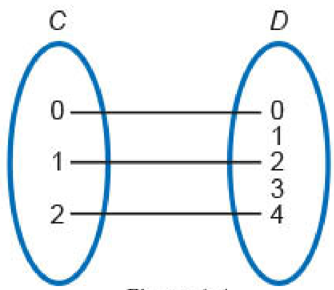


Figura 1.4.

Funciones

Para iniciar a estudiar este tema te invitamos a realizar lo siguiente: en equipos construyan una caja rectangular sin tapa, que sirva para guardar diversos objetos. Cada equipo diseñará una caja diferente. Dispones de una hoja de papel tamaño carta cuyas dimensiones son 21.6 cm de ancho por 27.9 cm de alto.

1. Recorta en las esquinas de ella cuadrados de x = 1, 2, 3, 4, 5, ... 10 cm de lado, según lo indique el mediador del grupo (figura 1.5).
2. Obtendrás una superficie como la que se muestra en la figura 1.6.
3. Dobla las pestañas para formar la caja rectangular (figura 1.7).
4. El producto final será como se muestra en figura 1.8.

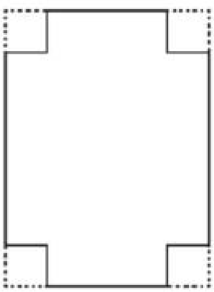


Figura 1.5.

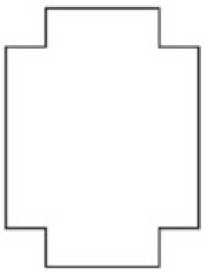


Figura 1.6.

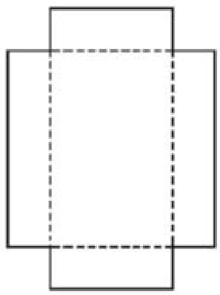


Figura 1.7.

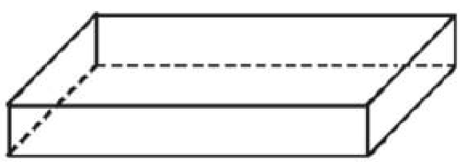


Figura 1.8.

Determina los siguientes datos:

1. Altura de la caja: .... cm; largo de la caja: .... cm; ancho de la caja: .... cm.

2. Área de la base: .... cm^2, Áreas laterales: .... cm^2, ... cm^2, ... cm^2, ... cm^2.

3. Área total de la caja: ....

4. Volumen de la caja: .... cm^3

Cada equipo dictará sus resultados y llenarán la siguiente tabla para formar pares ordenados (área, volumen) y analizar los resultados.

x	Área	Volumen	(Área, volumen)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

¿Cuál es el máximo valor que puede tomar *x* y por qué?

....

....

¿Existe un valor máximo y un valor mínimo para el volumen de la caja? ¿De qué dependen esos valores?

....

....

Una *función* es una relación tal que cada elemento del dominio está relacionado con uno y sólo un elemento del codominio. Por ejemplo, si f es una función con dominio A y codominio B, su *representación* es:

$$f: A \rightarrow B$$

(se lee "f" va de "A" a "B")

En cuanto a la *notación* de una función, la imagen de un argumento x bajo una función f se denota como $y = f(x)$, y se lee "y" igual a "f" de "x". Analicemos el siguiente diagrama (figura 1.10):

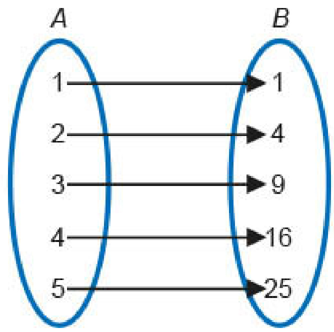


Figura 1.9.

$f: A \rightarrow B$ es una función, ya que cada elemento del dominio (A) está relacionado con un único elemento del codominio (B). Así,

$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 4$$
$$f(3) = 9$$
$$f(4) = 16$$
$$f(5) = 25$$

Otro ejemplo, es que en la vida real sabes que la cantidad de hierro contenida en un fruto depende del tipo de fruto seleccionado. Así, una fresa contiene 1 mg de este mineral, en tanto que una aceituna contiene 1.6 mg.

x fruto (pieza)	Aceituna	Ciruela pasa	Higo seco	Lima	Pera	Cereza
y hierro (mg)	1.6	3.9	4.0	0.4	0.5	0.5

La relación (x, y) = (fruto, cantidad de hierro) es una función. En cambio, la relación (y, x) = (cantidad de hierro, fruto) no es una función, ya que en este caso, a una misma cantidad de hierro, por ejemplo 0.5 mg, le corresponde más de un fruto.

Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones (1): A partir de las reglas de correspondencia encuentra el codominio e indica si se trata de una función o de una relación.

a)

$f(x) = x^2 + 5$

$f(1) = (1)^2 + 5 = 6$

$f(2) =$

$f(3) =$

$f(4) =$

$f(5) =$

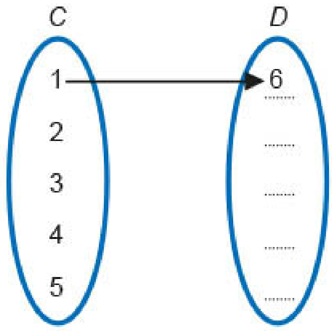


Figura 1.10

Función

....

b)

$f(x) = \sqrt{x} - 5$

$f(1) = \pm\sqrt{1} - 5 = \pm 1 - 5$

$f(1) = -4$ y $f(1) = -6$

$f(2) =$

$f(3) =$

$f(4) =$

$f(16) =$

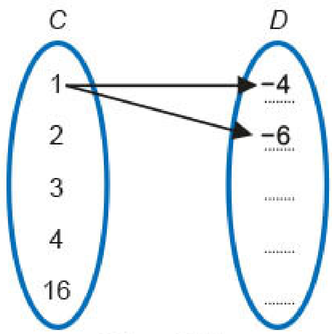


Figura 1.11.

Función

....

c)

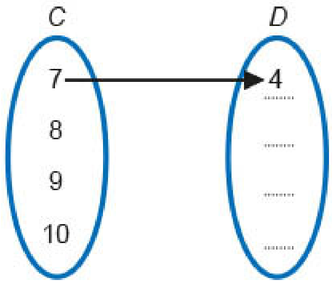
$f(x) = x - 3$

$f(7) = 7 - 3 = 4$

$f(8) = -4$

$f(9) =$ ....

$f(10) =$ ....



Función

....

d)

Función

Los botones y ojales de una prenda de vestir se relacionan de modo que, en la forma ordinaria del uso de la prenda, a cada botón le corresponde sólo un ojal.

....

Instrucciones (2): Responde en tu libreta o cuaderno cuál de las siguientes relaciones son funciones. Si es posible, determina el dominio y el rango.

a) $\{(0, 2), (1, 3), (0, 4), (3, 5)\}$
b) $\{(-1, 2), (-2, 3), (-4, 5), (-5, 5)\}$
c) $\{(-1, 8), (0, 8), (1, 8)\}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Una manera de denotar una función es como el subconjunto de un producto cartesiano $\mathbb{R} = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$, pero la notación más común es $y = f(x)$, esta expresión se lee como: "y" es igual a "f" de "x" y representa el valor que f asigna a la variable

x, esto significa que el valor de la variable y depende y está determinado exclusivamente por el valor de x.

Una *función* es una regla de asociación entre dos conjuntos que relaciona a cada elemento del primer conjunto con uno y sólo un elemento del segundo.

Una función es una regla de asociación que relaciona dos o más conjuntos entre sí, en donde al primero se le llama dominio y al otro contradominio. Esta regla no permite relacionar un mismo elemento del dominio con dos elementos del contradominio o codominio.

Regla de correspondencia

La función es una regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos llamados dominio y rango.

Algunas de las fórmulas que conocemos tienen las características de la función. En una relación entre números reales, se presentan dos tipos de cantidades: constantes y variables.

Una *constante* es un símbolo que representa un valor fijo; mientras que una *variable* es un símbolo que puede representar diferentes valores.

Por ejemplo:

a) El área A de un triángulo está dada por su base b y altura h, mismas que son las variables, mientras que el 2 siempre tiene el mismo valor, es una constante:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

b) El volumen V de una esfera depende de su radio r. Esta relación está dada por la ecuación:

$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Para expresar estas fórmulas como función, vamos a escribirlas en la forma $y = f(x)$.

En la siguiente página encontrarás una tabla con algunas fórmulas expresadas en forma de función y la explicación de la relación de sus variables.

Tabla 1.1. Fórmulas expresadas en forma de función $y = f(x)$

Fórmula	Función	Variables	Ley de relación
$A = l^2$	$A = f(l)$	l	Elevar al cuadrado el valor de l.
$A = \dfrac{b \times h}{2}$	$A = f(b,h)$	b, h	Multiplicar las variables y dividir entre 2.
$v = \dfrac{d}{t}$	$v = f(d,t)$	d, t	Dividir las variables.
$v = \sqrt{2gh}$	$v = f(h)$	h	Raíz cuadrada del producto de las constantes 2 y g por h.
$v = \dfrac{c}{p}$	$v = f(p)$	p	Dividir la constante entre p.
$A = \pi r^2$	$A = f(r)$	r	Elevar al cuadrado la variable y multiplicar por π.

Actividad de aprendizaje 3

Instrucciones: En equipos formados por el mediador del curso, resuelvan los siguientes problemas, desarrollen su respuesta y verifiquen con otros equipos. Expresen los siguientes enunciados como una función. Reconozcan sus variables, constantes, la fórmula y la ley de relación.

1. El área de un rectángulo de largo igual al doble del ancho, en términos de uno de sus lados.

2. El área de las caras laterales de un cubo, en términos del lado.

3. El área de un triángulo equilátero, en términos del lado.

4. El volumen de un cilindro de altura igual al triple del radio en términos del radio.

5. Una caja cerrada de base cuadrada y con un volumen de 240.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Representación gráfica de funciones

Para graficar una función usamos un sistema coordenado cartesiano, en el cual localizamos los pares ordenados (puntos en el plano cartesiano).

Para trazar la gráfica de una función, primero determinamos un número suficiente de puntos cartesianos, cuyas coordenadas la satisfagan, y después los unimos con una curva o una recta para así determinar su comportamiento.

La gráfica es una de las formas más útiles con la que podemos representar funciones y relaciones, ya que describen visualmente tanto el dominio, el contradominio y la correspondencia de una función o relación.

También ayuda a determinar si la correspondencia es una función o relación al trazar rectas verticales sobre toda la gráfica. Si los trazos tocan en un solo punto a la gráfica, significa que tenemos una función. En caso de que cualquiera de las verticales toque en dos o más puntos, entonces es una relación pero no una función. A esto se le conoce como la prueba de la recta vertical.

Por ejemplo, la circunferencia trazada en el plano cartesiano. ¿Se podrá considerar como una función? Observa que al trazar la recta roja, ésta toca en dos puntos a la curva, por lo tanto la circunferencia no es una función.

El número de pares ordenados que permiten obtener una representación correcta de la gráfica depende de la función de que se trate; para cierto tipo de funciones basta determinar dos o tres pares ordenados, en otros casos se requieren una gran cantidad de ellos.

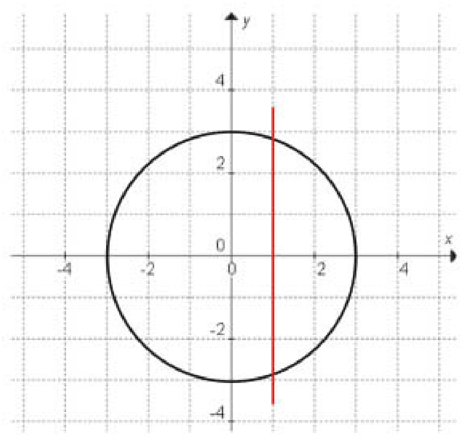


Figura 1.12.

Existen ciertos pares ordenados característicos que facilitan la construcción de la gráfica. Es decir, los puntos, si los hay, donde la gráfica de una ecuación corta a los ejes coordenados se llama *intersecciones con los ejes*.

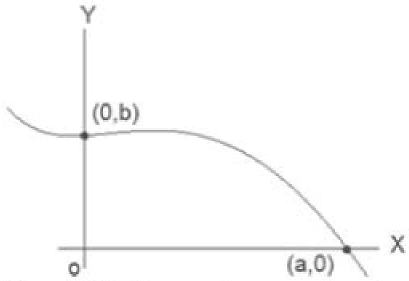


Figura 1.13. Intersecciones con los ejes.

- La intersección en Y es el valor de y cuando $x = 0$
- La intersección en X es el valor de x cuando $y = 0$

Con respecto al gráfico de la figura 1.14, "b" representa la intersección en y, mientras que "a" representa la intersección en x.

Evaluación de una función

El proceso realizado para obtener puntos de la gráfica de una función, se llama *evaluar una función*, en general, para evaluar una función $y = f(x)$ se sustituye el valor de la variable independiente, sobre la regla definida por la función, *se puede evaluar con números reales y en forma algebraica*. Debemos tener mucho cuidado cuando evaluamos una función, puesto que el valor debe pertenecer al dominio de ésta. Por ejemplo:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ está definida para todo $x \neq 0$, por lo que $f(0)$ no está definido

Ejemplo de evaluación numérica:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Si $x \geq 0$ el contradominio está en los números reales. Así, si $x = 4$

$$f(4) = \sqrt{4} = 2$$

si $x < 0$, el contradominio está en los números complejos.

Por lo tanto, si $x = -4$, entonces $f(-4) = \sqrt{-4} = 2i$

Ejemplo de evaluación algebraica de una función:

Si $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$ evaluar cuando $x = a + b$

La solución es $f(a+b) = \sqrt{3(a+b)^2 - 2} = \sqrt{3a^2 + 6ab + 3b^2 - 2}$

Actividad de aprendizaje 4

Instrucciones: Completa con las diferentes representaciones de las siguientes funciones.

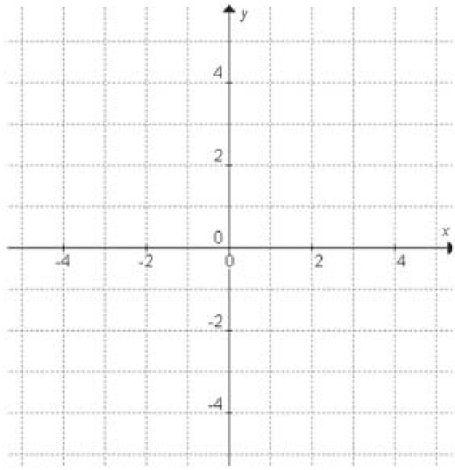
Función | ***Tabla*** | ***Pares ordenados*** | ***Gráfica***

a) ....

x	y
1	5
2	10
3	15
4	20

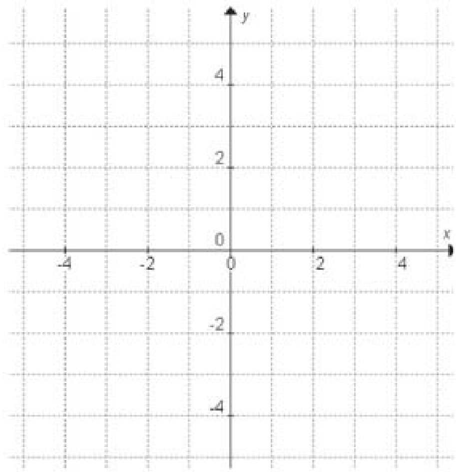
....

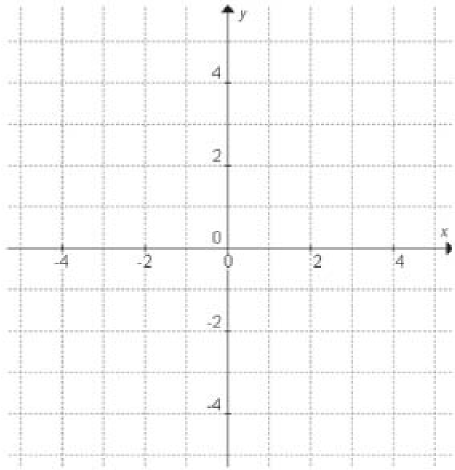
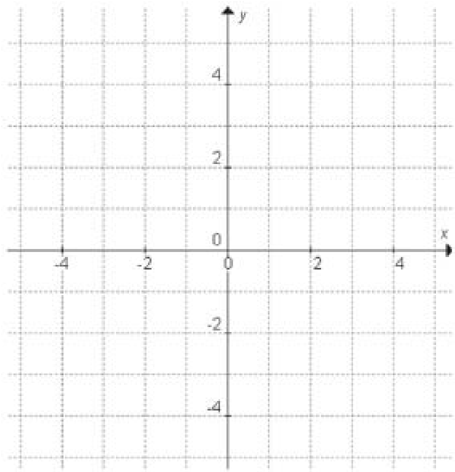
....



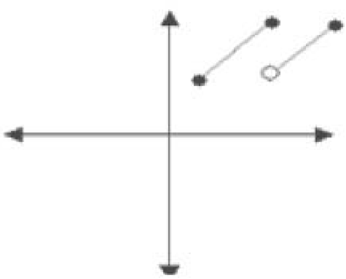
b) ....

G = {(1,1),(-1,1),
(2,4),(-2,4)}

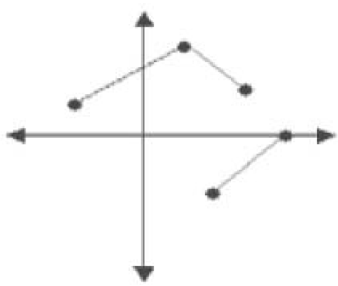


Función	*Tabla*	*Pares ordenados*	*Gráfica*
c) $y = x + 3$			
d) $f(x) = 2x$			

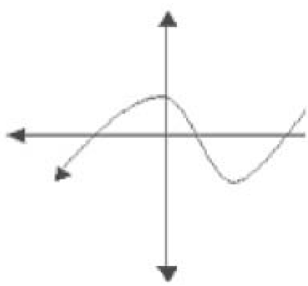
e) Utiliza la prueba de la recta vertical y determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función.



I

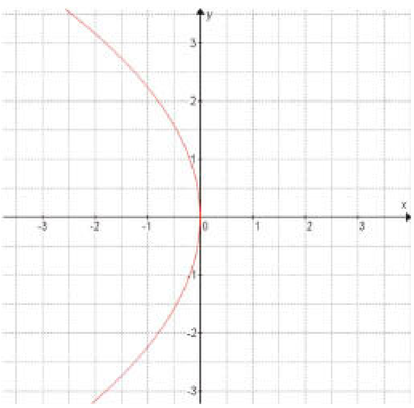


II

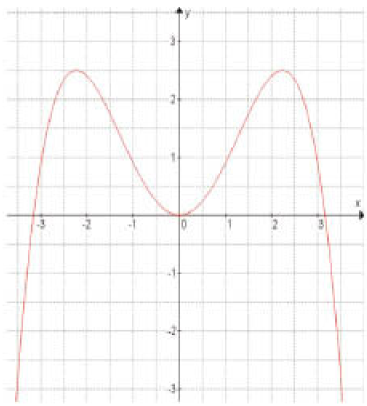


III

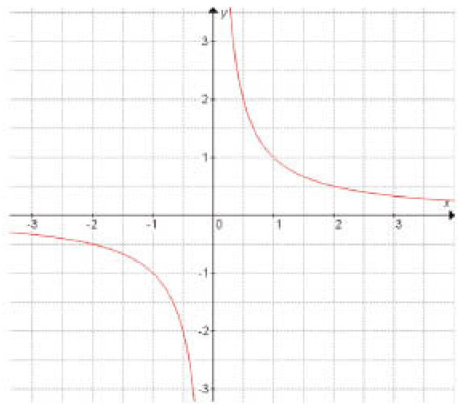
f) Utiliza la prueba de la recta vertical y determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función.



I



II



III

g) Para cada función, evaluar $f(2)$, $f(a-b)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(-4)$ y $f\left(\sqrt{t}\right)$

- $f(x) = x^2 + 3x + 3$
- $f(x) = \sqrt{x-3}$
- $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$
- $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x-3}}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Dominio y rango de una función

Como ya se vio anteriormente, los valores del dominio se colocan sobre el eje X. Los valores del rango se colocan sobre el eje Y.

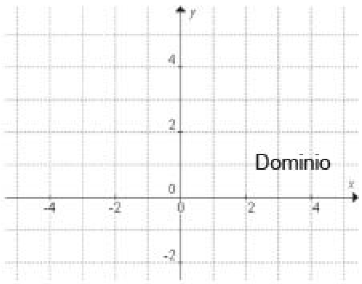


Figura 1.14.

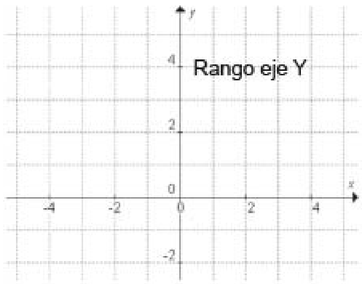


Figura 1.15.

El siguiente análisis es para ejemplificar algunos procedimientos para obtener el dominio y el rango de algunas funciones.

Por ejemplo, en una función como $f(x) = 3x + 2$ el dominio es $\{x \in \mathbb{R}\}$, es decir, en intervalos $(-\infty, \infty)$ no importa qué números se sustituyan en la función algebraica, ésta siempre tiene sentido y la representación geométrica de la función es infinita sin interrupciones.

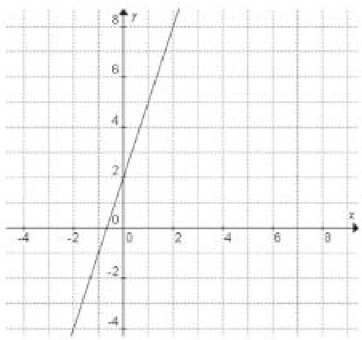


Figura 1.16.

Si una función tiene la variable en el denominador, se excluyen del denominador aquellos valores de x que hacen cero al denominador. Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Dominio $x \in \mathbb{R}$, pero $x \neq 0$, esto indica que $x = 0$ no está en el dominio, en intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Su representación geométrica es:

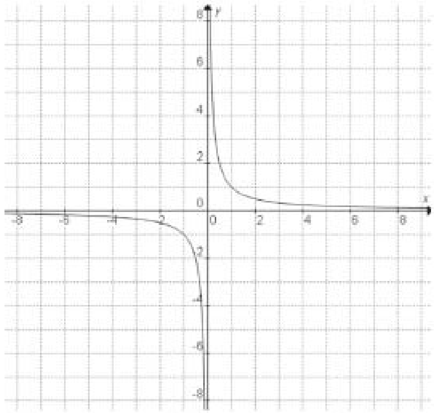


Figura 1.17.

Observa que la gráfica es infinita, pero nunca tocará al eje Y, que representa al valor de $x = 0$.

Los valores que hacen a una función indefinida, porque el denominador se convierte a cero se llaman *asíntotas* y pueden ser líneas rectas o curvas a las que se aproxima otra curva, como gráfica de determinada función, sin llegar a tocarla por más que se acerque.

Ahora, analicemos la siguiente forma de una función racional:

$$f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$$

Las raíces del numerador $p(x)$ son raíces de la función $f(x)$ y las raíces del denominador $g(x)$ son asíntotas o indeterminaciones de la función $f(x)$.

Entonces, si deseáramos hallar el dominio de la función $y = \frac{x-1}{x+3}$, dominio $x \in \mathbb{R}$ excepto $x = -3$ (asíntota):

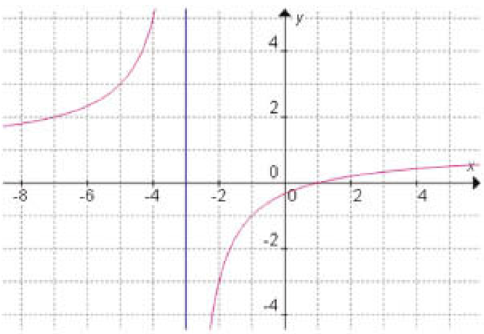


Figura 1.18.

Observa que la línea de color azul representa el valor indeterminado de la función, es decir, a la asíntota $x = -3$, que es equivalente a $x + 3 = 0$.

Sabes que los intervalos se utilizan con mucha frecuencia en las funciones para determinar los dominios, entonces, se tiene que los intervalos son una forma de representar números reales. Se les puede asociar directamente a desigualdades de números reales de la siguiente manera:

- Si $a < x < b$, entonces el intervalo para x es (a, b); es un intervalo abierto.
- Si $a \leq x < b$, entonces el intervalo para x es $[a, b)$; es un intervalo semiabierto por la derecha.
- Si $a < x \leq b$, entonces el intervalo para x es $(a, b]$; es un intervalo semiabierto por la izquierda.
- Si $a \leq x \leq b$, entonces el intervalo para x es $[a, b]$; es un intervalo cerrado.

Una manera simple de observarlos consiste en el tipo de símbolo empleado para delimitar; el paréntesis no incluye al límite indicado, mientras que el corchete sí lo incluye en el conjunto.

Actividad de aprendizaje 5

Instrucciones: En equipos, establezcan el dominio y la imagen de las siguientes funciones. Escriban el desarrollo en sus cuadernos de trabajo y, al finalizar, verifiquen los resultados con los demás equipos.

1. $f(x) = 3x^2 - 5x$
2. $f(x) = \sqrt{x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$
4. $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x+5}$
7. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x+3}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$
9. $f(x) = \dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^2 - x - 6}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Cierre del bloque I

Reflexiona sobre lo aprendido

Al inicio de esta sección se presentaron situaciones en las que se incluyó el concepto de relación. A lo largo del texto se han abordado los conceptos básicos al respecto de las relaciones y funciones. Siendo que estas últimas son el motivo principal del presente material, realiza una síntesis en la que describas las ventajas de conocer los elementos de relaciones y funciones descritos y como los aplicarías para mejorar determinadas situaciones.

Es importante considerar que el trabajo de funciones es extenso y, en ocasiones, por la teoría formal se vuelve un tanto complejo; sin embargo, puedes comenzar con las bases respecto a qué elementos de una función debes conocer, si existe alguna forma de organizarlas y, en general, los elementos aplicables a ellas. Integra todo lo anterior a través de una investigación cuyo propósito sea identificar la importancia de trabajar adecuadamente con funciones de cualquier tipo.

Autoevaluación

Instrucciones: Lee los siguientes ejercicios y encuentra las soluciones. Realiza las anotaciones necesarias en tu cuaderno, con orden y limpieza. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

I. Realiza en tu cuaderno un mapa conceptual con los aspectos más importantes sobre relaciones y funciones.

II. Empieza un glosario con los términos más importantes del bloque I.

III. Realiza una presentación gráfica que explique los siguientes puntos:

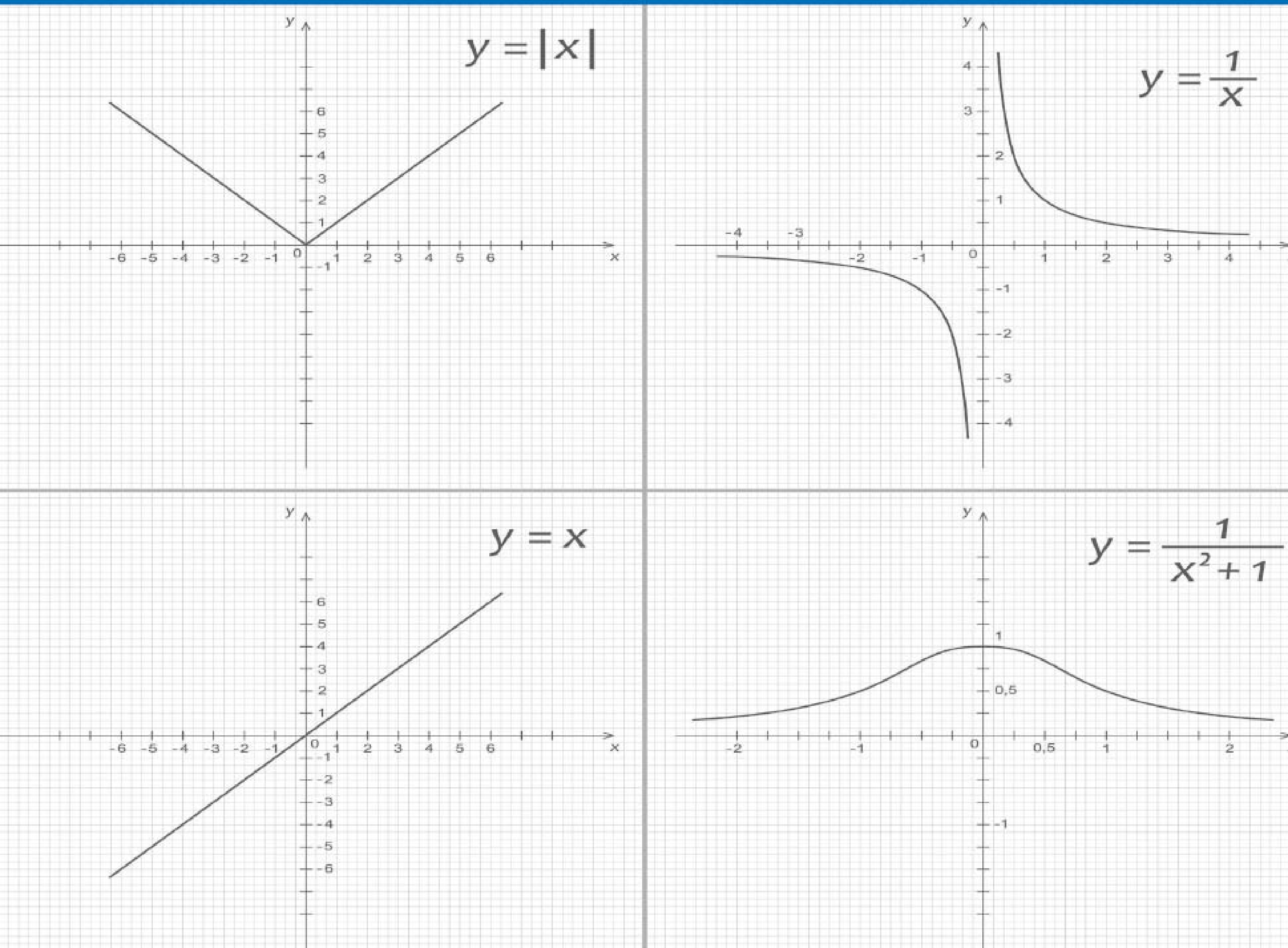
- Noción de relación y noción de función.
- Distintas formas de representar una función.
- Dominio y rango de una función.
- ¿Cuál es la característica que debe tener una relación para que sea función?
- Escriban una reflexión acerca de lo aprendido y realizado hasta el momento.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Bloque II

Aplicas funciones especiales y transformaciones de gráficas



Introducción

Hasta ahora se han desarrollado las características y conceptos de relaciones y funciones, así como de las diferentes operaciones que se pueden realizar entre éstas. En este bloque consideraremos ciertos tipos de funciones especiales, así como su aplicación en diferentes ramas del saber.

Desde que conocimos las operaciones aritméticas básicas hemos considerado que tienen cierto orden o relación entre ellas; por ejemplo, y con respecto a nuestro objetivo, cada una de estas operaciones básicas tiene una operación que llamamos inversa, lo cual realiza lo contrario o "deshace" lo que la operación anterior indica. Más específicamente, la operación contraria o inversa de la suma es la resta, y así de modo contrario (la operación contraria a la resta es la suma); por lo tanto, se dice que la suma y la resta son operaciones inversas. Así ocurre con la multiplicación y la división; lo mismo se cumple en la potenciación y la radicación. Estos conceptos de operaciones inversas se pueden aplicar también a las funciones, de ahí que estudiemos las funciones inversas o también llamadas funciones recíprocas.

Para ir comprendiendo el concepto de inversa, te propongo analizar la siguiente serie de operaciones:

a) $\frac{3+4}{5}-6=-4.6$ (número inicial: 3) b) $\left(\sqrt{9-5}\right)(3)=6$ (número inicial: 9)

Para el caso de a), supón que el número inicial es el 3, y para el de b) es 9. Después de una serie de operaciones, en el primer inciso se obtuvo el resultado −4.6; en el segundo caso, 6. En la primera relación, lo que se realizó para obtener −4.6 a partir del número 3 fue: sumarle 4, dividir esa suma entre 5 y restarle 6 al resultado de la división. La cuestión en este inciso es tratar de realizar las operaciones inversas, utilizando los valores 4, 5 y 6, para que a partir del valor −4.6 (valor final) obtengamos el valor 3 (valor inicial). Como se trata de aritmética básica, seguramente podremos realizar las operaciones inversas mentalmente. El resultado para este proceso será, entonces: $(-4.6 + 6)(5) - 4 = 3$.

Observemos que se aplicaron las operaciones aritméticas inversas para llegar al resultado buscado, el 3.

Ahora contesta las siguientes preguntas: ¿qué ocurrirá si a este valor de 3, que obtuvimos con las operaciones inversas, le realizamos de nuevo las operaciones aritméticas originales, es decir, que valor se obtendrá? ¿Existirá relación entre las operaciones inversas? En el caso de b), ¿cómo serán las operaciones inversas?

¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque II

Tiempo 8 horas

Contenidos curriculares que se abordan

1. Concepto de funciones especiales.
    - Función inyectiva.
    - Función sobreyectiva.
    - Función biyectiva.
2. Función inversa.
3. Función escalonada.
4. Función valor absoluto.
5. Función constante.
6. Función de identidad.
7. Propiedades y características de las transformaciones gráficas.
    - Familia de rectas.

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

Evaluación del aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias

- *Actividad de aprendizaje 1.* Funciones inversas.
- *Actividad de aprendizaje 2.* Función escalonada.
- *Actividad de aprendizaje 3.* Transformaciones gráficas.
- *Autoevaluación.*

Para iniciar, reflexiona

En algunos países las temperaturas se manejan en grados Fahrenheit y en otros en grados centígrados. Si tenemos, por ejemplo, la gráfica que corresponde a la función $f(x) = 1.8x + 32$

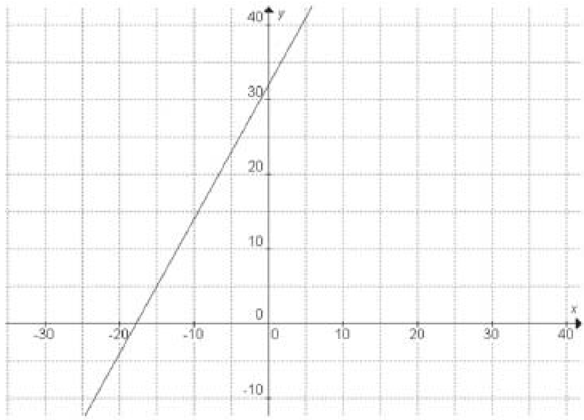


Figura 2.1.

Esta función permite convertirde grados centígrados a grados Fahrenheit. De esta manera, el eje de las ordenadas representa los Fahrenheit y el de las abscisas los centígrados.

Si analizamos la gráfica de esta función, identificamos que es una función inyectiva o uno a uno. Si le aplicamos la prueba de la vertical descubrimos que tocará en un solo punto a la gráfica. De esta manera, se pueden observar en la gráfica los valores de la siguiente tabla:

Grados centígrados	Grados Fahrenheit
0	32
−10	14

Cada uno de los valores de la función puede calcularse y así identificamos el valor de los centígrados en Fahrenheit. ¿Pero cómo logramos convertir de grados Fahrenheit a centígrados? Para dar respuesta a la pregunta anterior es necesario conocer los conceptos de las funciones especiales y en particular la función inversa.

Aprende más

Concepto de funciones especiales

Las funciones especiales se clasifican en:

Funciones explícitas. La variable dependiente está despejada. Ejemplo: $y = f(x)$.

Funciones implícitas. La función está dada por una ecuación; es decir, la variable dependiente no está despejada. Ejemplo: $x^2y - 4y = 2$

Funciones continuas. Su gráfico no presenta ningún punto aislado, saltos o interrupciones. Todas las funciones polinomiales son continuas.

Funciones discontinuas. Presentan saltos o interrupciones. Todas las funciones racionales son discontinuas para todos los valores de x que hacen cero el denominador.

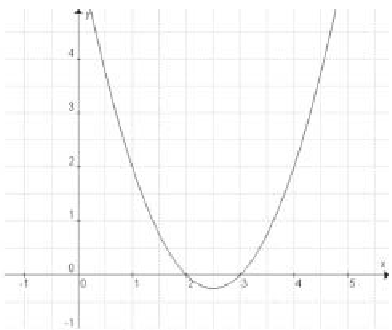


Figura 2.2. Función continua.

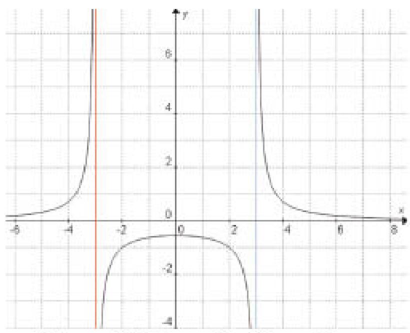


Figura 2.3. Función discontinua.

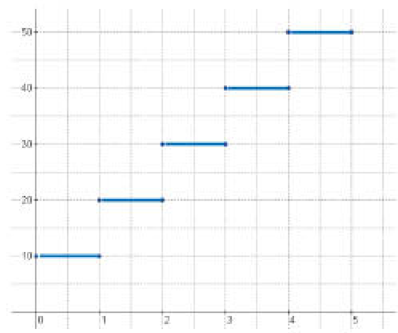


Figura 2.4. Función escalonada.

Funciones escalonadas. Existen funciones que se definen a través de intervalos cuyo dominio es $(-\infty,\infty)$, sin embargo, no son continuas.

Funciones crecientes. Una función f es creciente sobre un intervalo en R. si para cualquier valor x_1 y x_2 en R donde $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, los valores de la función se incrementan (figura 2.4).

Funciones decrecientes. Una función f es decreciente sobre un intevalo R si, para cualquier x_1 y x_2 en R, donde $x_1 > x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, es decir, los valores de una función disminuye (figura 2.5).

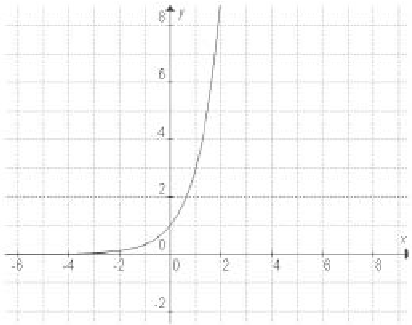


Figura 2.5. Función creciente.

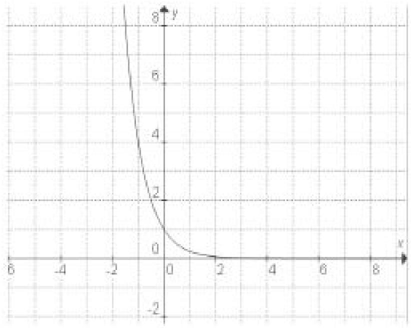


Figura 2.6. Función decreciente.

Función inyectiva

Una función f es inyectiva, univalente o uno-uno si y sólo si cada $f(x)$ en el recorrido es la imagen de exactamente un único elemento del dominio; es decir, es función inyectiva si cada elemento del dominio tiene una imagen diferente en forma general:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ lo que implica que } x_1 = x_2$$

Ejemplo:

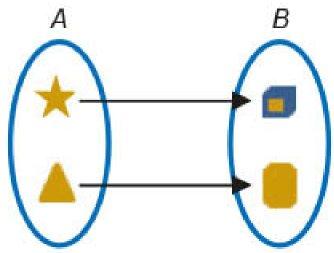


Figura 2.7.

Método de línea horizontal para identificar si la función es inyectiva

El método de línea horizontal se utiliza para saber si una función es inyectiva o no. Por ejemplo, si tenemos la función $f(x) = 2x^2 + x + 1$, necesitariamos comprobar si la recta horizontal $f(x) = 4$ corta la gráfica de la función en dos puntos. Observa la figura 2.8.

La función $f(x) = 2x^2 + x + 1$ no es inyectiva, porque la recta horizontal $f(x) = 4$ corta a la gráfica de la función en dos puntos (figura 2.8). Por el contrario, con una función como $p(x) = x^3 - 1$ se observa que la función $f(x) = 4$ corta la gráfica en un solo punto (figura 2.9), por lo que la función sí es inyectiva.

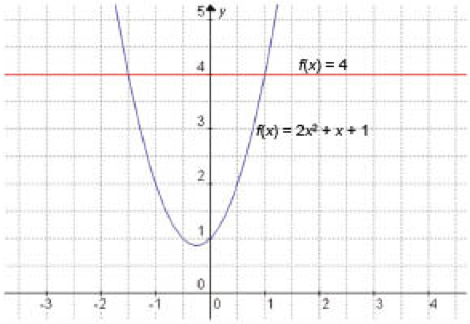


Figura 2.8.

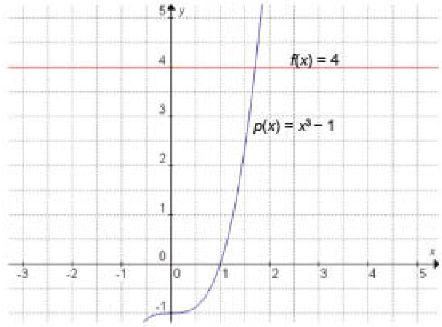


Figura 2.9.

Función sobreyectiva

Sea *f* una función de *A* en *B*, *f* es una función sobreyectiva, si y sólo si cada elemento de *B* es imagen de al menos un elemento de *A*, bajo *f*.

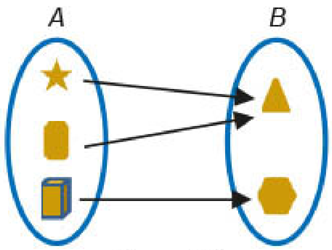


Figura 2.8.

Función biyectiva

Sea f una función de *A* en *B*, *f* es una función biyectiva si y sólo si *f* es sobreyectiva e inyectiva a la vez.

Una vez definidas las funciones *inyectiva*, *sobreyectiva* e *inyectiva*, podemos aplicar estos conceptos a las funciones *f*(*x*), a qué clasificación pertenecen. Por ejemplo, sean los conjuntos $M = \{p, q, r\}$ y $N = \{1, 2, 3\}$ para los cuales se definen las siguientes funciones:

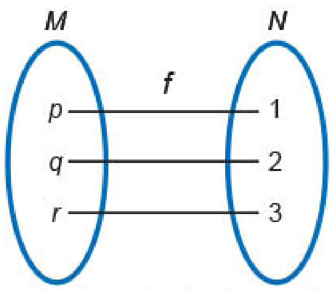


Figura 2.9. Función biyectiva de *N* en *M*.

Función inversa

Sabemos que existen funciones inversas: suma-resta; producto-cociente; radicación-potencia; logaritmo-exponencial. Se expresan así:

Suma–resta: $a + c = b \Rightarrow b - c = a$

Producto-cociente: $a \times c = b \Rightarrow \dfrac{b}{c} = a$

Radicación-potencia: $\sqrt{a} = b \Rightarrow (b)^2 = a$

Logaritmo-exponencial: $ln(a) = b \Rightarrow e^b = a$

La palabra inversa en álgebra tiene el mismo sentido de la palabra inversa en la vida cotidiana, es decir, “lo contrario de”, “lo opuesto de”.

Una forma práctica de expresar una función inversa es intercambiar el dominio y el rango de una función. La función inversa se expresa como $f^{-1}(x)$ y se lee “inversa de f” y se representa como $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Considerando una función f que tiene por dominio un conjunto A y por codominio un conjunto B, entonces se llamará función inversa de f, a aquella función que tiene como dominio B y por codominio al conjunto A. Denotaremos a la función inversa como $f^{-1}(y) = x$ y su diagrama es:

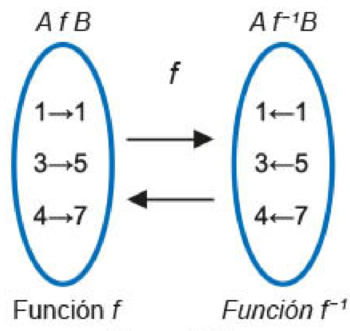


Figura 2.10.

El proceso para encontrar la función inversa de otra dada es el siguiente:

- Se despeja la variable x de la función original, para la función inversa, esa es la variable dependiente.
- Se intercambia la variable x por y.
- La ecuación resultante corresponde a la función inversa de la expresada.

Ejemplo 1: Obtener la función inversa de $y = 2x - 1$

Solución:

La ecuación se expresa como función: $f(x) = 2x - 1$

Ahora se despeja x:

$$x = \frac{y+1}{2} = g(y)$$

La función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

Ejemplo 2: Obtener la función inversa de $y = \dfrac{1}{x+1}$

Solución:

Despejando x:

$$y(x+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x+1 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y} - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1-y}{y}$$

Por lo que: $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$

Ejemplo 3: Calcular la inversa de la función inyectiva $f(x) = 1.8x + 32$

Solución:

Sustituye $f(x)$ *por "y":*

$$f(x) = 1.8x + 32$$

Intercambia entre ellas todas las "x" y las "y":

$$x = 1.8y + 32$$

Despejando y; sustituyendo y por $f^{-1}(x)$*:*

$$y = \frac{x-32}{1.8}$$

Esta función inversa, en el caso de conversiones, es útil para convertir de Fahrenheit a centígrados.

La figura 2.11 muestra en un mismo plano las gráficas de las funciones anteriores. Interpretamos que en cada situación de uno a uno se conserva y existe una línea que parece ser la que las separa, la función $y = x$.

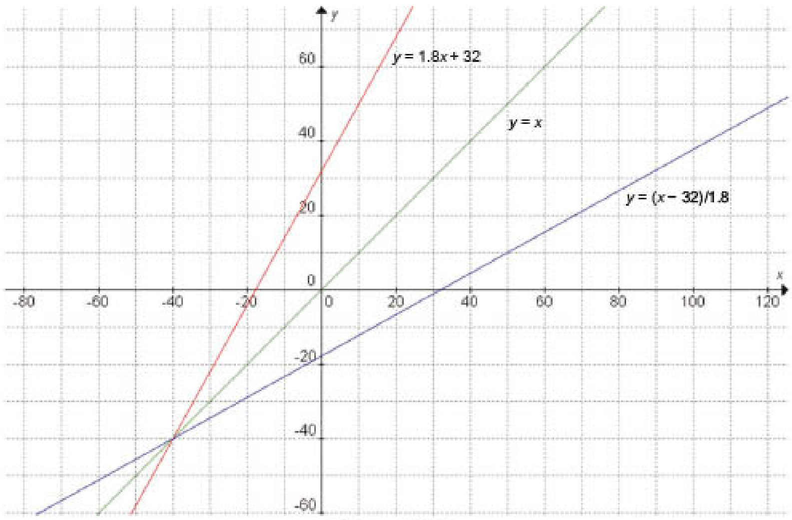


Figura 2.11.

Ejemplo 4: La siguiente fórmula permite convertir x grados centígrados a $F(x)$ grados Farenheit:

$$F(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

a) ¿Qué significado tiene $F^{-1}(x)$?

b) ¿A cuántos grados centígrados equivalen 68 grados Farenheit?

c) Hallar $F^{-1}(x)$

Solución:

a) Construye una fórmula para convertir x grados Farenheit a grados centígrados.

b) $C(68) = \frac{5}{9}(68 - 32) = 20°C$

c) Escribimos $y = \frac{9}{5}x + 32$. *Intercambiando x por y, obtenemos la función inversa* $x = \frac{9}{5}y + 32$. *En ésta,* $y = \frac{5}{9}(x - 32)$. *Escribimos* $C(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$. *Así* $C(x) = F^{-1}(x)$.

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones: Lee detenidamente las indicaciones de los siguientes ejercicios, realiza las actividades que se te piden, anota las respuestas en orden y con limpieza en tu cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros. Escucha con respeto las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

I. Desarrolla las actividades que se solicitan. Obtén la inversa de cada función y determina cuáles de estas funciones son inversas y comprueba usando composición de funciones.

1. $p(x) = 3x - 7$
2. $m(x) = x^2 - 1$
3. $y = x^3$
4. $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$
5. $y = 6x^2 + 1$

6. Comprueba que son inversas cada par de funciones.

a) $p(x) = x + 1$; $\quad g(x) = x - 1$

b) $F(x) = 6x + 3$; $\quad G(x) = \frac{x-3}{6}$

7. Traza la gráfica de las siguientes funciones inversas:

a) $f(x) = 5$

b) $x^2 + y = 1$

c) $y = \frac{1}{x}$

d) $y - 4x = 2$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Función escalonada

Las *funciones escalonadas* son un tipo particularmente sencillo de funciones que se definen en un intervalo, de manera que exista una partición del mismo en el que la función se mantenga constante en cada uno de los subintervalos.

Informalmente, una función escalonada es aquella que, al ser dibujada, su gráfica tiene la forma de una escalera o una serie de escalones (que no necesariamente deben ser crecientes). Este tipo de funciones tienen un comportamiento diferente por intervalos; es decir, una función distinta en cada escalón.

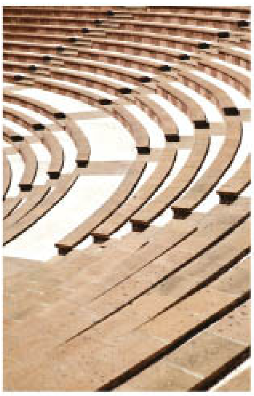


Figura 2.12.

Por ejemplo, si deseas asistir a un concierto de tu grupo musical favorito y preguntas por los precios de los boletos, tal vez te dirían que de la primera fila a la quinta cuestan \$500, de la sexta a la décima, \$350 y de ahí en adelante \$200. De acuerdo con esto podemos ver que:

- Es una función discreta.
- Dominio = números naturales 1, 2, 3, 4, …
- Contradominio = 500, 350 y 200
- En general:

$$P = f(F) \text{ donde } P = precio \text{ y } F = fila$$

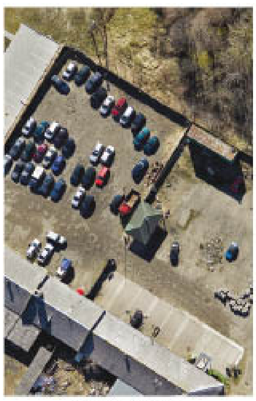


Figura 2.13.

Entonces:

$$f(1) = f(2) = \ldots = f(5) = 500$$
$$f(6)\ldots = f(10) = 350$$
$$\text{Y para } F > 10;\ f(F) = 200$$

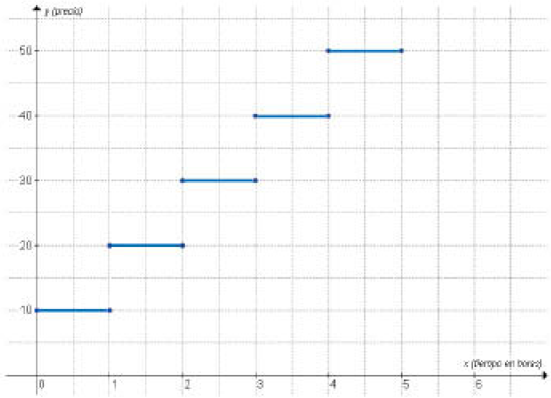
Ejemplo 1: Los estacionamientos cobran una cuota fija por hora aun cuando sólo se utilice una fracción de este tiempo. Describe gráficamente y con una ecuación la función para la tarifa que debe pagarse en un estacionamiento que cobra \$10.00 la hora, o fracción, si un auto permanece de una a cinco horas.

Solución:

En general la función del problema es

$$P = f(t)$$

$$P = f(t) = \begin{cases} 10 \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ 20 \text{ si } 1 \leq t < 2 \\ 30 \text{ si } 2 \leq t < 3 \\ 40 \text{ si } 3 \leq t < 4 \\ 50 \text{ si } 4 \leq t < 5 \end{cases}$$



Debemos recordar que en una función ningún elemento del dominio puede tener dos o más valores, por esa razón los intervalos se deben especificar con detalle.

Ejemplo 2: Representa y describe las características de las siguientes funciones.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \quad x < 1 \\ x - 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dominio: $D(f)$ = R; Recorrido: (f) = R

Solución:

Puntos de corte del eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow (0, -1)$

Puntos de corte con el eje X:

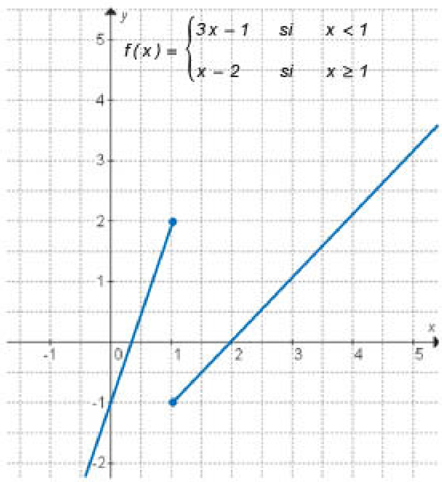
Para $x < 1$:

$y = 0,\ y = 3x - 1 \Rightarrow 0 = 3x - 1 \Rightarrow x = 1/3 < 1$
$\Rightarrow (1/3, 0)$

Para $x \geq 1$:

$y = 0,\ y = x - 2 \Rightarrow 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \geq 1 \Rightarrow$
$(2, 0)$

Gráfica:



Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones: Lee detenidamente las indicaciones de los siguientes ejercicios, realiza las actividades que se te piden, anota las respuestas en orden y con limpieza en tu cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros. Escucha con respeto las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

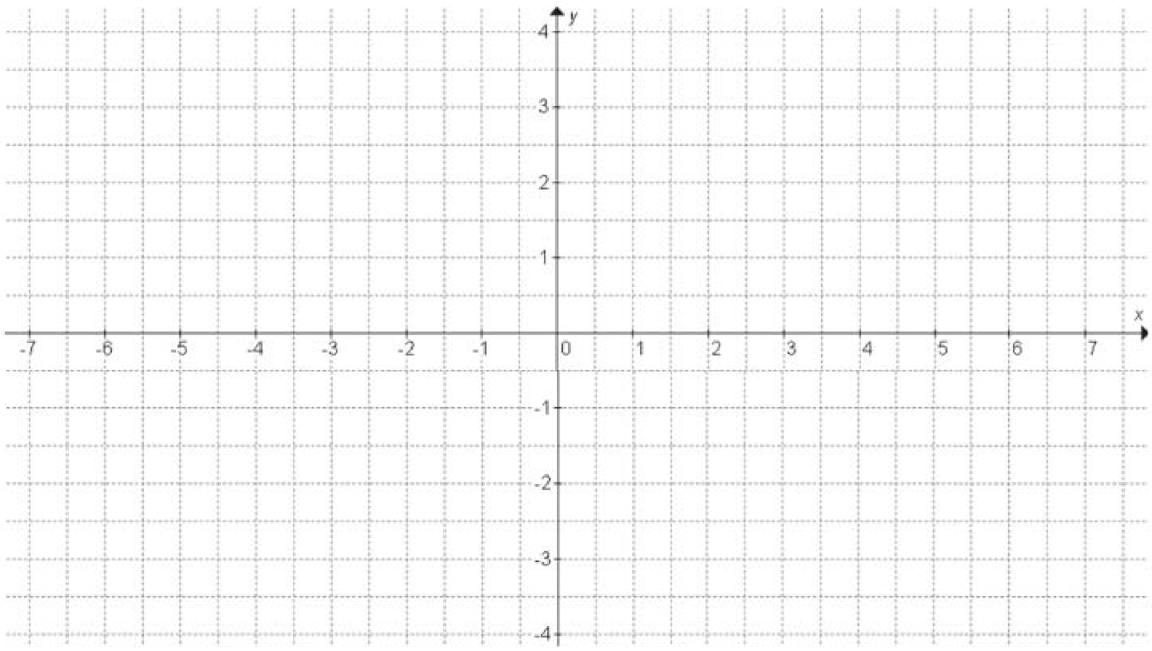
1. El costo del estacionamiento en un centro comercial es de 2.50 pesos cada 15 minutos las primeras dos horas. A partir de la tercera hora el costo es fijo e igual a 15 pesos por hora

a) ¿Cuánto pagarías por estar en el centro comercial 1.5 horas?
b) ¿Cuánto pagarías por estar 2.5 horas?
c) ¿Cuánto pagarías por estar 5 horas?
d) Traza la gráfica, en la cual se refleje lo que pagarías por estar las primeras 5 horas en el estacionamiento.

2. Los importes del envío de paquetes de diferentes pesos en una oficina de correos son.

Peso (g)	Importe ($)
$0 < p \leq 100$	12.50
$100 < p \leq 200$	19.00
$200 < p \leq 300$	25.25
$300 < p \leq 400$	31.50
$400 < p \leq 500$	37.50
$500 < p \leq 600$	43.50
$600 < p \leq 700$	49.35
$700 < p \leq 800$	55.20
$800 < p \leq 900$	61.00
$900 < p \leq 1000$	66.50

a) Traza la gráfica, en la cual se refleje lo que pagarías por enviar un paquete de 3.5 kg.



Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Función valor absoluto

El valor absoluto se representa por el símbolo $|x|$; esto significa que si x es de signo positivo se queda igual, si es negativo se le cambia de signo para que quede positivo, por ejemplo:

$$|-5| = -(-5) = 5, \quad |4| = 4$$

Luego entonces, la función de valor absoluto se define por:

$$f : R \to R, \text{ tal que } f(x) = |x|,\ x \in \mathrm{R}$$

De otra forma se representa por:

$$f = \{(x, y) \mid y = |x|, x \in R\}$$

La anterior es la función valor absoluto.

La representación geométrica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$ es:

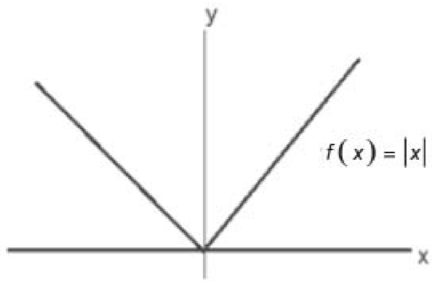


Figura 2.14. Representación geométrica de la función de valor absoluto.

Sus características son:

- Es biyectiva.
- Su dominio D son todos los reales, es decir, $D = \mathbb{R}$.
- Su contradominio C son todos los reales no negativos, es decir, $C = R^{+} \cup \{0\}$.

Función constante

Esta función la puedes observar cuando compras por menudeo, por ejemplo: si compras una camisa, un pantalón o unos zapatos, el precio de estos artículos se mantiene constante, es decir, no cambia, como se muestra en la figura 2.15.

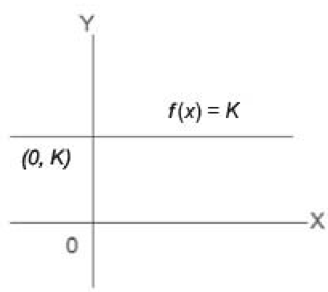


Figura 2.15. Gráfica de una función constante.

Función de identidad

En tu casa, escuela, iglesia y en otros espacios puedes encontrar escaleras, si las miras de costado, verás que algunas cuentan con escalones que tienen la misma medida de ancho y altura. Si colocas sobre los escalones una tabla, vas a observar cómo se puede generar la gráfica que se muestra en la figura 2.16.

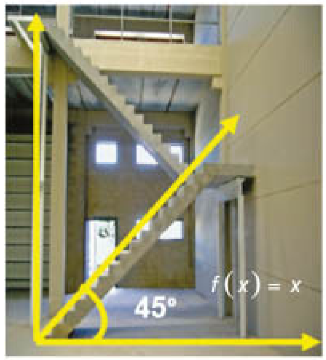


Figura 2.16.

La representación gráfica de la función de identidad, es una recta que pasa por el origen con una inclinación de 45° (figura 2.16).

Propiedades y características de las transformaciones gráficas

Algunas de las *transformaciones de funciones* se conocen como familias de funciones similares, tienen la misma forma, pero posiciones diferentes en una gráfica. Para ejemplificar este concepto de transformaciones gráficas, analizaremos un ejemplo de línea recta.

Familia de rectas

Hemos estudiado que una recta del plano queda determinada por un par de datos o condiciones: dos puntos, un punto y su pendiente, su pendiente y ordenada al origen, etcétera. Si se determina una única condición, entonces un conjunto de rectas, y no necesariamente una sola, la cumplirán. Al conjunto de todas las rectas que satisfacen una única condición se le denomina *familia de rectas* o *haz de rectas*.

Para obtener la ecuación de una familia o haz de rectas, se define la condición y el dato más conveniente para obtenerla representado por un parámetro variable k, perteneciente a los números reales.

Como estudiaremos en cursos posteriores, existen también familias de circunferencias, parábolas, elipses y, en general, de diferentes lugares geométricos.

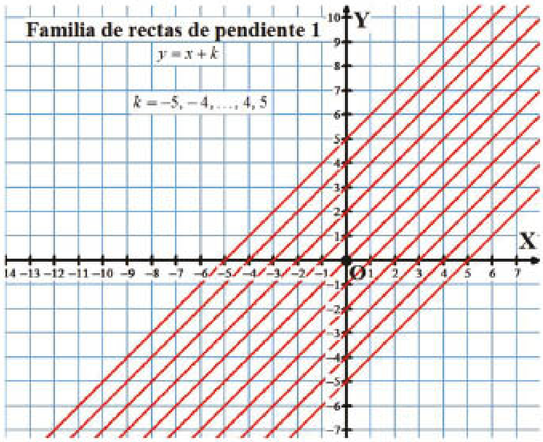
Los siguientes ejemplos explican el procedimiento recomendado para obtener la ecuación de una familia, transformación gráfica o haz de rectas y su construcción gráfica.

Ejemplo: Determina la ecuación de la familia de rectas que pasan por el origen del plano.

Solución:

- *La condición que deben cumplir todas las rectas de la familia es que pasan por el punto (0, 0) sin importar su inclinación.*
- *El haz de rectas debe tener por ecuación $y = x$.*

Dado que las rectas pueden tener cualquier ordenada al origen (valor en el que la recta corta al eje y), hacemos $b = k$ en la ecuación al origen tomando la forma: $y = x + k$.



En la siguientes figuras se muestran las gráficas de 3 funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ y la fórmula de $f(x) = x^2$. ¿Cuáles son las fórmulas de las otras gráficas?

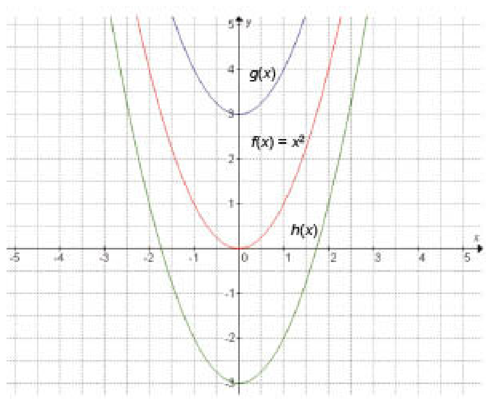


Figura 2.17.

Si analizas la gráfica (figura 2.17) puedes ver que ambas funciones son similares, pero en posiciones diferentes, se interpreta que la gráfica de $f(x)$ tiene su origen en el punto (0, 0), también se observa que $g(x)$ tiene su origen en (0, 3) y $h(x)$ inicia en (0, −2), es decir, están desplazadas 3 unidades hacia arriba y dos unidades hacia abajo.

Para generalizar el concepto anterior, a la hora de graficar una función es muy importante tener en cuenta este tipo de transformaciones.

Los tipos elementales básicos para la transformación de funciones $f(x)$ se resumen en la siguiente tabla.

Tipo de transformación	Fórmula
Traslación horizontal de c unidades a la derecha	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la izquierda	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades hacia abajo	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades hacia arriba	$y = f(x) + c$

Actividad de aprendizaje 3

Instrucciones: Lee detenidamente las indicaciones de los siguientes ejercicios, realiza las actividades que se te piden, anota las respuestas en orden y con limpieza en tu cuaderno.

Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros. Escucha con respeto las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

1. Dada la función $y = x + 2$, realiza el tipo de transformación que se indica.

a) $y = f(x - c)$
b) $y = f(x + c)$
c) $y = f(x) - c$
d) $y = f(x) + c$

2. Representa geométricamente las funciones valor absoluto $f(x) = |x|$.

a) $y = |x - 3|$
b) $y = |x| - 2$

3. Representa geométricamente las funciones denominadas constantes.

a) $y = 3$
b) $y = -2$

3. Representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & si \quad x < 1 \\ 2x - 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & si \quad x < 1 \\ x + 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Cierre del bloque II

Reflexiona sobre lo aprendido

Una vez estudiada la parte principal de este bloque, lo consecuente es que desarrolles las habilidades y actitudes necesarias, para así evidenciar que estás aprendiendo sus criterios, así como las competencias genéricas de la asignatura.

En este punto, y antes de cerrar el bloque, reflexiona acerca del antes y el después de conocer dichas herramientas. Utiliza las siguientes preguntas para ayudarte a dicha reflexión:

- ¿Conozco y empleo las diversas funciones en mis actividades cotidianas?
- ¿Determino e identifico el bosquejo de una gráfica de función escalonada?
- ¿Combino eficientemente las reglas y teoremas para determinar las características de las transformaciones gráficas?
- ¿Bosquejo mentalmente la gráfica de una función especial inversa?

Comparte el producto de tus reflexiones con tu docente y grupo; observa los resultados de tus compañeros y contrasta con los tuyos todos los elementos recopilados.

Autoevaluación

Instrucciones: En tu cuaderno de trabajo realiza la interpretación gráfica de las siguientes funciones y escribe su clasificación. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros.

Función	Clasificación
1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$	....
2. $f(x) = lnx + 1$	....
3. $f(x) = cosx + senx$	....
4. $f(x) = e^{2x+1}$	....

Función	Clasificación
5. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$	....
6. $f(x)=\sqrt{2x+1}$	....
7. $f(x)=\log x-1$	....
8. $f(x)=-2x-1$	....
9. $f(x)=\dfrac{3x\ senx}{x+6}$	....
10. $f(x)=2^{x-1}+x$	....
11. $f(x)=\sqrt{cos^2 x+1}$	....
12. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 \\ ax+b \\ x-a \end{cases}$	....
13. $y=\lvert x\rvert$	....
14. $y=x$	....
15. $4\le x<6$	....
	....

16. $x \leq 5$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

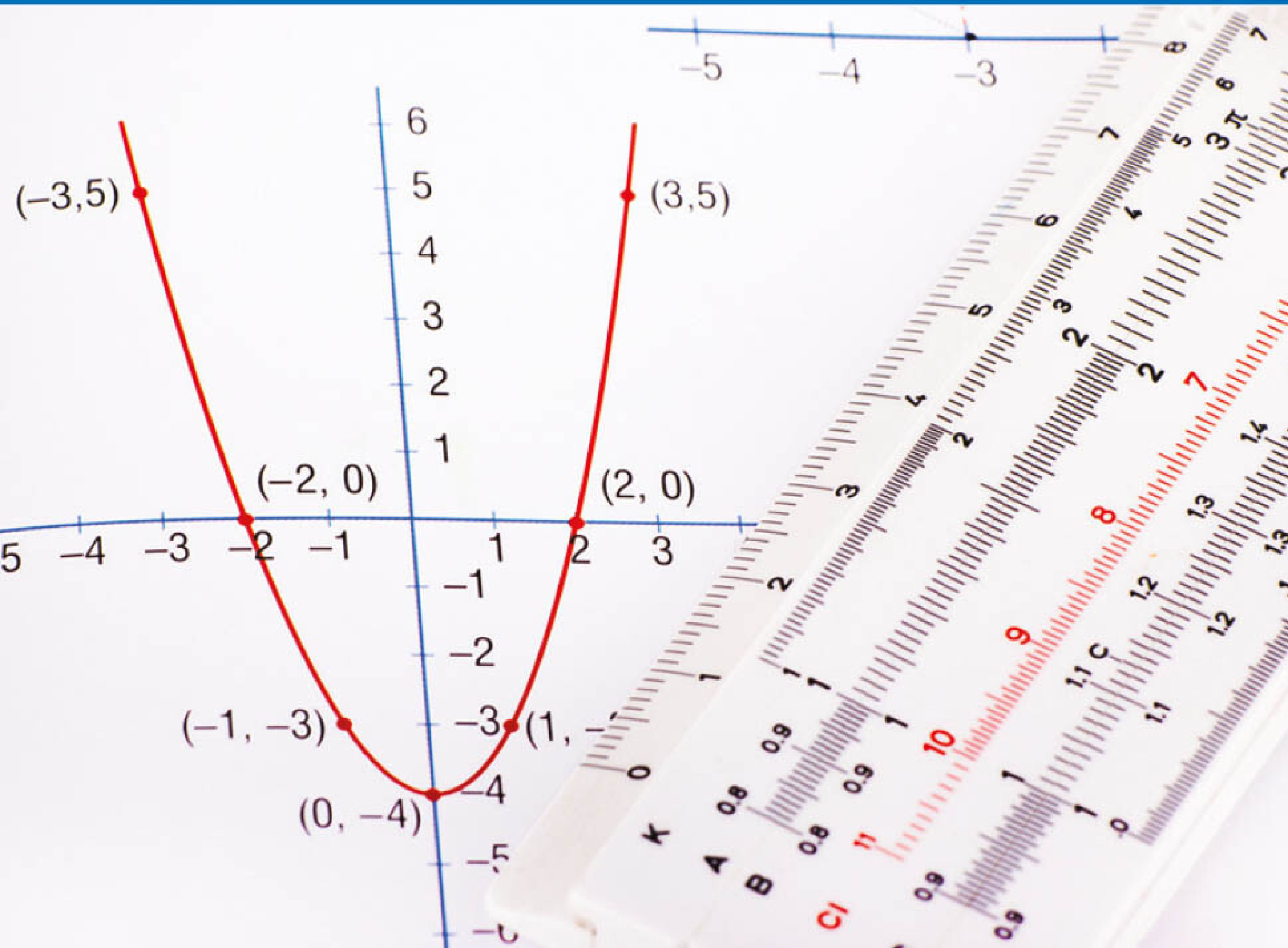
Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior obtuviste de 14 a 16 aciertos considera tu resultado como *excelente*, de 11 a 13 aciertos como *bien,* de 8 a 10 como *regular* y si tus respuestas correctas fueron menos de 8 aciertos considera tu desempeño como *no suficiente*, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Bloque III

Empleas funciones polinomiales de grado cero, uno y dos



Introducción

Una vez concluidas las aplicaciones para las funciones inversas y las transformaciones gráficas, podemos dirigirnos a los siguientes ejes temáticos del curso. En este caso, las funciones polinomiales.

Así como se analizó en el curso Matemáticas I, específicamente en el bloque algebra de polinomios, manejaremos éstos de igual forma; sin embargo, aquí abordaremos las funciones polinómicas, es decir, cada polinomio de una variable puede dar origen a una función polinómica que contenga a esa misma variable. Por ejemplo, el siguiente polinomio de una variable, $3x^2 - 2x + 5$, puede dar origen a una función polinomial (que definiremos de forma general más adelante) de la forma:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \text{ ó } y = 3x^2 - 2x + 5$$

Recuerda también que los polinomios se pueden clasificar por su grado o potencia, así que las funciones polinomiales serán clasificadas por sus grados. Además, cada una de las funciones polinomiales dará origen a diferentes representaciones gráficas. Esto es precisamente lo que abarcará este bloque, a saber, la representación de las funciones polinomiales y sus aplicaciones en diferentes ramas.

En este bloque se identifican las situaciones de un modelo general de las funciones polinomiales de grados cero, uno y dos, empleando los criterios de sus comportamientos gráficos respectivos. Estas funciones son modelos matemáticos que describen muchos fenómenos naturales como la presión atmosférica (grado cero), la distancia recorrida por un móvil a una velocidad constante (grado uno), la distancia recorrida por un móvil cuando tiene aceleración (grado dos); asimismo, ayudan a solucionar problemas de la vida cotidiana en temas financieros o estimar la cantidad de ingredientes a usar para preparar un determinado alimento.

¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque III

Tiempo 10 horas

Contenidos curriculares que se abordan

1. Modelo general de las funciones polinomiales.
2. Representación gráfica de las funciones de grados cero, uno y dos.
    - Comportamiento gráfico de la función polinomial de grado cero.
    - Comportamiento gráfico de la función polinomial de grado uno.
    - Comportamiento gráfico de la función polinomial de grado dos.

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.

Evaluación del aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias

- *Actividad de aprendizaje 1.* Función constante.
- *Actividad de aprendizaje 2.* Función lineal.
- *Actividad de aprendizaje 3.* Función cuadrática.
- *Actividad de aprendizaje 4.* Reto.
- *Autoevaluación.*

Para iniciar, reflexiona

Las funciones polinomiales nos ayudan a resolver problemas en la vida diaria, a pesar de ello, rara vez estamos conscientes de los procesos matemáticos involucrados en lo que realizamos. Reflexionemos acerca de la importancia del diseño de modelos matemáticos para la toma de decisiones. En equipos resuelvan la siguiente situación:

Francisco solicita un empleo de ventas en una compañía de teléfonos celulares en su ciudad. Después de pasar por todo el proceso de selección le informan que será contratado y que venderá sólo un modelo particular de teléfono celular que cuesta es de $1000.00. Cuando se presenta a firmar su contrato le ofrecen tres opciones de planes de sueldo:

Plan A: sueldo base de 6500 pesos mensuales.

Plan B: sueldo base mensual de 2500 pesos más 10% de comisión sobre las ventas del mes.

Plan C: sueldo base mensual de 5500 pesos más 7% de comisión sobre las ventas realizadas en el mes.

Si estuvieras en el lugar de Francisco, ¿qué plan eligirías? ¿Por qué? Escribe en las líneas tus conclusiones.

....

....

....

....

....

Al finalizar el bloque, este problema se retoma para que le des una solución formal como solución de un proyecto.

Aprende más

Modelo general de las funciones polinomiales

Las funciones polinomiales son modelos matemáticos que describen relaciones entre dos variables, como su nombre lo indica, se definen por medio de un polinomio, que, como sabemos, es la expresión de suma o resta de términos algebraicos no semejantes entre sí. La forma general de una función polinomial es:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

En esta expresión n es un número entero no negativo, que se denomina *grado de la función polinomial*.

- Los valores numéricos reales se denominan *coeficientes del polinomio*.
- El coeficiente a_n, un número real diferente de cero ($a_n \neq 0$) que actúa como coeficiente del término de mayor grado, se denomina *coeficiente principal* de la función.
- El coeficiente a_0 se denomina *coeficiente constante*.
- De este modo, $a_n x^n$ es el *término principal* de la función y el término a_0 es el *término constante* o *término independiente* de ésta.

Entonces, la forma general de una función polinomial se puede representar con la expresión siguiente:

$$f(x) = \underbrace{\boxed{\underbrace{a_n}_{\substack{\text{Coeficiente}\\ \text{principal}}} \; x^{\overset{\text{Grado}}{\boxed{n}}}}}_{\substack{\text{Término}\\ \text{principal}}} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + \underbrace{\boxed{a_0}}_{\substack{\text{Coeficiente o}\\ \text{término}\\ \text{constante}}}$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$, tenemos:

Grado del polinomio que define a la función: 2
Coeficientes: $a_2 = 2$, $a_1 = -7$, $a_0 = 5$
Coeficiente principal: $a_2 = 2$
Coeficiente constante: $a_0 = 5$
Término principal: $2x^2$
Término constante o independiente: 5

Representación gráfica de las funciones de grados cero, uno y dos

Los elementos de una función polinomial: grado, coeficientes, coeficiente principal, coeficiente constante, término principal y término constante nos proporcionan información para aproximar su comportamiento gráfico.

Una característica importante de las funciones polinomiales es que se trata de funciones continuas, que intuitivamente se pueden interpretar como funciones cuya gráfica no está rota, lo cual, matemáticamente hablando, quiere decir que están definidas en todos los números reales (su dominio es $\mathbb{R}$).

La gráfica de las funciones polinomiales no tienen cortes y su trazo es de una única línea, como si se dibujara colocando el lápiz sobre el papel y arrastrándolo sin despegarlo de la hoja, como se muestra en las siguientes figuras 3.1 y 3.2.

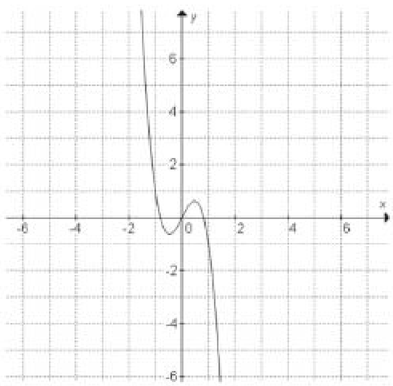


Figura 3.1. Función continua. Las funciones polinomiales son funciones continuas.

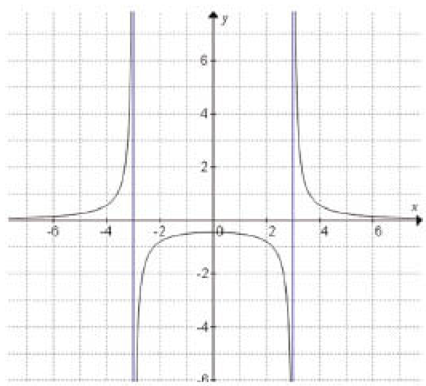


Figura 3.2. Función discontinua. Las funciones discontinuas no son polinomiales.

Los siguientes conceptos de los polinomios de grados cero, uno y dos nos ayudarán a identificar cada uno de los elementos y gráfica de los polinomios objeto de estudio de este bloque.

Comportamiento gráfico de la función polinomial de grado cero

La función constante (grado cero) es la función polinomial más simple. Su expresión general es:

$$f(x) = a_0 x^0 = a_0(1) = a$$

Se sabe que toda cantidad elevada a la potencia cero es uno, es decir $x^0 = 1$.

Dado que a_0 es un número real constante, suele expresarse con la letra c. Así, la expresión de la función constante más común es:

$$f(x) = c$$

Analicemos la expresión anterior. El polinomio que define a esta función tiene a la variable x con exponente cero, de modo que su grado es cero. En la función constante se expresa una relación de correspondencia entre los valores de la variable y el valor c, de modo que, para cada valor de x en el intervalo $(-\infty, \infty)$ el valor obtenido por la función es c.

Las funciones polinomiales describen en un plano cartesiano gráficas dependiendo del grado al que pertenezcan.

A partir de esto, deducimos que todos los puntos de la gráfica de la función constante están definidos por la expresión (x, c) y, consecuentemente, a la misma altura respecto del eje X, dando lugar a una recta horizontal (paralela al eje X), que corta al eje Y a la altura de $y = c$, como gráfica de la función en el plano cartesiano.

Si $c = 0$, la recta es el eje X del plano cartesiano. Entonces, la ecuación del eje X es $f(x) = 0$.

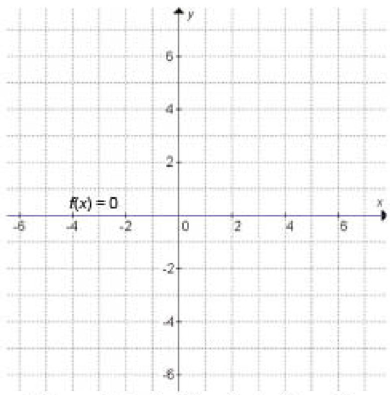


Figura 3.3. Gráfica de la función constante $f(x) = c$.

Si $c = 0$, la función $f(x) = 0$ representa al eje X del plano cartesiano

Recordando que toda función polinomial tiene como dominio a los reales y que el rango es el conjunto de valores que toma la función, podemos afirmar que el dominio de la función constante es el conjunto de los números reales, y que su rango es el conjunto cuyo único elemento es c, es decir:

$$Domf = \mathbb{R} \text{ y } Rangof = \{c\}$$

Por ejemplo, si deseamos trazar la gráfica de la función $f(x) = 3$, tabulamos algunos puntos y luego los unimos.

x	$y = f(x) = 3$	*Punto*
−4	3	$A(-4, 3)$
−2	3	$B(-2, 3)$
	3	$C(0, 3)$
2	3	$D(2, 3)$
4	3	$E(4, 3)$

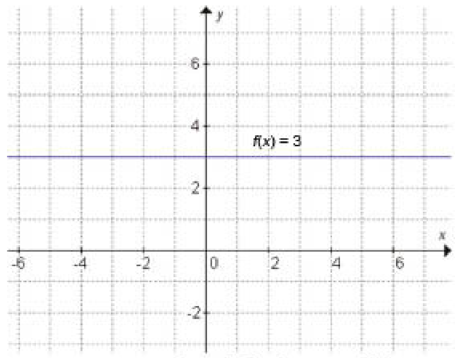


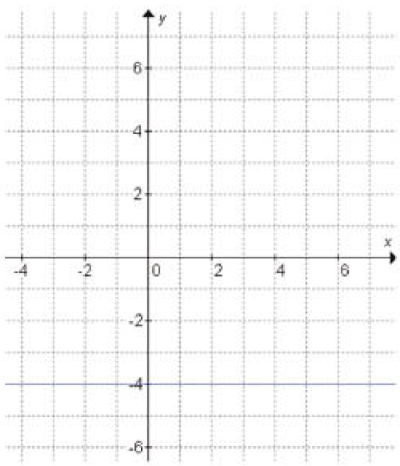
Figura 3.4. Gráfica de la función $f(x) = 3$.

En la gráfica de la función $f(x) = 3$ tenemos que $Dom f = \mathbb{R}$ u $Rango f = \{3\}$

Actividad de aprendizaje 1

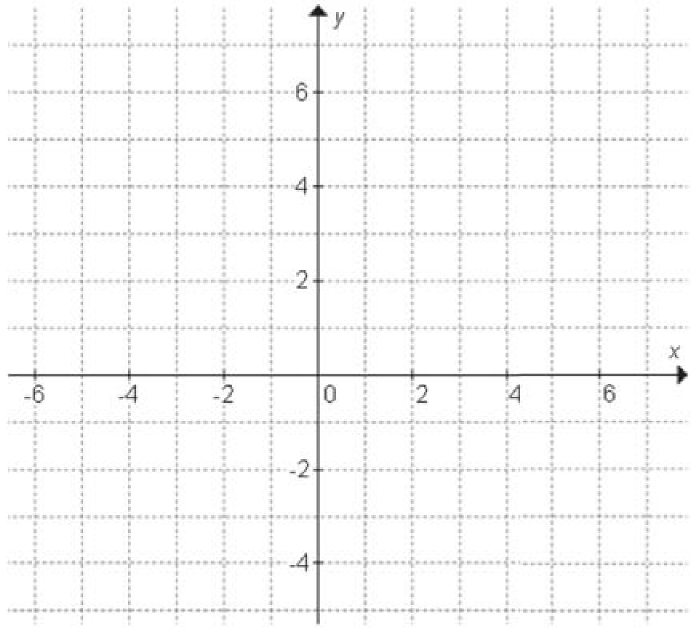
Instrucciones: Lee detenidamente las indicaciones de los siguientes ejercicios, realiza las actividades que se te piden, anota las respuestas en orden y con limpieza en tu cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros. Escucha con respeto las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

1. A partir de la gráfica siguiente, determina la expresión de la función:



Función

$f(x) =$ ....



2. Graficar la función $f(x) = -1.5$

3. Graficar la función $f(x) = 2.5$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Comportamiento gráfico de la función polinomial de grado uno

Es la función de grado impar más simple. Su expresión general es:

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

Otras formas comunes en que se expresa esta función son:

$$f(x) = ax + b \qquad \text{y} \qquad f(x) = mx + b$$

Se denomina función lineal porque su gráfica en el plano cartesiano es una línea recta.

Ejemplo: Graficar la función $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

Solución:

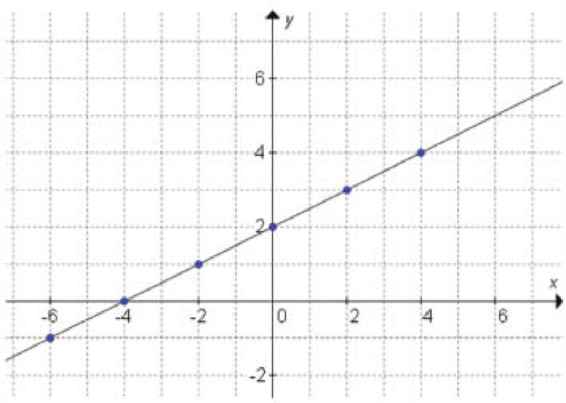
Sabiendo que es una función de grado impar, tenemos que el siguiente análisis es indispensable para conocer e identificar los elementos de la gráfica de la función de primer grado.

1. *El coeficiente principal a_1 = 1/2 es positivo, por lo que la gráfica de esta función va desde menos infinito (−∞), por debajo del eje X, corta al eje X y continúa hasta infinito (+∞) por encima de éste.*
2. *El término constante es a_0 = 2, por lo que la gráfica corta al eje Y en el punto (0, 2).*
3. *Además, sabemos que esta función debe tener un cero o raíz en la solución de la ecuación, por lo que se debe despejar x:*

$$f(x)=\frac{1}{2}x+2$$
$$\frac{1}{2}x+2=0$$
$$(2)\left(\frac{1}{2}x+2\right)=(0)(2)$$
$$x+4=0$$
$$x=0-4$$
$$x=-4$$

La función tiene un cero o raíz en el punto (−4, 0).

x	$y=f(x)=\frac{1}{2}x+2$	Punto
−6	$\frac{1}{2}(-6)+2=-3+2=-1$	A(−6, −1)
−4	0	B(−4, 0)
−2	$\frac{1}{2}(-2)+2=-1+2=1$	C(−2, 1)
0	2	D(0, 2)
2	$\frac{1}{2}(2)+2=1+2=3$	A(2, 3)
4	$\frac{1}{2}(4)+2=2+2=4$	A(4, 4)



Aprende más

Parámetros y características de la función de grado uno. Al trazar la gráfica de una ecuación polinomial $y = mx + b$ de grado uno, se obtiene una recta, en estas gráficas se observa una cierta inclinación, el valor de esa inclinación se determina con el valor de (m) y se llama pendiente de la recta, también se observa en la ecuación el valor de (b) que se llama ordenada al origen y señala el valor en el que la recta corta al eje y.

Por ejemplo, al trazar la gráfica de $y = 3x + 2$ (figura 3.5), se puede identificar el valor de la pendiente ($m = 3$) y el valor de la ordenada al origen ($b = 2$).

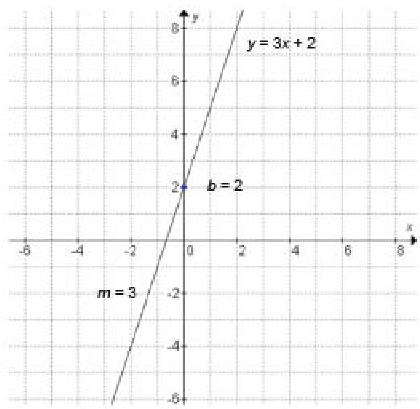


Figura 3.5.

Procedimiento para trazar una función lineal. Los pasos a seguir son:

1. Con el término constante b (ordenada al origen), localizar la intersección con el eje Y, es decir, el punto (0, b).

2. Cambiar la expresión del coeficiente principal m (pendiente) a la forma fraccionaria, es decir, expresar:

$$m = \frac{p}{r}$$

3. Si $m > 0$, mover p unidades hacia arriba y r unidades hacia la derecha (o p unidades hacia abajo y r unidades hacia la izquierda) y trazar el nuevo punto. Si $m = 0$, la recta es horizontal y pasa por (0, b). Ya se puede trazar.

4. Si $m < 0$, mover p unidades hacia abajo y r unidades hacia la derecha (o p unidades hacia arriba y r unidades hacia la izquierda) y trazar el nuevo punto.

5. Con los dos puntos obtenidos (excepto si $m = 0$), trazar la recta.

Ejemplo: Traza la gráfica de la función $f(x) = -1.5x + 2$

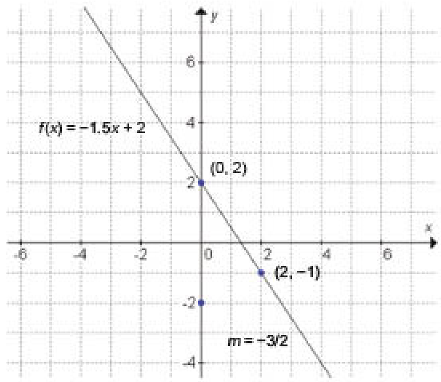
Solución:

La pendiente es:

$$m = -1.5 = -1\frac{5}{10} = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2}$$

Y la ordenada al origen $b = 2$

1. *Trazamos el punto.*
2. *Como $m < 0$, movemos 3 unidades hacia abajo y dos hacia la derecha para obtener un nuevo punto (también se muestra el movimiento de 3 unidades hacia arriba y dos a la izquierda).*
3. *Unimos los puntos y prolongamos la línea.*



Recuerda que sobre el *dominio* se sabe que para todas las funciones polinomiales:

$$Domf = \mathbb{R}$$

Es decir, la gráfica existe (tiene puntos) para valores de x desde $-\infty$ hasta ∞.

El *rango* de la función lineal es el conjunto de todos los números reales, es decir:

$$Rangof = \mathbb{R}$$

Lo anterior significa que la gráfica se extiende verticalmente desde $-\infty$ hasta ∞.

Si en el ejemplo anterior la pendiente es cero ($m = 0$), entonces la función dada es la función constante estudiada antes.

Aprende más

La función lineal como modelo de variación directa. Decimos que en la relación de dos variables hay una variación directa cuando al aumentar el valor de una aumenta el valor de la otra, o bien, cuando al disminuir el valor de una disminuye el valor de la otra. Por ejemplo, la cantidad de libros que se pueden comprar con cierta cantidad de dinero es un caso de variación directa: "a mayor cantidad de libros se requiere mayor cantidad de dinero", o bien, "a menor cantidad de libros corresponde una cantidad menor de dinero".

Para expresar que la variable y varía directamente con respecto a la variable x, se utiliza la expresión: $y \propto x$, que se lee "y es directamente proporcional a x".

Esta expresión puede transformarse en igualdad cambiando el símbolo $\propto$ por la igualdad e introduciendo una constante k, llamada constante de proporcionalidad, que multiplique a la variable x; es decir, $y \propto x$ es lo mismo que $y = kx$, que, como función, es:

$$y = f(x) = kx$$

(la cual, como hemos estudiado, es la función lineal)

Aquí b es la pendiente y $b = 0$. Este modelo permite resolver problemas. Revisemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Se compraron 3 libros y se pagó 150 pesos por ellos. ¿Cuál es el modelo de variación? Usando este modelo, ¿cuánto se pagará por 5 libros?

Solución:

$$k = \frac{y}{x} = \frac{150}{3} = 50 \text{ pesos/libro}$$

El modelo de variación es $f(x) = 50x$, *donde x es la cantidad de libros que se compran.*

Para saber el costo de 5 libros:

$$f(5) = 50(5) = 250 \text{ pesos}$$

Ejemplo 2: Si un automóvil recorre 75 kilómetros en 80 minutos, ¿qué distancia recorrerá en media hora? Resuelve el problema utilizando el modelo de variación directa.

Solución:

$$k=\frac{y}{x}=\frac{75}{80}=\frac{15}{16}\ km/min$$

$$f(x)=\frac{15}{16}x \text{ donde } x \text{ es el tiempo del recorrido en minutos.}$$

$$x=\frac{1}{2}\text{ hora}=30\text{ minutos, por lo que } f(30)=\frac{15}{16}(30)=28.125\text{ kilómetros}$$

Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones: Lee los siguientes ejercicios para encontrar las soluciones de cada uno de ellos, realizando las anotaciones necesarias en tu cuaderno con orden y limpieza. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase, escucha y respeta las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

Resuelve los siguientes problemas:

1. Determina la ecuación de la recta horizontal que pase por el punto $P_1(-7.5, 2)$.
2. Halla la ecuación de la recta vertical que pase por el punto $P_1\left(\frac{5}{4}, -\frac{7}{2}\right)$.
3. Halla la gráfica de la ecuación $2x + y - 6 = 0$.
4. Halla la ecuación de la recta que pase por el punto $(5, -3)$ y cuyo ángulo de inclinación sea igual a 315°.
5. Halla la ecuación de la recta cuyos extremos sean los puntos $(-5, -6)$ y $(7, 0)$.

6. Halla la pendiente, el ángulo de inclinación y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación sea $5x - 3y - 15 = 0$

7. Se compraron 6 libros y se pagó 300 pesos por ellos. ¿Cuál es el modelo de variación? Usando este modelo, ¿cuánto se pagará por 25 libros?

8. Si un automóvil recorre 115 kilómetros en 80 minutos, ¿qué distancia recorrerá en media hora?

9. Se compraron 5 conejos y se pagó 1500 pesos por ellos. ¿Cuál es el modelo de variación? Usando este modelo, ¿cuánto se pagará por 15 conejos?

10. Si un automóvil recorre 75 kilómetros con 15 litros de gasolina, ¿qué distancia recorrerá con 30 litros?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Comportamiento gráfico de la función polinomial de grado dos

Su expresión general es $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ que suele expresarse como:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0$$

(al graficar esta función se describe una parábola)

Como cualquier función polinomial, su dominio es el conjunto de todos los números reales: $Domf = \mathbb{R}$

El análisis de los términos de una función cuadrática $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ es:

- La constante *a* o coeficiente cuadrático indica qué tan ancha o estrecha esta la parábola.
- Si $a < 1$ (*a* menor que 1) la parábola es muy ancha.

- Si $a > 1$ (a mayor que 1) la parábola es muy estrecha.
- El coeficiente b o término lineal indica el desplazamiento de la parábola a la derecha si b es negativo y a la izquierda si b es positivo.
- La parábola corta al eje Y en el punto $(0, c)$.
- Si $a > 0$, (a positiva), la gráfica es la de una parábola que abre hacia arriba, es decir, empieza arriba del eje X y termina arriba de él en un desplazamiento horizontal de izquierda a derecha (figura 3.6).
- Si $a < 0$, (a negativa), la gráfica es la de una parábola que abre hacia abajo, es decir, empieza abajo del eje X y termina abajo de él en un desplazamiento horizontal de izquierda a derecha (figura 3.7).

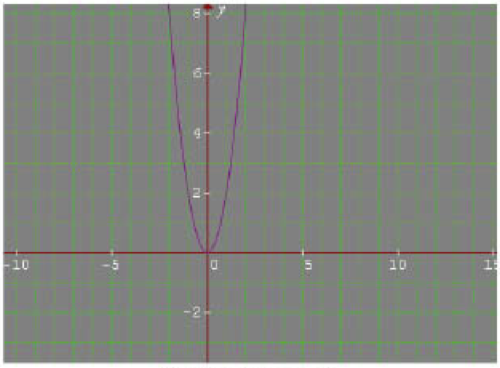


Figura 3.6. a > 0.

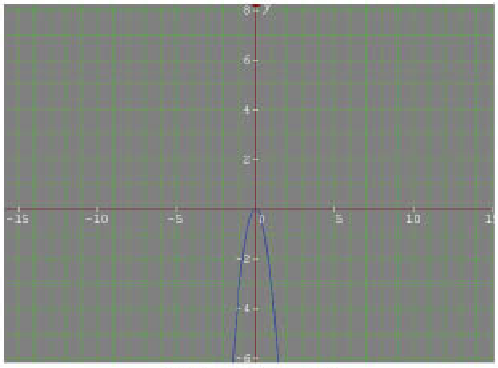


Figura 3.7. a < 0.

De modo que el rango de la función cuadrática depende del coeficiente principal:
Para determinar los ceros de la función cuadrática es necesario resolver la ecuación:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Esta ecuación puede resolverse usando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión dentro de la raíz cuadrada: $b^2 - 4ac$ se denomina *discriminante* de la ecuación porque su valor determina si las raíces son reales o complejas.

- Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son complejas y significa que la gráfica no corta al eje X, por lo que en este caso concluimos que la función cuadrática no tiene ceros (intersecciones con el eje X) como se muestra en las figuras 3.8 y 3.9.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una raíz real y significa que la gráfica corta al eje X en un único punto, el vértice de la parábola; por lo tanto, la función sólo tiene un cero en $x = -b/2a$, o bien, en el vértice $(-b/2a, 0)$ de acuerdo con la figura 3.10.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, las dos raíces son reales y significa que la gráfica corta al eje X en dos puntos (figura 3.11), esto es, la función cuadrática tiene dos ceros (intersecciones con el eje X) en:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, \text{ donde } d = b^2 - 4ac, \text{ que representa al punto } (x_1, 0)$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, \text{ donde } d = b^2 - 4ac, \text{ que representa al punto } (x_2, 0)$$

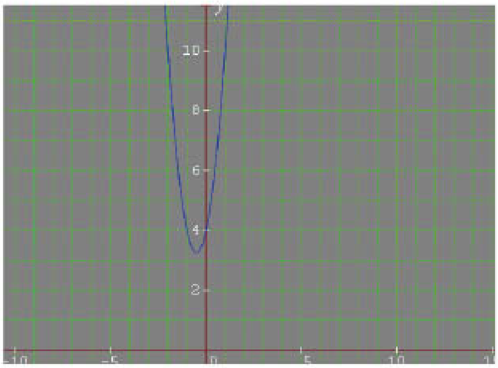


Figura 3.8.

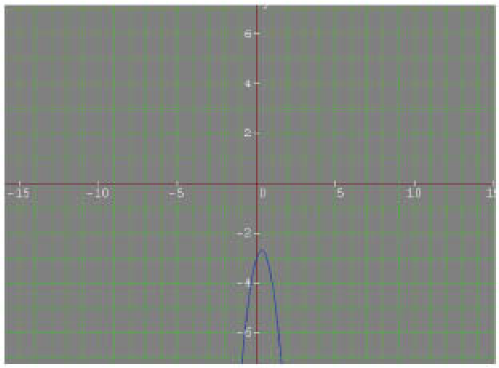


Figura 3.9.

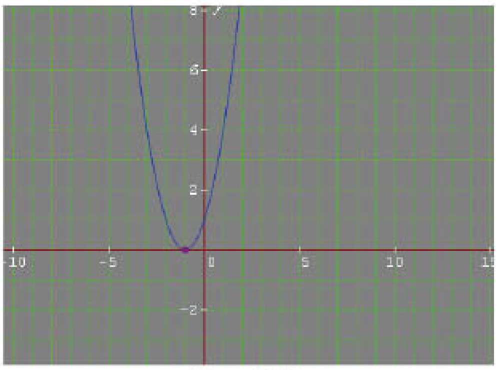


Figura 3.10.

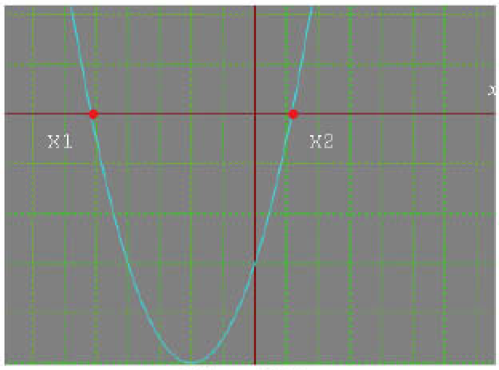


Figura 3.11.

Para determinar el vértice en este último caso, se debe considerar que la parábola es una gráfica simétrica, es decir, la altura de un punto a *r* unidades a la izquierda del vértice es la misma para el punto a *r* unidades a la derecha del vértice.

Entonces, considerando las intersecciones con el eje X, podemos afirmar que la coordenada *x* del vértice es el punto medio del segmento que une las intersecciones con el eje X, es decir:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por lo tanto:

$$x_v=\frac{\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}}{2}=\frac{\frac{-b-\cancel{\sqrt{d}}+\left(-b+\cancel{\sqrt{d}}\right)}{2a}}{\frac{2}{1}}=\frac{-b-b}{4a}=-\frac{2b}{4a}$$

$$x_v=-\frac{b}{2a}$$

Ahora calculemos la coordenada *y* del vértice:

$$y_v=f(x_v)$$
$$y_v=a(x_v)^2+b(x_v)+c$$
$$y_v=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c$$
$$y_v=\frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2}=\frac{4a^2c-ab^2}{4a^2}=\frac{\cancel{a}\left(4ac-b^2\right)}{4a^{\cancel{2}}}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$y_v=-\frac{d}{4a}$, donde $d=b^2-4ac$, que es el discriminante de la ecuación cuadrática.

Finalmente, el vértice está determinado por el punto:

$$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a}\right),\text{ donde } d=b^2-4ac$$

- El rango de la función cuadrática, como se explicó antes, depende del valor del coeficiente principal de la siguiente manera:

Si $a<0$, la parábola abre hacia abajo, de modo que el vértice es el punto máximo de la gráfica. Entonces:

$$Rango f=\left(-\infty,-\frac{d}{4a}\right],\text{ donde } d=b^2-4ac$$

Si $a>0$, la parábola abre hacia arriba, de modo que el vértice es el punto mínimo de la gráfica. Entonces:

$$Rango f=\left[-\frac{d}{4a},\infty\right),\text{ donde } d=b^2-4ac$$

En general, el comportamiento de una función polinomial puede entenderse mediante el análisis de sus parámetros, en especial de su coeficiente principal a_n y de su término independiente a_0.

Los siguientes ejemplos muestran la utilidad de este análisis de la función cuadrática.

Ejemplo 1: Explica el comportamiento de la función $f(x)=\frac{x^2}{8}-2$ y traza la gráfica.

Solución:

En esta función:

$$a=\frac{1}{8},\quad b=0,\quad c=-2$$

La gráfica pasa por el eje Y en el punto (0, −2). Dado que a > 0, la gráfica empieza por arriba del eje X y termina por arriba del eje X.

$d=b^2-4ac$

$d=(0)^2-4\left(\frac{1}{8}\right)(-2)=0-\left(-\frac{8}{8}\right)=1$

Intersecciones con el eje X:

$\frac{1}{8}x^2-2=0,\ \frac{1}{8}x^2=2,\ x^2=16,\ x=\sqrt{16},\ x=\pm 4$

La gráfica corta al eje X en (−4, 0) y (4, 0).

V(0, −4) (punto mínimo)

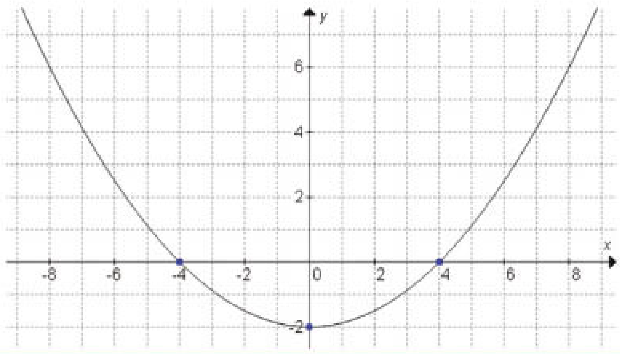
$x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\left(\frac{1}{8}\right)}=0$

$y_v=-\frac{d}{4a}=-\frac{1}{4\left(\frac{1}{8}\right)}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$

$Domf=\mathbb{R}$

$Rangof=[-2,\infty)$

Gráfica:



Ejemplo 2: Explica el comportamiento de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 2$ y traza la gráfica.

Solución:

En esta función:

$$a = -2, \quad b = 8, \quad c = -2$$

La gráfica pasa por el eje Y en el punto (0, −2)

Dado que a < 0, la gráfica empieza por abajo del eje X y termina por abajo del eje X.

$d = b^2 - 4ac$

$d = (8)^2 - 4(-2)(-2) = 64 - 16 = 48$

Intersecciones con el eje X:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{48}}{2(-2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}\sqrt{3}}{-4} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{3}}{-4}$$

$$= \frac{-4\left(2 \mp \sqrt{3}\right)}{-4} = 2 \pm \sqrt{3}$$

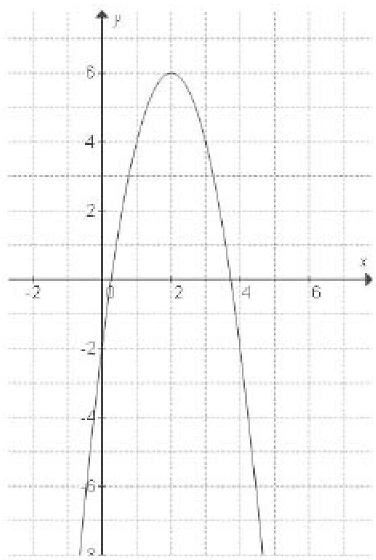
La gráfica corta al eje X en $\left(2-\sqrt{3}, 0\right)$ *y* $\left(2+\sqrt{3}, 0\right)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-2)} = -\frac{8}{-4} = 2$$

$$y_v = -\frac{d}{4a} = -\frac{48}{4(-2)} = -\frac{48}{-8} = 6$$

V(2, 6) (punto mínimo)

$Domf = \mathbb{R} \quad Rangof = (-\infty, 6]$



Ejemplo 3: Analiza la función $f(x) = 3x^2 + 30x + 76$ y traza su gráfica.

Solución:

En esta función:

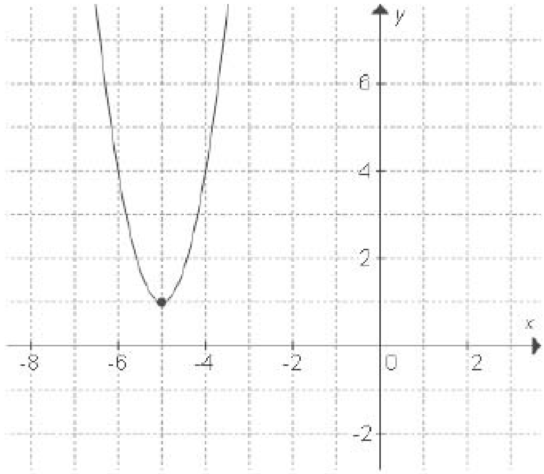
$$a = 3, \quad b = 30, \quad c = 76$$

La gráfica pasa por el eje Y en el punto (0, 76)

Dado que a > 0, la gráfica empieza por abajo del eje X y termina por abajo del eje X.

$d = b^2 - 4ac$

$d = (30)^2 - 4(3)(76) = 900 - 912 = -12$



Dado que d < 0, la gráfica no tiene intersecciones con el eje X:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2(3)} = -\frac{30}{6} = -5$$

$$y_v = -\frac{d}{4a} = -\frac{-12}{4(3)} = \frac{12}{12} = 1$$

V(−5, 1) (punto mínimo)

$Domf = \mathbb{R} \quad Rangof = [1, \infty)$

Ejemplo 4: Una parábola tiene como vértice el punto (−3, 1) y pasa por el punto (1, −9). Encuentra la función cuadrática de esta parábola y traza su gráfica.

Solución:

Podemos ver que la parábola tiene como punto máximo al vértice a < 0, de modo que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

El punto (1, −9) debe cumplir la función porque es punto de la parábola:

$$\begin{aligned} -9 &= a(1)^2 + b(1) + c \\ a + b + c &= -9 \\ c &= -a - b - 9 \end{aligned}$$

El vértice (3, −1) también es punto de la parábola, por lo que:

$$\begin{aligned} -1 &= a(3)^2 + b(3) + c \\ 9a + 3b + c &= -1 \\ c &= -9a - 3b - 1 \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\begin{aligned} -a - b - 9 &= -9a - 3b - 1 \\ 9a - a + 3b - b &= 9 - 1 \\ 8a + 2b &= 8 \end{aligned}$$

Continúa...

$$2(4a+b)=8$$
$$4a+b=4$$

Además, para el vértice tenemos que:

$x_v = -\dfrac{b}{2a}$

$3 = -\dfrac{b}{2a}, \quad 6a = -b, \quad b = -6a$

Por lo tanto:

$4a - 6a = 4$

$-2a = 4, \quad a = \dfrac{4}{-2}, \quad a = -2$

De donde:

$b = -6(-2)$

$b = 12$

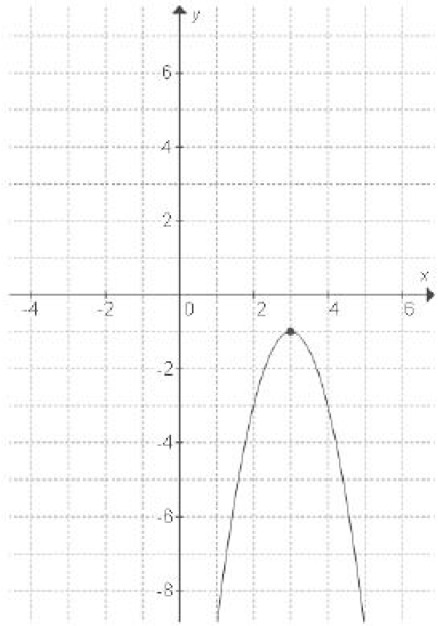
$c = -a - b - 9$

$c = -(-2) - 12 - 9$

$c = 2 - 21$

$c = -19$

Finalmente, $f(x) = -2x^2 + 12x - 19$



Ejemplo 5: Un túnel de una carretera tiene forma de arco parabólico. Su altura es de 8 metros y su anchura, a nivel de suelo, es de 4 metros. ¿Qué altura máxima debe tener un camión de 2.5 metros de ancho para poder pasar por el túnel? Si la mayoría de los camiones de carga que circulan en las carreteras de México tienen, por norma oficial, 2.5 metros de ancho por 4 metros de altura, ¿es adecuado el diseño del túnel para una carretera mexicana?

Solución:

La función para el túnel es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a(0)^2 + b(0) + c = 8$

$c = 8$

Además, el punto (2,0) también pertenece a la parábola, por lo que:

$$0 = a(2)^2 + b(2) + 8$$
$$4a + 2b + 8 = 0$$
$$2(2a + b + 4) = 0$$
$$2a + b + 4 = 0$$

Sustituyendo las coordenadas del vértice, tenemos:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$
$$0 = -\frac{b}{2a}$$
$$0(2a) = -b$$
$$-b = 0$$
$$b = 0$$

$$2a + 0 + 4 = 0$$
$$2a + 4 = 0$$
$$2a = -4$$
$$a = -\frac{4}{2}$$
$$a = -2$$

La función del túnel es:

$$f(x) = -2x^2 + 8$$

Ahora calculemos la altura del camión que pueda pasar por el túnel:

$$h = f(1.25) = -2(1.25)^2 + 8 = 4.875$$
$$h = 4.875\ m$$

Dado que la altura de los camiones es de 4 m, menor a 4.875 m, el diseño del túnel es adecuado.

Actividad de aprendizaje 3

Instrucciones: Lee detenidamente las indicaciones de los siguientes ejercicios, realiza las actividades que se te piden, anota las respuestas en orden y con limpieza en tu cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros. Escucha con respeto las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

1. Analizar y graficar las funciones:

a) $y = -0.5x^2 - 3x + 1$

b) $y = 2x^2 + 4x + 3$

c) $y = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{9}{4}$

2. Explica el comportamiento de la siguiente función y traza la gráfica:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

3. Encuentra la función de la parábola con intersección con el eje Y en el punto (0, −4), que pasa por los puntos (−2, 6) y (1, −12).

4. Determina el área máxima del terreno rectangular que se puede cercar con 60 metros de reja.

5. Se lanza verticalmente una piedra con una velocidad inicial de 60 m/s. La altura que alcanza la piedra en t segundos está dada por la función:

$$h(t) = 60t - 4.9t^2$$

¿Cuánto tiempo le tomará a la piedra alcanzar la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

6. Los costos de producción de x unidades de un producto están dados por la función:

$$c(x) = 3x^2 - 535x + 1030 \text{ pesos}$$

Si el precio por unidad es de 347 pesos, ¿cuál es la función para la utilidad si se venden todas las unidades producidas? ¿Con cuántas unidades se obtiene la máxima utilidad?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad de aprendizaje 4

El reto consiste en buscar y encontrar las condiciones más favorables para que Francisco elija el plan de salario más lucrativo para él. Para lograr esta meta, te sugerimos contestar las siguientes preguntas: ¿Qué plan le conviene elegir? ¿Bajo qué circunstancias es mejor el plan C que los otros dos? ¿Es el plan B mejor que los otros dos? ¿En qué circunstancias? ¿De qué depende que una opción sea mejor que otra?

El proyecto se circunscribe al caso en que Francisco venderá únicamente teléfonos celulares de 1000 pesos cada uno. Sabemos que en la realidad, un vendedor ofrece una línea de varios productos; sin embargo, con la intención de simplificar el proceso es necesario delimitarlo de esta manera.

Es importante que se empleen ecuaciones y sistemas de ecuaciones en la búsqueda de la mejor alternativa para Francisco.

Delimitando el reto: elección de la mejor alternativa

¿Cuál es el problema de contexto que se desea resolver?
¿En qué situaciones de tu comunidad puede ser útil este conocimiento?
¿Qué beneficios tiene para tu comunidad la resolución de dicho problema?
¿Es importante para tu vida este conocimiento? ¿Por qué?

Planeación de actividades

Organizados en equipos, de acuerdo con las indicaciones del docente facilitador, realicen el proyecto. Es muy importante que en los equipos se deleguen responsabilidades entre los integrantes, que elaboren un plan de trabajo y un código ético que deberán cumplir con responsabilidad y respeto por el trabajo de sus compañeros, de modo que logren realizar cabalmente las siguientes actividades:

1. Elijan el material necesario para el trabajo, por ejemplo: cartulina, plumones, juego geométrico, software de computadora, calculadora, etcétera. Asimismo, decidan la escala adecuada para representar los datos y las ecuaciones, así como el uso de colores o materiales para distinguir los diferentes planes.

2. En un mismo plano cartesiano dibujen los puntos correspondientes al salario de Francisco cuando vende 1, 2, 3,…, 15 unidades al mes, para cada una de las opciones disponibles.

3. Con base en la gráfica obtenida, discutan acerca del mejor plan de pago para Francisco, justificando, por escrito, sus argumentos y las condiciones para validarlas.

4. Elaboren las ecuaciones de cada plan y grafíquenlas en un nuevo plano cartesiano. Es necesario que los procedimientos completos empleados para obtenerlas sean escritos en un documento donde, además, se incluirán los elementos del lugar geométrico considerados, por ejemplo, pendientes, intersecciones, etcétera.

5. Transformen las ecuaciones obtenidas para presentarlas en todas las formas estudiadas en esta unidad. Los procedimientos realizados deberán agregarse al documento de la actividad anterior.

6. Para encontrar la respuesta al problema de Francisco, es útil la determinación de los puntos de intersección entre las gráficas de cada plan de sueldo que deben calcularse mediante el uso de sistemas de ecuaciones y anoten sus conclusiones.

7. Redacten una conclusión acerca de su trabajo y formulen una respuesta al problema, de modo que Francisco pueda elegir el mejor plan de sueldo.

8. Todos los integrantes del equipo deberán coevaluar a sus compañeros mediante argumentos que justifiquen una nota final.

9. Deben entregar al docente facilitador el portafolio de evidencias, que contiene todos los productos de las actividades anteriores.

10. En la fecha asignada por el docente facilitador, todos los equipos presentarán sus conclusiones y resultados en plenaria. Al final, el docente facilitador retroalimentará al grupo y realizará la evaluación del periodo.

Reflexiona: ¿Qué información teórica necesitas para afrontar este reto?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Cierre del bloque III

Reflexiona sobre lo aprendido

Cabe señalar que cada modelación de problemas con variables presentes en este bloque, tiene una forma diferente de llegar a su solución; por ello se recomienda:

- Leer con cuidado el problema y entenderlo.
- Dibujar una diagrama si es pertinente.
- Determinar las cantidades desconocidas y conocidas.
- Emplear variables para representar cantidades desconocidas.

Como recordarás, al inicio del bloque se propuso la elaboración de un proyecto que consistía en obtener los modelos lineales de situaciones comunes de una solicitud de empleo y las opciones de salario. El proyecto deberá cumplir con las especificaciones que se piden de entrega.

Ha llegado la hora de entregar tu carpeta con los respectivos trabajos y hojas de operaciones, el profesor les pedirá que realicen algunos cálculos con base en sus modelos lineales.

Autoevaluación

Instrucciones: Lee los siguientes ejercicios para encontrar las soluciones, realiza las anotaciones necesarias en tu cuaderno con orden y limpieza. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase, escucha y respeta las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

Resuelve los siguientes problemas:

1. Traza la gráfica de la función $f(x) = -2x - 3$
2. Una casa que se compró hace 5 años cuesta 700 000 pesos. Si dentro de 3 años su precio será de 1 millón de pesos, ¿cuál es el modelo de variación del precio de esa casa en el tiempo? ¿Cuánto costó hace 5 años?
3. Una recta tiene los puntos (2, 9) y (7, 24). Encuentra la función de la recta y, usando esta función, calcula la altura del punto cuya abscisa es 10.
4. Un submarino sumergido a 10 metros soporta una presión de 98 pascales. Si el

submarino se sumerge 6 metros, la presión soportada es de 157 pascales. ¿Cuál es el modelo de variación lineal de la presión con respecto a la profundidad del submarino? Usando el modelo obtenido, calcula la presión a 200 metros de profundidad.

5. Un automóvil recorrió 45 kilómetros con 5 litros de gasolina y 80 kilómetros con 9 litros. Determina el modelo lineal del rendimiento del automóvil. ¿Qué distancia recorre el automóvil con 20 litros de gasolina?

6. Explica el comportamiento de la función $f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$ y traza la gráfica.

7. Encuentra la función de la parábola con intersección con el eje Y en el punto (0, −4), que pasa por los puntos (−2, −2) y (1, −12).

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

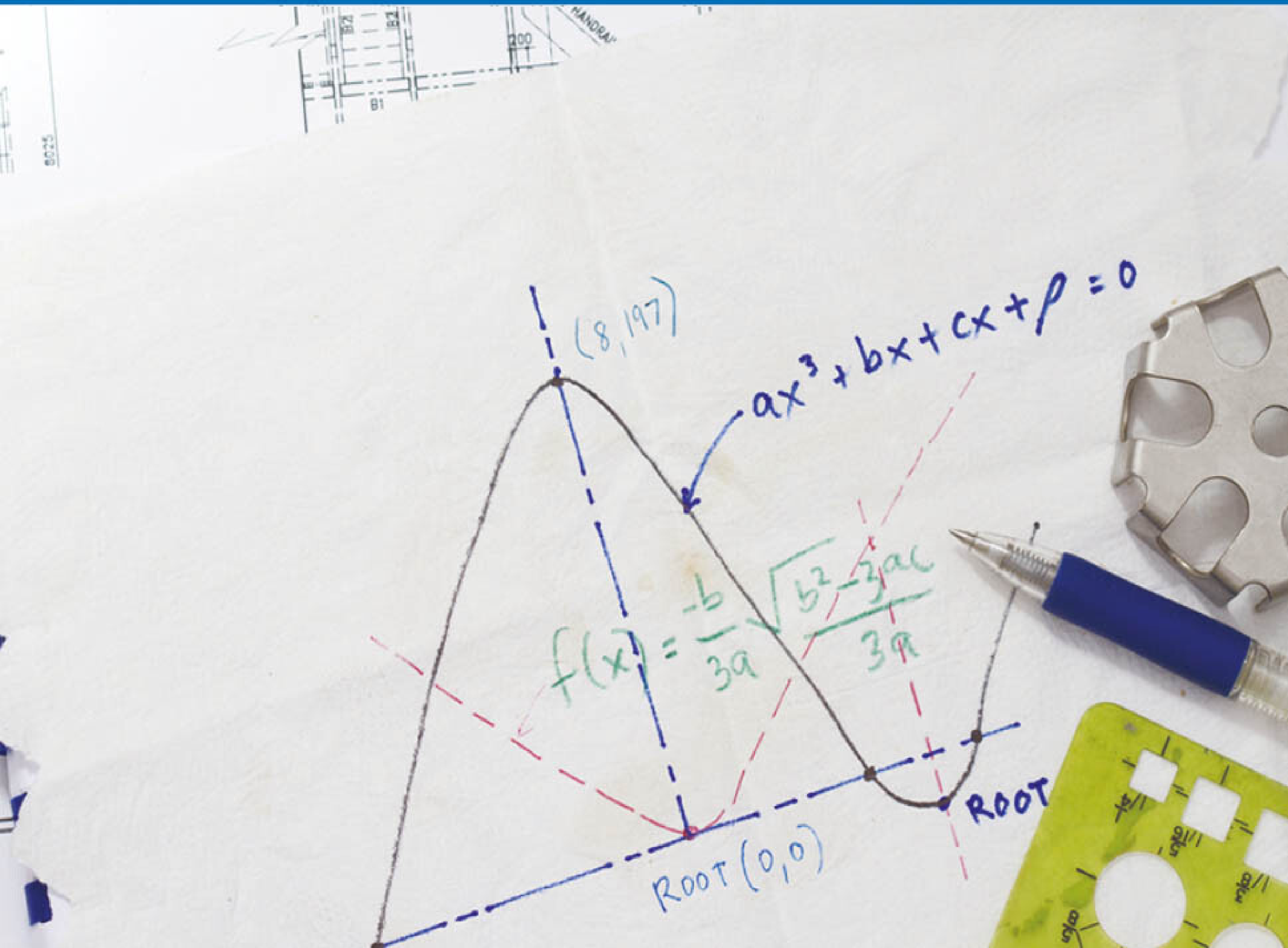
Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior obtuviste 6 a 7 aciertos considera tu resultado como *excelente*, de 4 a 5 aciertos como *bien,* 3 aciertos *regular* y si tus respuestas correctas fueron menos de 3 considera tu desempeño como *no suficiente*, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Bloque IV

Utilizas funciones polinomiales de grado tres y cuatro



Introducción

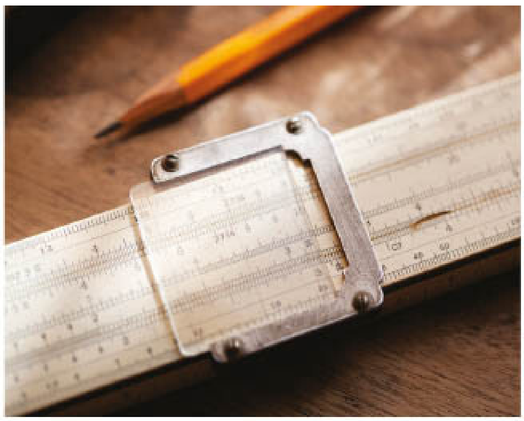
En el boque anterior estudiamos las características de las funciones polinomiales de grado cero, uno y dos. Además analizamos algunas de las aplicaciones de dichas funciones en la representación de situaciones reales, con el propósito de transformarlas e incluso resolverlas.

En el presente bloque ampliaremos el estudio de las funciones polinomiales, analizando las características, parámetros, comportamiento gráfico y aplicaciones de las que corresponden a grado tres y cuatro.

Además, se presenta una estrategia aplicable a funciones polinomiales factorizables, que puede emplearse para bosquejar la gráfica de dichas funciones.

Como observarás a lo largo de este bloque, la factorización es una de las herramientas más fáciles de utilizar en el estudio de las funciones polinomiales de cualquier grado, incluso aplicaremos las técnicas descritas en el presente bloque en aquellos polinomios analizados en el bloque anterior.

Si bien se pretende que apliques polinomios de grados tres y cuatro en la solución de problemas reales, observarás que las aplicaciones tienen que ver con elementos específicos y avanzados; sin embargo, se muestra alguna aplicación para el conocimiento general.



¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque IV

Tiempo 10 horas

Contenidos curriculares que se abordan

1. Modelo matemático de las funciones polinomiales de grado tres y cuatro.
   - Propiedades geométricas de la función polinomial de grado tres.
   - Propiedades geométricas de la función polinomial de grado cuatro.
2. Métodos de solución de las ecuaciones factorizables asociadas a una función polinomial de grado tres y cuatro.
3. Comportamiento de la gráfica de una función polinomial en función de los valores que toman sus parámetros.

Evaluación del aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias

- *Actividad de aprendizaje 1.* Funciones polinomiales de grado tres y cuatro.
- *Actividad de aprendizaje 2.* Ecuaciones asociadas a funciones polinomiales de grado tres y cuatro.
- *Actividad de aprendizaje 3.* Comportamiento de la gráfica de una función polinomial de grado *tres y cuatro.*
- *Autoevaluación.*

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.

Para iniciar, reflexiona

En el negocio de la familia Pérez, se necesitan cajas sin tapa para transportar sus productos confeccionados. Se cuenta con cartones rectangulares de 50 x 60 cm, ¿cuál puede ser el máximo volumen de las cajas que necesita la familia Pérez?

Figura 4.1.

Inicio de la secuencia:

1. Realiza un dibujo que represente el cartón rectangular y escribe las dimensiones en cada lado.

2. Realiza un dibujo indicando los cuadrados de área x^2, que deberán ser recortados en cada esquina del cartón y escribe las dimensiones de cada elemento después de recortar los cuadrados.

3. Realiza el dibujo de la caja e indica las dimensiones de cada uno de sus elementos.

4. Escribe la fórmula para calcular el volumen de la caja formada en función de la longitud del lado x de cada cuadrado cortado en cada una de las esquinas.

5. ¿Cuántas variables hay en este problema?

6. ¿Indica cuáles son y cuál de ellas depende de la otra?

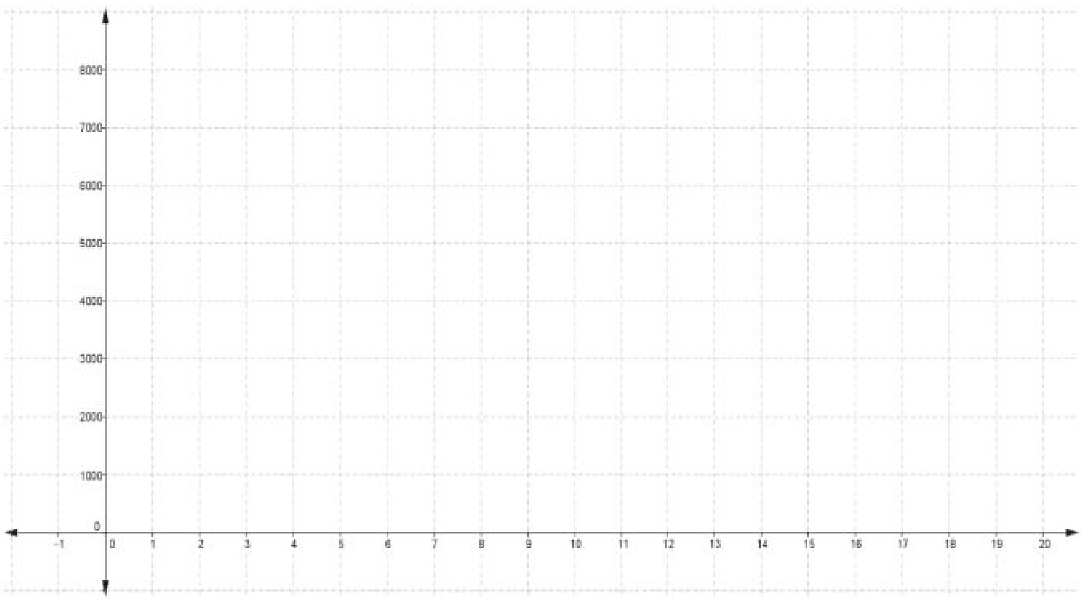
7. Escribe la fórmula del volumen de la caja como una función polinomial.

8. De acuerdo con las condiciones del problema indica el intervalo de valores que puede tomar la longitud x del lado de cada uno de los cuadrados recortados al cartón.

9. Completa la siguiente tabla, calculando los volúmenes correspondientes para los valores de x señalados.

X lado del cuadrado	$V(x)$ volumen
0.5	
1	
3	
6	
10	
11	
13	
15	
18	
19.5	
20	

10. Completa la siguiente tabla, calculando los volúmenes correspondientes para los valores de x señalados.



11. Une los puntos graficados con una línea suave.

12. Para qué valor de x, el volumen de la caja será 5000 cm^3.

Aprende más

Modelo matemático de las funciones polinomiales de grado tres y cuatro

En primera instancia, una función polinomial debe su grado al que corresponde al polinomio incluido en su regla de correspondencia. Los polinomios a estudiar en la presente sección son aquellos que contienen expresiones de grado tres como:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ con } a, b, c, d \in R \text{ y } a \neq 0$$

Y los que corresponden al grado cuatro:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ con } a, b, c, d \in R \text{ y } a \neq 0$$

Cabe señalar que si alguno de los coeficientes del polinomio es igual a cero, se considera un polinomio incompleto; sin embargo, se mantienen las mismas propiedades y los elementos que los correspondientes a un polinomio completo. Enunciemos las propiedades fundamentales de las funciones polinomiales.

- El dominio de las funciones polinomiales es todo el conjunto de los números reales.

- Las funciones polinomiales son continuas, es decir, sus gráficas no presentan interrupciones.

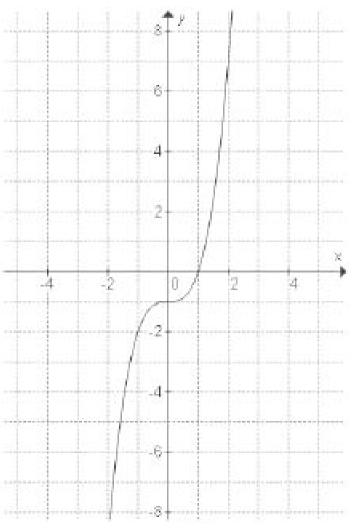


Figura 4.2. $f(x) = x^3 - 1$

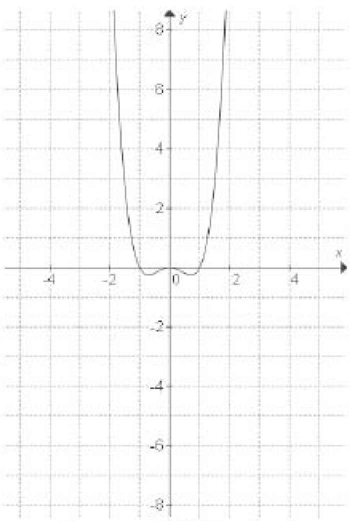


Figura 4.3. $f(x) = x^4 - x^2$

A partir de las propiedades anteriores podemos intuir algún comportamiento inicial de la gráfica de las funciones de este tipo (figuras 4.2 y 4.3); para ello, deberá realizarse la tabulación en todas las gráficas.

Como indican las propiedades, se puede observar que las gráficas no tienen interrupciones y las funciones tienen como dominio todo el conjunto de números reales.

Propiedades geométricas de la función polinomial de grado tres

Su expresión general es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ , donde } a \neq 0$$

Como todas las funciones polinomiales, tiene como dominio el conjunto de los números reales: $Domf = \mathbb{R}$

Como función de grado impar, su rango son todos los números reales: $Rangof = \mathbb{R}$

Intersección con el eje Y: (0, *d*)

- Si *a* > 0, la función va debajo del eje X, lo cruza y continúa arriba del eje X.
- Si *a* < 0, la función empieza arriba del eje X y termina abajo del eje X.
- El número máximo de intersecciones con el eje X (ceros de la función) es 3.
- Por tabulación obtenemos la gráfica.

Revisemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Describe el comportamiento y bosqueja la gráfica de la función:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

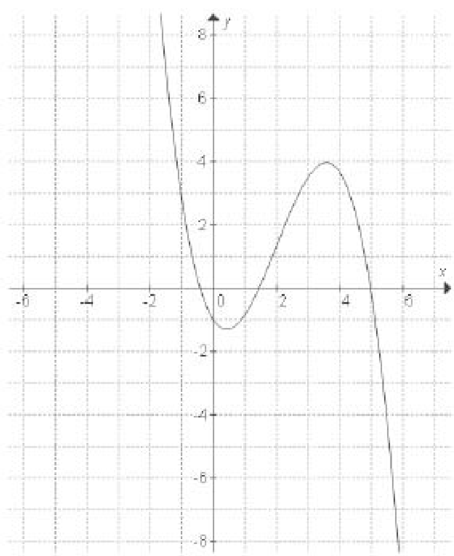
Solución:

$Domf = \mathbb{R}, \quad Rangof = \mathbb{R}$

Intersección con el eje Y: (0, −1)

Dado que $a = -\frac{1}{3} < 0$*, la gráfica empieza encima del eje X y termina debajo de éste.*

La gráfica puede tener máximo 3 ceros.



Ejemplo 2: Describe el comportamiento y bosqueja la gráfica de la función:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

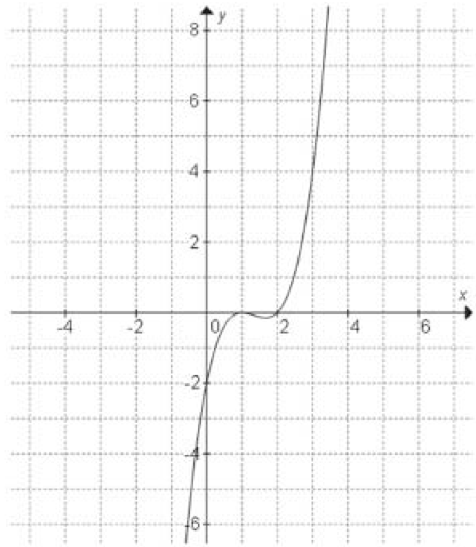
Solución:

$Domf = \mathbb{R}, \quad Rangof = \mathbb{R}$

Intersección con el eje Y: (0, −2)

Dado que a = 1 > 0, la gráfica empieza abajo del eje X y termina arriba de éste.

La gráfica puede tener máximo 3 ceros.



Propiedades geométricas de la función polinomial de grado cuatro

Sean $f(x) = x^4$ y $f(x) = -x^4$, funciones cuyas gráficas se visualizan a continuación:

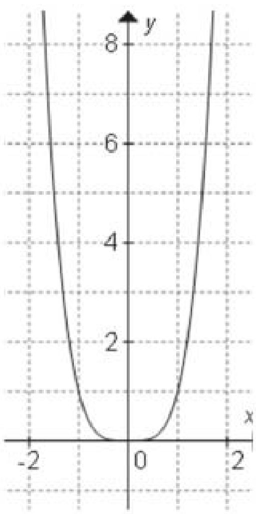


Figura 4.6.

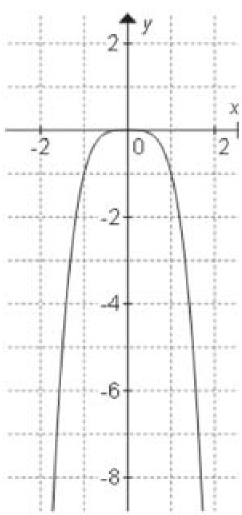


Figura 4.7.

A partir de estas gráficas podemos generalizar, para funciones polinomiales de grado cuatro, lo siguiente:

1. La gráfica se extiende hacia el mismo lado respecto del eje X, *en forma de parábolas*.

a) Si el coeficiente principal es positivo ($a_n > 0$), los valores de f van desde infinito, es decir, la gráfica estará arriba del eje X y, una vez que haya tenido su mayor cercanía al eje X, continuará arriba de él, considerando un desplazamiento horizontal hacia la derecha (figura 4.6).

b) Si el coeficiente principal es negativo ($a_n < 0$), la gráfica va por abajo del eje X y continúa hacia $-\infty$, después de haber tenido su mayor cercanía con el eje X abajo del eje X, considerando un desplazamiento horizontal hacia la derecha (figura 4.7).

2. El rango de las funciones polinomiales de grado cuatro depende del coeficiente principal.

a) Si $a_n > 0$, el rango incluirá todos los valores de y desde un mínimo hacia el infinito, es decir, *Rangof* = $[y_{min}, \infty)$.

b) Si $a_n > 0$, el rango incluirá todos los valores de y desde $-\infty$ hasta un máximo, es decir, *Rangof* = $[y_{min}, \infty)$.

3. La única intersección con el eje Y es el punto $(0, a_0)$.

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones (1): Analiza las siguientes funciones y bosqueja su gráfica.

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x$

c) $f(x) = 3 + 4x - 3x^2 - 6x^3$

Instrucciones (2): Responde a lo siguiente marcando con una X en el paréntesis que corresponda y completando la parte faltante.

I. La gráfica de $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$:

a) Comienza (   ) Arriba (   ) Debajo del eje X, en un desplazamiento horizontal de izquierda a derecha.

b) Termina (   ) Arriba (   ) Debajo del eje X, en un desplazamiento horizontal de izquierda a derecha.

c) Corta al eje Y en ________.

II. La gráfica de $f(x) = x^{100} + \frac{3}{2}$:

a) Comienza (   ) Arriba (   ) Debajo del eje X, en un desplazamiento horizontal de izquierda a derecha.

b) Termina (   ) Arriba (   ) Debajo del eje X, en un desplazamiento horizontal de izquierda a derecha.

c) Corta al eje Y en ________.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta la sección de Retroalimentación al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Métodos de solución de las ecuaciones factorizables asociadas a una función polinomial de grado tres y cuatro

En muchas de las funciones polinomiales que hemos analizado puedes notar que su gráfica intersecta al eje X, en algunas no. Contar con las intersecciones de las funciones polinomiales con el eje X es de gran ayuda si esta información se agrega a las técnicas que has aprendido hasta este punto.

Para mostrar hacia dónde vamos, analiza lo siguiente. Se tiene la función polinomial:

$$f\left(x\right) = x^3 - 4x$$

Para la cual deseamos responder la siguiente cuestión: ¿a qué valor o valores de la variable x les corresponde una imagen igual a cero? Para responder, debemos considerar que si se requiere que la imagen de x sea igual a cero, tendremos que:

$$f(x) = 0 \text{ de donde se tiene la ecuación } x^3 - 4x = 0$$

Como recordarás, en tus cursos básicos de álgebra aprendiste que la ecuación puede resolverse empleando la factorización que se describe a continuación:

$$x^3 - 4x = 0$$

La ecuación dada se puede factorizar por factor común. Al factorizar el binomio en el paréntesis se tiene:

$$x\left(x^2 - 4\right) = 0$$
$$x\left(x + 2\right)\left(x - 2\right) = 0$$

A partir de la última expresión resultante podemos establecer que el producto será igual a cero, cuando al menos uno de los factores lo sea, es decir:

$$x = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$x - 2 = 0$$

Así, los valores de x a los que corresponde una imagen igual a cero son:

$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 2$$

De las parejas resultantes del proceso anterior, obtenemos que dichos puntos se ubican en el eje X; luego, las intersecciones de la gráfica con el eje X son los puntos (0, 0), (2, 0), (−2, 0).

Con las intersecciones con el eje x determinadas y los elementos que hemos visto, se puede bosquejar la gráfica de la función como se muestra en la figura 4.8 en la página siguiente.

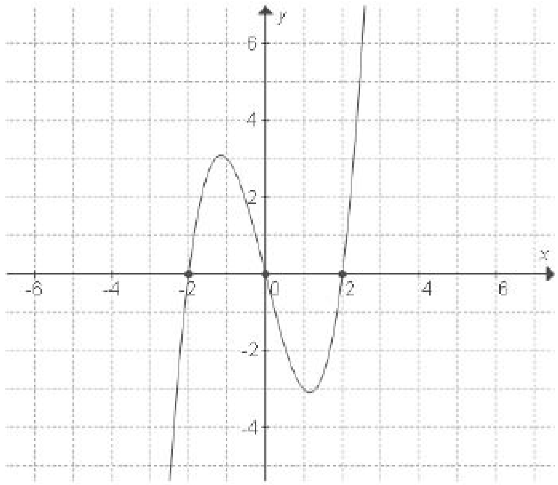


Figura 4.8. Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$

Ejemplo 1: Despeja la variable *y* y exprésala como $f(x)$. Analiza y bosqueja la gráfica de la función:

$$\frac{3y}{x^2-1} = 6x+9$$

Solución:

$$3y = (6x+9)(x^2-1)$$
$$3y = 6x^3 + 9x^2 - 6x - 9$$
$$y = \frac{6x^3 + 9x^2 - 6x - 9}{3}$$
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Es una función cúbica, por lo que:

$$Domf = \mathbb{R} \qquad Rangof = \mathbb{R}$$

Intersección con el eje X: (0, −3)
Para hallar las intersecciones con el eje X:

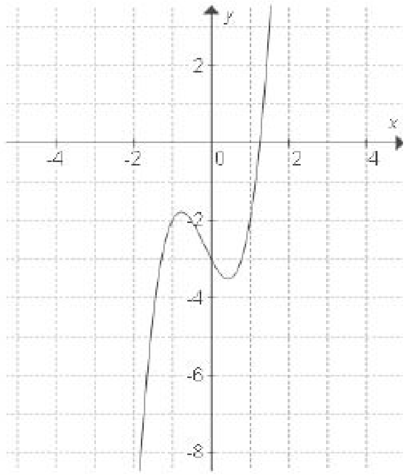
$$\frac{(6x+9)(x^2-1)}{3} = 0$$
$$(2x+3)(x^2-1) = 0$$
$$(2x+3)(x+1)(x-1) = 0$$

De donde:

$$\begin{array}{ccc} 2x+3=0 & x+1=0 & x-1=0 \\ 2x=-3 & x=-1 & x=1 \\ x_1=-\dfrac{3}{2} & x_2=-1 & x_3=1 \end{array}$$

Las intersecciones con el eje X son: $\left(-\dfrac{3}{2},0\right),\quad (-1,0)\quad y\quad (1,0)$

Dado que a = 2 > 0 , la gráfica comienza debajo del eje X y termina arriba del eje X.
La gráfica es:



Ejemplo 2: Determina las intersecciones con el eje X y bosqueja la gráfica de la función:

$$f(x)=x^3+1$$

Solución:

Procedemos a determinar los valores de x que tienen al cero como imagen, esto es:

$$x\ \ +1=0$$

Al ser el binomio de una suma de cubos se tiene:

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

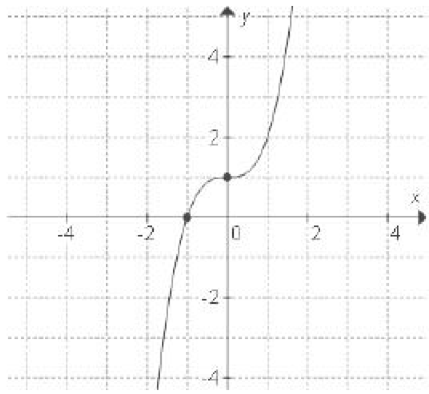
Continúa...

La expresión anterior permite observar que uno de los valores a determinar es $x = -1$. Sin embargo, los valores de x en la segunda expresión requieren de otra técnica para obtenerse. En este caso, si aplicamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, obtenemos:

$$\left(x^2 - x + 1\right) = 0,\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \textit{ya que } a = 1,\ b = -1,\ c = 1,\ \textit{sustituyendo:}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{+1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

La expresión anterior muestra claramente que la ecuación no tiene más soluciones en el campo de los números reales y, en consecuencia, la gráfica no tendrá más intersecciones con el eje x que cuando $x = -1$. Por lo que en la gráfica sólo se puede visualizar uno de los ceros $(-1, 0)$ y la intersección con el eje Y $(0, 1)$.



Es importante reconocer que la ecuación inicial de grado tres tiene tres soluciones; en este caso una solución real y dos complejas.

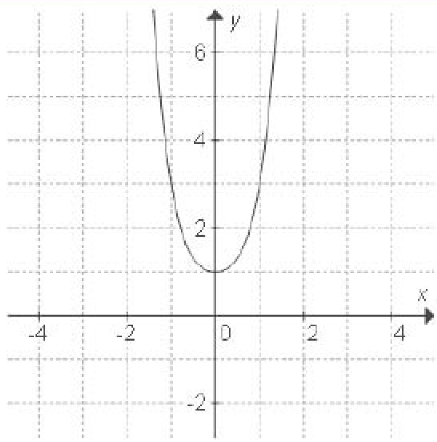
Ejemplo 3: Traza el bosquejo de la función $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Solución:

Al determinar los valores de x que tienen al cero como imagen:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

Se observa que la ecuación anterior no tiene soluciones reales, es decir, tendrá cuatro soluciones complejas. Empleando sus coeficientes y grado tenemos:



Una de las técnicas utilizadas para factorizar polinomios de tercer grado es encontrando y combinando los factores del coeficiente de x de mayor grado y los factores del término independiente, ya que las raíces del polinomio siempre dan como producto a esos dos números, a este proceso se le llama *raíces racionales*.

A continuación se explica el procedimiento para encontrar las raíces de un polinomio. Se toma como ejemplo el siguiente:

$$f(x) = \underbrace{6}_{1,2,3,6}x^3 - 7x^2 - 14x + \underbrace{15}_{1,3,5,15}$$

1 ,2, 3, 6
Denominador

1 ,3, 5, 15
Numerador

¿Qué relacion observas entre el 6 y el 15? El número 6 y el 15 están relacionados con el producto de sus factores:

$$(2)(1)(3) = 6$$
$$(3)(1)(5) = 15$$

Las raíces de este polinomio se formarán combinando los factores de estos números. Las raíces racionales que se formarán sólo pueden ser algunas de las que se construyan con estos números:

$$\frac{a}{b} = \pm\frac{1, 3, 5, 15}{1, 2, 3, 6}$$

Por ejemplo, si consideramos que el denominador es 1, cada uno de estos números es una posible raíz del polinomio:

$$\pm 1 \qquad \pm 3 \qquad \pm 5 \qquad \pm 15$$

De la misma manera, si consideramos al 2 como denominador, éstas serán las posibles raíces:

$$\pm\frac{1}{2} \qquad \pm\frac{3}{2} \qquad \pm\frac{5}{2} \qquad \pm\frac{15}{2}$$

Evaluando cada uno de los valores en la función original, los valores que obtuvieron una imagen igual a cero son:

$$1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{5}{3}\text{, es decir, } x = 1;\ x = \frac{-3}{2};\ x = \frac{5}{3}$$

La ecuacion $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0$ factorizada es:

$$(x-1)(2x+3)(3x-5)=0$$

Ejemplo 1: Encuentra las posibles combinaciones de raíces racionales de:

$$f(x) = 6x^4 - 13x^3 - 16x^2 + 53x - 30$$

Solución:

Las posibles combinaciones de raíces racionales, si es que existen, estarán en los siguientes números:

$$\frac{a}{b} = \pm\frac{30}{6} = \pm\frac{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30}{1,\ 2,\ 3,\ 6}$$

Uno de los procesos más fáciles para evaluar y encontrar la imagen cero es la división sintética. Si se toma la combinación 5/3 y realizamos la division sintética, se obtiene una imagen cero o residuo cero, afirmando que es una raíz racional de:

$$f(x) = 6x^4 - 13x^3 - 16x^2 + 53x - 30$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 6 & -13 & -16 & 53 & -30 \\ & 10 & -5 & -35 & 30 \\ \hline 6 & -3 & -21 & 18 & 0 \end{array}$$

La ventaja de la división sintética está en que proporciona polinomios de grado inferior para seguir probando raíces:

Al combinar una vez más los factores y tomando al uno para realizar la division sintética, observamos que también es una raíz.

$$1$$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & -7 & 6 \\ & 2 & 1 & -6 \\ \hline 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}$$

Cuando se llega a una función cuadrática, se puede proceder de la misma manera para calcular las raíces restantes o mediante la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

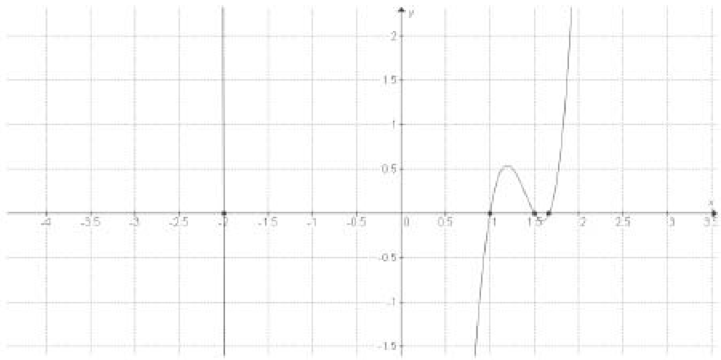
O incluso una factorización de la ecuación cuadrática por alguno de los métodos aprendidos en los cursos de álgebra. Las raíces o factores del polinomio son:

$$x = 1 \qquad x = \frac{5}{3} \qquad x = -2 \qquad x = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, el polinomio factorizado es igual a:

$$(x-1)(3x-5)(2x-3)(x+2)$$

La determinacion de las raíces de un polinomio permite factorizarlo. Así como hacer un esbozo de su gráfico.



Podemos afirmar que estas técnicas nos permiten tener un acercamiento al gráfico, quizá muy cercano a la gráfica final. Más adelante aprenderás estrategias para determinar con precisión la gráfica de una función polinomial.

Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones (1): Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones polinomiales.

a) $f(x)=3x(x-1)(x-3)$

b) $g(x)=x^3-1$

c) $y=x^4-3x^2-4$

d) $f(x)=-x^4+3$

e) $g(x)=-x^3-27$

Instrucciones (2): Se construye una caja de cartón abierta a partir de una pieza con dimensiones 40 cm por 20 cm. Para ello se cortan cuadrados de cierta longitud en cada esquina. Modela el volumen de la caja a través de una función y responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tipo de función es?
2. ¿Cuál es su dominio?
3. ¿Es una función continua?
4. Bosqueja la gráfica que le corresponde.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta la sección de Retroalimentación al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Comportamiento de la gráfica de una función polinomial en función de los valores que toman sus parámetros

En general, los polinomios contienen "n" términos y, en consecuencia, mismo número de coeficientes (incluso éstos pueden valer cero). A partir de dichos coeficientes se puede describir el comportamiento de la gráfica de la función y bosquejarla.

La forma general de una función polinomial es:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

En esta expresión es un número entero no negativo, que se denomina *grado de la función polinomial*.

- Los valores numéricos reales $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ se denominan *coeficientes del polinomio.*

- El coeficiente a_n, un número real diferente de cero ($a_n \neq 0$) que actúa como coeficiente del término de mayor grado, se denomina *coeficiente principal* de la función.

- El coeficiente a_0 se denomina *coeficiente constante*.

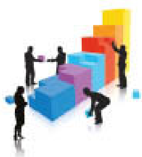
- De este modo, $a_n x^n$ es el término principal de la función y el término a_0 es el *término constante* o *término independiente* de ésta.

Por ejemplo, en la función polinomial:

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 3$$

Grado $\rightarrow$ 4
Término principal $\rightarrow$ $3x^4$
Coeficiente principal $\rightarrow$ 3
Coeficiente constante $\rightarrow$ 3

Debes tener en cuenta que en un polinomio de grado n el único coeficiente que debe ser distinto de cero es el coeficiente principal. ¿Cuál es la razón? Cualquiera de los demás coeficientes del polinomio puede ser igual a cero (caso del polinomio incompleto).



Actividad de aprendizaje 3

Instrucciones (1): Completa la siguiente tabla a partir de la función polinomial que se presenta.

Polinomio	Grado	Término principal	Coeficiente principal	Coeficiente constante
$f(x) = x^6 - x$				
$f(x) = 2x^3 - 3x + 2$				
$g(x) = 3x^4 + x - 1$				
$h(x) = x^3$				

Instrucciones (2): Completa la siguiente tabla a partir de la función polinomial que se presenta.

Polinomio	Grado	Término principal	Coeficiente principal	Coeficiente constante
	4		3	6
	3		−5	−8
	3		1	2
	4		2	0

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta la sección de Retroalimentación al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Cierre del bloque IV

Reflexiona sobre lo aprendido

Una vez estudiada la parte principal de este bloque IV, lo consecuente es que desarrolles las habilidades y actitudes necesarias, para así evidenciar que estas aprehendiendo funciones polinomiales de grado tres y cuatro.

Al final del presente bloque ya cuentas nuevos elementos de aprendizaje para que poco a poco te apropies de ellos y puedas trabajar y aplicar funciones polinomiales a situaciones teóricas, pero también a algunas situaciones reales.

Con estos elementos, te invito a que investigues acerca de algún tipo de aplicación de funciones polinomiales de grados tres y cuatro y comparte la información con tu docente y grupo.

Cuestiónense acerca de la utilidad de estar desarrollando estos aprendizajes y la importancia de manejarlos adecuadamente. Al final presenta a tu docente las observaciones del trabajo realizado para realimentar tu aprendizaje en cuanto a funciones polinomiales.

Autoevaluación

Instrucciones: Encuentra las soluciones a los siguientes ejercicios para lo cual debes realizar las anotaciones necesarias en tu cuaderno con orden y limpieza. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase escucha y respeta las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

1. Despeja la variable y de la ecuación:

$$\frac{y\left(y+2x^3-2\right)}{9x-10}=xy$$

Expresa la variable x como función de la variable y, analiza la función y bosqueja su gráfica.

2. Determina una de las raíces del polinomio x^3+x^2+x.

3. La gráfica de una función polinomial corta al eje X en los puntos −1, 1 y 2; determina el polinomio que le corresponde.

4. Traza la grafica que le corresponde a la función polinomial $f(x) = x^4 + 1$.

5. Grafica la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 1$.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta la sección de Retroalimentación al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior obtuviste 5 aciertos considera tu resultado como *excelente*, si fueron 4 aciertos como *bien,* si tienes 3 aciertos como *regular* y si tus respuestas correctas fueron menos de 3 aciertos considera tu desempeño como *no suficiente*, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Bloque V

Utilizas funciones factorizables en la resolución de problemas

Introducción

Para la construcción de casas, edificios y carreteras es necesario conocer la resistencia de los materiales, para tal motivo es frecuente encontrar tablas y gráficas que apoyan el cálculo para ciertos diseños arquitectónicos.

La aplicación de tablas y gráficas nos permite calcular el crecimiento de una población animal o vegetal en función del tiempo, el peso de un bulto en función del diámetro del mismo, el consumo de oxígeno en función del trabajo realizado, etc.

Las gráficas de funciones se hacen presentes siempre que en un experimento o fenómeno se establezca cierta relación algebraica o se utilice una fórmula. Los fenómenos pueden ser sociales, tecnológicos e incluso particularmente específicos.

Aún cuando la teoría de ecuaciones que estudiamos actualmente surge en el siglo XV, los egipcios, hacia el año 1890 aC, ya utilizaban ciertas proposiciones que los inducían a resolver ecuaciones hasta de segundo grado.

En este bloque ampliaremos el conocimiento de la solución de ecuaciones polinomiales factorizables.

¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque V

Tiempo 10 horas

Contenidos curriculares que se abordan

1. División sintética.
   - Método de división sintética.
2. Ceros y raíces de la función.
3. Teorema del residuo.
4. Teorema del factor.
5. Teorema fundamental del álgebra.
6. Teorema de factorización lineal.
7. Gráficas de funciones polinomiales factorizables.

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Evaluación del aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias.

- *Actividad de aprendizaje 1*. Ejercicios sobre división sintética.
- *Actividad de aprendizaje 2*. Uso del teorema del residuo.
- *Actividad de aprendizaje 3*. Ceros de una función polinomial.
- *Actividad de aprendizaje 4*. Teorema de factorización lineal.
- *Actividad de aprendizaje 5*. Raíces de funciones polinomiales.
- *Autoevaluación*.

Para iniciar, reflexiona

Organizados en equipos de cuatro estudiantes, respondan lo siguiente: ¿qué significa la pendiente? La gráfica de la temperatura en el exterior en un cierto periodo es una recta. ¿Qué tanto está cambiando el tiempo si la pendiente de la recta es positiva? ¿Y si es negativa? ¿Y si es cero? Escriban su conclusión:

Aprende más

División sintética

Las *funciones polinomiales factorizables* se definen a partir de relaciones aritméticas como la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potencia y la raíz.

Por la forma en que se presentan estas relaciones, las funciones algebraicas se clasifican de la siguiente manera:

$$\text{Funciones algebraicas} \begin{cases} \text{Polinomiales} \begin{cases} \text{Constante: } f(x) = a_0 \\ \text{Lineal: } f(x) = a_1x + a_0 \\ \text{Cuadrática: } f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ \text{Cúbica: } f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ \text{De grado mayor: } f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \end{cases} \end{cases}$$

En este bloque estudiaremos las *funciones polinomiales factorizables*. Para lograr comprender el análisis de la factorización de una función polinomial, es necesario recordar la división entre polinomios, ampliando este conocimiento se estudiara la división sintética.

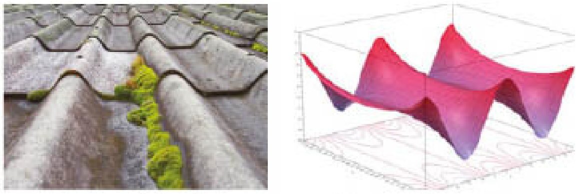


Figura 5.1. Teja de una casa. El diseño de estas tejas está basado en funciones polinomiales.

La *división sintética* es un proceso para dividir un polinomio entre otro de grado menor o igual, pero sin el uso de expresiones literales; es decir, empleamos únicamente los coeficientes numéricos de los términos.

Método de división sintética

El proceso de la división sintética se basa en procedimientos desarrollados por Rufini y Horner. Para realizar este proceso debemos verificar que:

1. Los polinomios dividendo y divisor estén ordenados descendentemente.
2. El grado del dividendo sea mayor o igual al grado del divisor.

Si se desea dividir $11x^2-6x^4-43x^3+9x+8x^5-42$ entre $-3x+2x^2-6$ por el método de división sintética, primero se deben ordenar el dividendo y el divisor:

Dividendo: $8x^5-6x^4-43x^3+11x^2+9x-42$; $grado(Dividendo)=5$

Divisor: $2x^2-3x-6$; $grado(Divisor)=2$

Dado que $grado(Dividendo)>grado(Divisor)$, 5 > 2, la división se puede realizar.

El acomodo de los elementos en la división sintética se apegará al esquema de la figura 5.2.

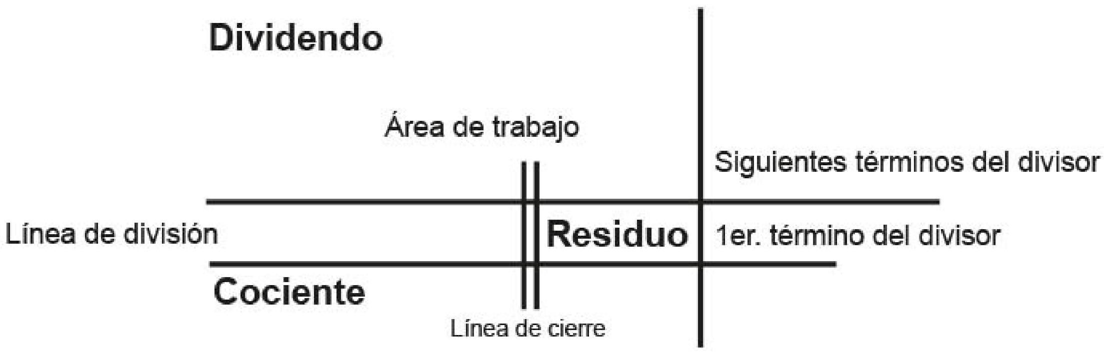
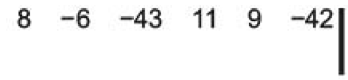


Figura 5.2. Elementos de la división sintética.

Pasos de la división sintética

Paso 1. Se escriben los coeficientes numéricos del dividendo ordenado descendentemente en un primer renglón. Si el polinomio está incompleto, escribe cero en la columna del término que falte. Dibuja una vertical junto al último coeficiente escrito.



Paso 2. Se dejan algunos renglones en blanco para el "área de trabajo". La cantidad de renglones necesarios se puede calcular de la siguiente manera:

Renglones de área de trabajo = *grado*(*Dividendo*) − *grado*(*Divisor*) + 1

En nuestro ejemplo,

Renglones de área de trabajo = 5 − 2 + 1 = 4

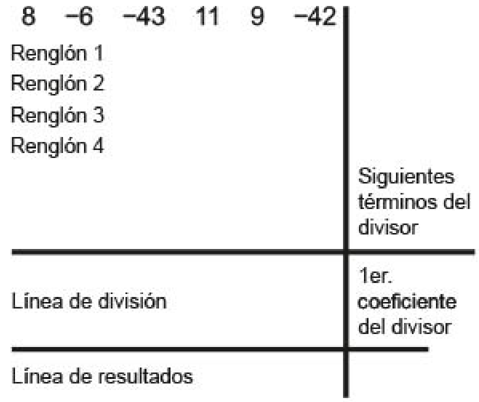


Figura 5.3. Paso 2 y 3.

Paso 3. Se trazan dos líneas horizontales debajo del área de trabajo y se prolonga la vertical hasta cruzar estas dos horizontales. El proceso se muestra en la figura 5.5.

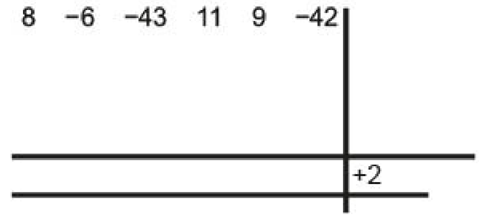


Figura 5.4. Paso 4.

Paso 4. Se escribe el primer coeficiente numérico del divisor en el espacio reservado para él, como se indicó en el esquema. En nuestro ejemplo este coeficiente es 2 (figura 5.6).

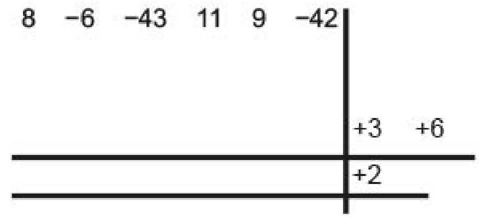


Figura 5.5. Paso 5.

Paso 5. Se escriben los siguientes coeficientes del divisor pero se cambian sus signos. Este paso es muy importante para evitar errores en el resultado. También deben escribirse ceros para los términos que el divisor no tenga.

Paso 6. Se baja el primer coeficiente del dividendo hasta la línea de división.

Paso 7. Se divide entre el primer coeficiente del divisor y el resultado se coloca debajo del término que se bajó.

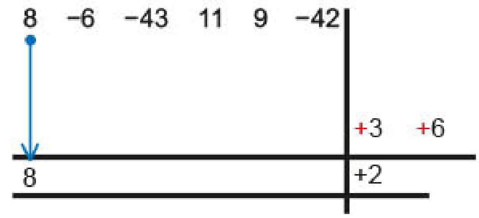


Figura 5.6. Paso 6.

Paso 8. Se multiplica este número por los siguientes coeficientes del divisor y los resultados se colocan en el área de trabajo en las columnas siguientes del renglón número dos.

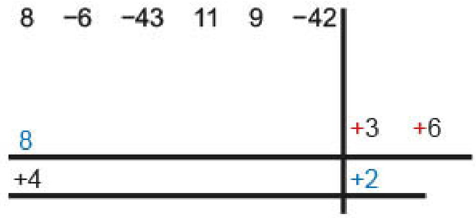


Figura 5.7. Paso 7.

Paso 9. Se checa que no se haya escrito algún número en la última columna. De ser así se termina el proceso y se deben determinar los resultados. En nuestro ejemplo, el último número escrito es 24, que aún no está en la última columna del área de trabajo (que es la columna donde está el −42).

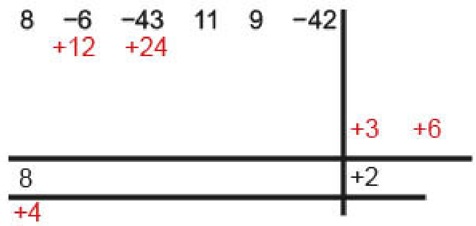


Figura 5.8. Paso 8.

Paso 10. Si el proceso continua, entonces se baja la suma de los coeficientes de la siguiente columna a la línea de división y se repite el proceso del paso 6 al 9, tantas veces como sea necesario y hasta llegar a la última columna.

Paso 11. Cuando hemos escrito un número debajo de la última columna, como en el proceso próximo anterior, debemos colocar unas líneas de cierre junto a la última cifra escrita en el último renglón.

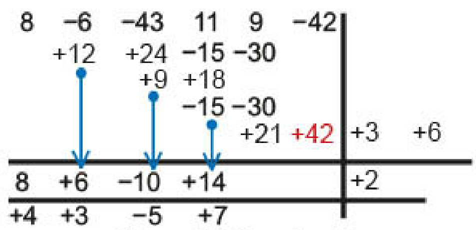


Figura 5.9. Paso 9 y 10.

Paso 12. Como vemos, quedaron dos columnas después de las líneas de cierre. Sumamos estas columnas y escribimos los resultados en la línea de división, como se muestra a continuación.

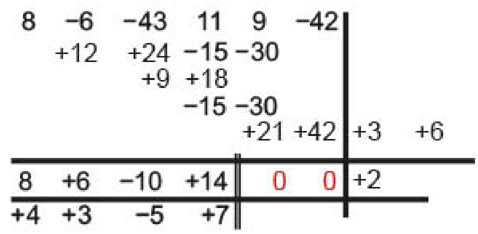


Figura 5.10. Paso 11 y 12.

Paso 13. Ahora, determinemos el cociente. Sólo vemos los coeficientes del polinomio que representa al cociente. El último es el número 7, que es el término de grado cero; antes está el −5, siendo el de grado 1; antes que éste está el 3, que es el término de grado 2, así llegamos al primer término que es el término de grado 3. Como la variable es x, el cociente es:

$$4x^3 + 3x^2 - 5x + 7$$

Paso 14. Ahora calculemos el residuo. Vemos que en la zona del residuo hay dos ceros. Esto significa que el polinomio del residuo es de primer grado (un término de grado cero y un término de primer grado). Pero como ambos son cero, podemos decir que el residuo final es cero.

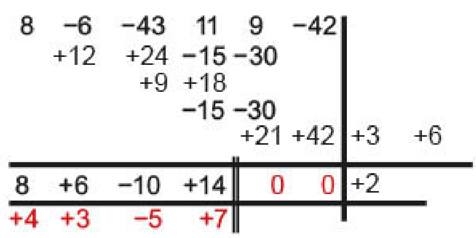


Figura 5.11. Paso 13 y 14.

Paso 15. Ahora sólo resta expresar el resultado:

$$\frac{8x^5-6x^4-43x^3+11x^2+9x-42}{2x^2-3x-6}=4x^3+3x^2-5x+7$$

Ejemplo 1: Dividir por el método de división sintética la siguiente expresión:

$$\frac{10x^4-29x^3+8x^2+85x-70}{5x^2+3x-8}$$

Solución:

$$\begin{array}{ccc||cc|cc}
+10 & -29 & +8 & +85 & -70 & & \\
 & -6 & +16 & & & & \\
 & & +21 & -56 & & & \\
 & & & -27 & +72 & -3 & +8 \\
\hline
+10 & -35 & +45 & +2 & +2 & +5 & \\
\hline
+2 & -7 & +9 & & & &
\end{array}$$

Resultados: $\dfrac{10x^4-29x^3+8x^2+85x+-70}{5x^2+3x-8}=2x^2-7x+9+\dfrac{2x+2}{5x^2+3x-8}$

Ejemplo 2: Dividir por el método de división sintética la siguiente expresión:

$$\frac{x^7-7x^5+12x^4+x^3-29x^2+20x-5}{x^4-2x^3+5x-7}$$

Solución:

$$\begin{array}{cccc||cccc|cccc}
1 & 0 & -7 & 12 & 1 & -29 & 20 & -5 & & & & \\
 & 2 & 0 & -5 & 7 & & & & & & & \\
 & & 4 & 0 & -10 & 14 & & & & & & \\
 & & & -6 & 0 & 15 & -21 & & & & & \\
 & & & & 2 & 0 & -5 & 7 & +2 & 0 & -5 & +7 \\
\hline
1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & +1 & & & \\
\hline
1 & 2 & -3 & 1 & & & & & & & &
\end{array}$$

Resultado: $\dfrac{x^7-7x^5+12x^4+x^3-29x^2+20x-5}{x^4-2x^3+5x-7}=x^3+2x^2-3x+1+\dfrac{-6x+12}{x^4-2x^3+5x-7}$

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, anotando los procesos completos en tu cuaderno. Al final de la actividad escribe una conclusión sobre el avance de tu aprendizaje en la división algebraica.

1. Divide por el método de división sintética:

$$\left(18x^7+24x^3-3x^6+76x+x^5-76x^2+10x^4-40\right) \div \left(4x+2x^4+3x^5-8\right)$$

2. Por división sintética, encuentra el resultado de la división:

$$\left(12m^2+19m^4-11m^3+3m+30m^5+1\right)\div\left(4m^2+5m^3-2m+1\right)$$

3. Por división sintética, determina el resultado de $\dfrac{8a^3-b^3}{4a^2+2ab+b^2}$

4. Determina el resultado de $\left(x^2-5x+6\right)\div\left(x-3\right)$, usando el método de división sintética.

5. Usando división sintética calcula $\dfrac{12p^6-11p^5+12p^4-30p^3+7p^2-13p-7}{4p^3-p^2+2p+1}$

Conclusiones:

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Ceros y raíces de la función

A los valores de x que hacen que un polinomio $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ valga cero se les llaman *raíces* o *ceros del polinomio*.

Por ejemplo, sea el polinomio:

$$p(x) = x + 1$$

Entonces, si $x = -1$, al sustituir dicho valor en el polinomio obtenemos cero.

Así que −1 es una raíz de $p(x)$

En otro ejemplo, si $q(x) = x^2 - 4x - 5$

Observamos que para $x = 5$ y $x = -1$ el polinomio vale cero.

Los ceros de una función polinomial $f(x)$ son los valores que hacen que $f(x) = 0$ Gráficamente se reconocen, pues son los valores de las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica con el eje X.

Si $f(r) = 0$, entonces afirmamos que la función tiene un cero en $x = r$, con lo que queda determinado, de este modo, el punto $(r, 0)$ como una intersección de la gráfica de $f(x)$ con el eje X. Para hallar los ceros de un polinomio, se debe resolver la ecuación: $f(x) = 0$.

La cantidad de soluciones de una ecuación polinomial depende del grado, de modo que si éste es n, la ecuación $f(x) = 0$ tendrá n soluciones, cada una de las cuales puede ser real o compleja, y, como consecuencia, la gráfica de $f(x)$ tendrá como máximo n intersecciones con el eje X. Son n intersecciones con el eje X en el caso de que todas las raíces de la ecuación sean reales.

Por ejemplo, una función de primer grado tiene sólo una raíz o cero y, como máximo, una intersección con el eje X. Las funciones de primer grado se denominan funciones lineales porque su gráfica es una recta. Si la recta es horizontal paralela al eje X, entonces no existe intersección alguna con el eje X. Una función de segundo grado o cuadrática tiene dos ceros y, como máximo, dos intersecciones con el eje X. Una ecuación cúbica tiene tres ceros y, por lo tanto, como máximo tres intersecciones con el eje X, etcétera.

Las intersecciones con el eje Y que tiene la gráfica se caracterizan por ser puntos de abscisa igual a cero. Si $x = 0$, tenemos que:

$$f(0) = \cancel{a_n(0)^n} + \cancel{a_{n-1}(0)^{n-1}} + \ldots + \cancel{a_2(0)^2} + \cancel{a_1(0)} + a_0$$

por lo que para toda función polinomial se cumple que $f(0) = a_0$

Se determina así al punto $(0, a_0)$ como la única intersección con el eje Y de cualquier función polinomial. El coeficiente constante a_0 determina el punto sobre el eje Y por el cual pasa la gráfica de la función. Si el coeficiente constante es cero, la gráfica de la función polinomial pasará por el origen del plano cartesiano, es decir, por el punto (0, 0). Para comprender mejor esto último, analicemos la función:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

Comencemos el análisis notando que el grado de la ecuación $f(x) = 0$ es 2, lo que nos garantiza que, a lo mucho, la gráfica tocará dos veces al eje X. Resolviendo la ecuación, obtenemos que las raíces son 2 y 3, lo que significa que $f(x) = 2$ y que $f(x) = 3$. Con esto podemos concluir, sin miedo a equivocarnos, que la gráfica corta al eje X en los puntos (2, 0) y (3, 0).

Por otro lado, el término independiente es 6, con lo que concluimos que la gráfica corta al eje Y en el punto (0, 6). Visto de otra forma, la gráfica corta al eje Y a una altura de 6 unidades sobre el eje X.

Con la información anterior y recordando que la gráfica no puede estar "rota", podemos trazar ésta:

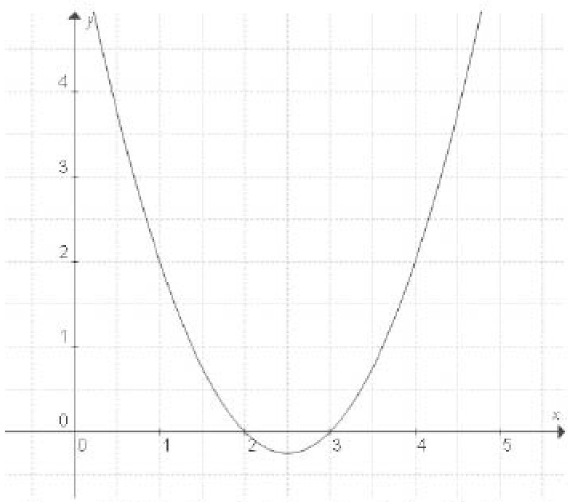


Figura 5.15. Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$

¿Cómo se utiliza el saber que la gráfica no está "rota"? Comenta tu razonamiento con el grupo.

Aprende más

Los siguientes teoremas muestran cómo se puede usar la división sintética para evaluar polinomios fácilmente.

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x-c$, entonces el residuo es el valor de $P(c)$.

Demostración. Si el divisor en el algoritmo de la división es de la forma $x - c$ para algún número real *c*, entonces el residuo debe ser una constante (puesto que el grado del residuo es menor que el grado del divisor). Si a esta constante se le denomina *r*, entonces:

$$P(x)=(x-c)\cdot Q(x)+r$$

Si se establece $x = c$ en esta ecuación, se obtiene:

$$P(x)=(x-c)\cdot Q(x)+r \;\; =0+r=r$$

Es decir, $P(c)$ es el residuo *r*.

Ejemplo: Aplicar el teorema del residuo para hallar el valor de un polinomio, sea:

$$p(x)=3x^5+5x^4-4x^3+7x+3$$

a) Encuentre el cociente y el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

b) Usa el teorema del residuo para hallar $P(-2)$.

Solución:

a) Puesto que $x+2=x-(-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\ & & -6 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5 \end{array}$$

El residuo es 5, por lo tanto, $p(-2)=5$

El cociente es $3x^4-x^3-2x^2+4x-1$ *y el residuo es 5.*

b) Por el teorema del residuo, $P(-2)$ *es el residuo cuando* $P(x)$ *se divide entre*

$$x-(2)=x+2$$

Del inciso a) el residuo es 5, por lo tanto, $P(-2)=5$

Teorema del factor

El teorema siguiente establece que los ceros de polinomios corresponden a factores, *c* es un cero de *P* si y sólo si:

$$x-c \text{ es un factor de } P(x)$$

Demostración. Si $P(x)$ se factoriza como $P(x)=\ (x-c)\cdot Q(x)$, entonces:

$$P(c)=(\ c\ -\ c\ )\cdot Q(c)=0\cdot Q(c)=0$$

A la inversa, si $P(c)=0$, entonces por el teorema del residuo:

$$P(x)=(x-c)\cdot Q(x)+0=(x-c)\cdot Q(x)$$

Por lo tanto, $x-c$ es un factor de $P(x)$

Ejemplo 1: Factorizar un polinomio por medio del teorema del factor, sea:

$$p(x)=x^3-7x+6$$

Demostrar que $P(1)=0$ y factorizar $P(x)$ por completo.

Solución:

Sustituyendo, se ve que:

$$P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$$

Por el teorema del factor, esto significa que es un factor de P(x). Usando la división sintética se ve que:

$$p(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

Ejemplo 2: Hallar un polinomio con ceros especificados. Hallar un polinomio de grado cuatro que tiene ceros −3, 0, 1 y 5.

Solución:

Por el teorema del factor $x-(-3)$, $x-0$, $x-1$ *y* $x-5$ *deben ser factores del polinomio deseado, así que*

$$p(x) = (x+3)(x-0)(x-1)(x-5) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$$

Puesto que $P(x)$ *es de grado cuatro es una solución del problema.*

Al graficar se debe observar que los ceros de P corresponden a las intersecciones con el eje X de la gráfica.

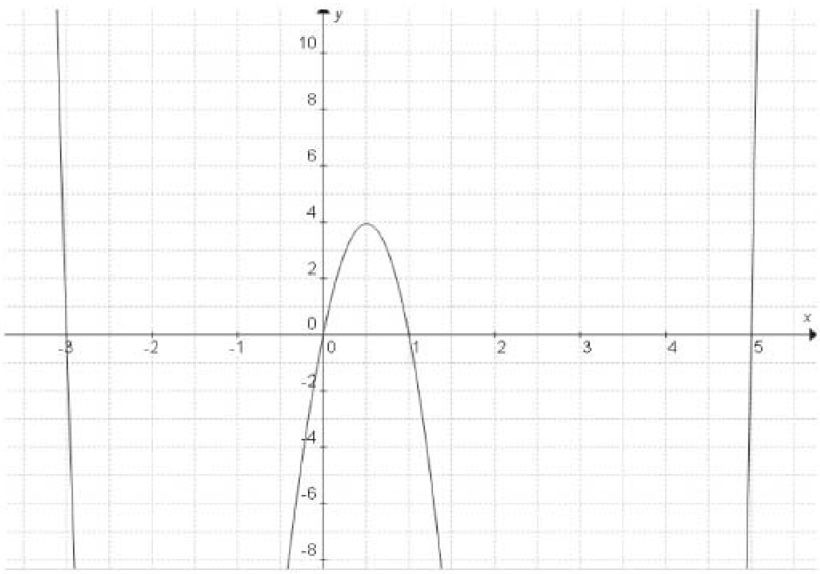


Figura 5.12.

Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, anotando los procesos completos en tu cuaderno. Al final de la actividad escribe una conclusión sobre el avance de tu aprendizaje en la división sintética.

I. Usa la división sintética y el teorema del residuo para evaluar *P(c)*.

1. $p(x) = 4x^2 + 12x + 5 \qquad c = -1$

2. $p(x) = 2x^2 + 9x + 1 \qquad c = \dfrac{1}{2}$

3. $p(x) = 5x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 36x + 14 \qquad c = -7$

II. Encuentra un polinomio de grado especificado que tenga los ceros dados.

4. Grado 4: ceros −1, 1, 3, 5

5. Grado 5: ceros −2, -1, 0, 1, 2

Conclusiones:

....

....

....

....

....

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Teorema fundamental del álgebra

Este teorema es de gran importancia dentro del estudio de las ecuaciones. Encontrar los ceros o raíces de una ecuación representa encontrar todos los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

Carl Friedrich Gauss fue uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Contribuyó a muchas ramas de las matemáticas. En 1798, a los 20 años de edad, demostró su teorema que dice lo siguiente:

> *Teorema fundamental del álgebra.* Todo polinomio de grado *n* tiene *n* raíces.

Es decir que la ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \; con \; a_n = 0$$

tiene *n* soluciones

Una forma en la que podemos interpretar este teorema es como sigue, ya que se puede factorizar un polinomio dadas las raíces y hay *n* raíces para todo polinomio de este grado, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= (x - r_1)\,(x - r_2)\ldots(x - r_n) \end{aligned}$$

donde $r_1, r_2 \ldots, r_n$ son las raíces de $f(x)$

La demostración de este teorema queda lejos del objetivo de esta unidad, sin embargo, daremos algunas herramientas para encontrar las *n* raíces.

Con las herramientas analizadas, nos percatamos de que no es necesario el uso de fórmulas para resolver ecuaciones de grado *n*, a lo más nos apoyamos en la fórmula general de la ecuación de segundo grado y en la evaluación, teorema del factor, teorema del residuo, etcétera para resolver ecuaciones de grado dos o mayor.

Por lo que, situaciones matemáticas que pueden ser verdaderamente complicadas, se resuelven por métodos que resultan ser sencillos y de mucha facilidad y, al abordar estas situaciones deben ser individuos capaces de ver la función y bosquejar en sus mentes el comportamiento de la gráfica. Esto es precisamente lo que vas a lograr al término de la presente sección.

Actividad de aprendizaje 3

Instrucciones (1): Explica el procedimiento que debe seguirse paso a paso para determinar los ceros de una función polinomial. Escríbelo en las líneas siguientes:

Instrucciones (2): Encuentren los ceros de cada ecuación polinomial. Escribe el procedimiento y la respuesta en tu cuaderno de trabajo.

a) $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

c) $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

d) $y = 3x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$

e) $y = 4x^5 + 12x^2 - x - 3$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Teorema de factorización lineal

El procedimiento que hemos utilizado para determinar las raíces de un polinomio se ha centrado en la factorizaciónde dicho polinomio y su expresión como la multiplicación de sus factores lineales, de sus factores complejos o una combinación de ellos.

La multiplicidad tiene que ver con el número de factores lineales repetidos o no de cada polinomio. Revisemos los ejemplos:

Si $f(x) = x^2 - 3x - 18 = (x+3)(x-6)$ de acuerdo al análisis con los ceros obtenidos, existen las raíces :

- −3 tiene multiplicidad 1.
- 6 tiene multiplicidad 1.

Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x+2i)(x-2i)(x+2)$; se observa que:

- $-2i$ tiene multiplicidad 1.
- $+2i$ tiene multiplicidad 1.
- 2 tiene multiplicidad 1.

Si $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = (x-2)^3(x+2)$; hay tres raíces iguales, entonces:

- 2 tiene multiplicidad 3.
- −2 tiene multiplicidad 1.
- La multiplicidad es 4 que es equivalente al exponente mayor de la función polinomial.

En general, dado un polinomio en x, se determinan sus ceros o raíces lineales para poder establecer el conteo de las raíces iguales y establecer su multiplicidad.

Por lo tanto:

- La multiplicidad está referida al exponente de cada uno de los factores lineales o complejos de un polinomio.

- La suma de las multiplicidades de las raíces es equivalente con el grado del polinomio.
- Se hace uso del teorema del factor y de la división sintética.

Actividad de aprendizaje 4

Instrucciones: En equipos encuentren los ceros de cada ecuación polinomial. Determinen la multiplicidad en cada caso y compruébenla con el grado del polinomio. Comparen sus respuestas con sus demás compañeros. Escriban los procedimientos y las respuestas en su cuaderno.

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$
3. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 - x - 3$
4. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
5. $f(x) = 3x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Gráficas de funciones polinomiales factorizables

Dado el caso de que tanto el dominio como la imagen de la función polinomial sean los números reales, luego entonces los puntos en los que la gráfica corta al eje de las abscisas es una interpretación gráfica de las raíces o ceros de dicha función.

Aun así, las raíces de los polinomios reales no son necesariamente reales; algunas de ellas, pueden ser reales y otras complejas o incluso todas ellas pueden ser complejas.

Una función polinomial no puede tener más ceros que el valor de su grado:

$$f(x) = ax^n \ldots a^n \text{ tendrá } n \text{ ceros o raíces}$$

Analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Determinar los ceros de la función $f(x) = x^2 - 4$

Solución:

- *Por tabulación:*

$$f(x) = x^2 - 4\text{, con } D(x) = -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

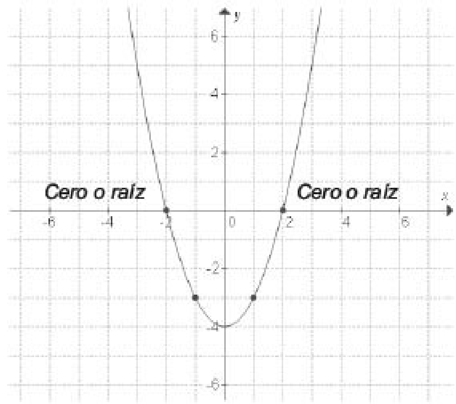
x	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*5*	*0*	*-3*	*-4*	*-3*	*0*	*5*

- *Por factorización:*

$$f(x) = (x+2)(x-2)\text{, por lo tanto } x_1 = -2 \quad y \quad x_2 = 2$$

La gráfica se muestra a continuación.

- *Tenemos una parábola que tiene por eje de simetría el eje de las "y".*
- *El intercepto con el eje "y" es el punto (0,-4).*
- *Los interceptos con el eje x, ceros o raíces: (0,-2) y (0,2).*



Ejemplo 2: Determinar los ceros de $f(x) = x^3 - 8$

Solución:

Evaluando factores de −8: (2,−4), (−2,4), (1,−8) y (−1,8).

Para $x = 2$*:* $(2)^3 - 8 = 8 - 8 = 0$*, por lo tanto* $x^3 - 8$ *es divisible entre* $x - 2$

Completamos el polinomio para resolver por división sintética: $1x^3 + 0x^2 + 0x^1 - 8x^0$

1	0	0	−8	
	2	4	8	2
1	2	4	0	

$$f(x) = x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

El trinomio $(x^2 + 2x + 4)$ *no es factorizable, por lo tanto resolveremos utilizando la fórmula general de una ecuación de segundo grado:*

Llevada a la forma $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$*, cuyos parámetros:* $a = 1$*;* $b = 2$ $c = 4$*.*

Aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2}{2} \pm \frac{2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

Continúa...

En conclusión:

$$f(x)=x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)=(x-2)\left[x-\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right]\left[x-\left(-1+\sqrt{3}i\right)\right]$$

Es decir:

$$x=2;\ x=-1+\sqrt{3}i;\ x=-1-\sqrt{3}i$$

Un cero o raíz real y dos raíces complejas.

Actividad de aprendizaje 5

Instrucciones: Encuentren las raíces complejas de cada función polinomial. Comparen sus respuestas con sus demás compañeros.

1. $f(x)=x^2+81$
2. $f(x)=9x^2+12x+6$
3. $f(x)=x^2+2x+4$
4. $f(x)=x^3-3x^2-4x-30$
5. $f(x)=x^5+x^4+x^3-x^2-x-1$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Cierre del bloque V

Reflexiona sobre lo aprendido

En el bloque anterior y en el presente hemos recorrido de un modo básico el trabajo con funciones polinomiales de grado n. si bien es cierto que los polinomios se vuelven más complejos a medida que su grado se incrementa, también es cierto que las herramientas disponibles para el trabajo con ellos son abundantes y, sobre todo, la combinación de estas produce elementos todavía más útiles para analizar el comportamiento de funciones polinomiales.

En este punto, y antes de cerrar el bloque, reflexiona acerca del antes y el después de conocer dichas herramientas. Utiliza las siguientes preguntas para ayudarte a dicha reflexión:

- ¿Conozco y empleo diversas formas de factorizar polinomios?
- ¿Determino los ceros racionales de una función polinomial a través de herramientas distintas a la factorización lineal?
- ¿Combino eficientemente las reglas y teoremas para determinar ceros de un polinomio?
- ¿Bosquejo mentalmente la gráfica de un polinomio con la ayuda de los ceros racionales que determino?

Comparte el producto de tus reflexiones con tu docente y grupo; observa los resultados de tus compañeros y contrasta con los tuyos todos los elementos recopilados.

Autoevaluación

Instrucciones: Lee los siguientes ejercicios para encontrar las soluciones de cada uno de ellos, realizando las anotaciones necesarias en tu cuaderno con orden y limpieza. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase, escucha y respeta las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

1. Encontrar los ceros o raíces de la función $f(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 27x - 9$

2. Hallar el cociente y el residuo de $2x^4 + x^3 - 16x^2 + 18x$ entre $x + 2$

3. Dada $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, trazar su gráfica, determinar los ceros, marcar sus interceptos con el eje y (si los hay) y expresar la multiplicidad de sus raíces.

4. Determinar la multiplicidad de ceros o raíces y los factores lineales del polinomio:

$$p(x) = x^5 - 6x^4 + 15x^3 - 30x^2 + 44x - 1$$

5. Determinar el número de raíces de la ecuación:

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24 = 0$$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior obtuviste 5 aciertos considera tu resultado como *excelente*, de 4 aciertos como *bien,* 3 aciertos *regular* y si tus respuestas correctas fueron menos de 3 considera tu desempeño como *no suficiente*, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

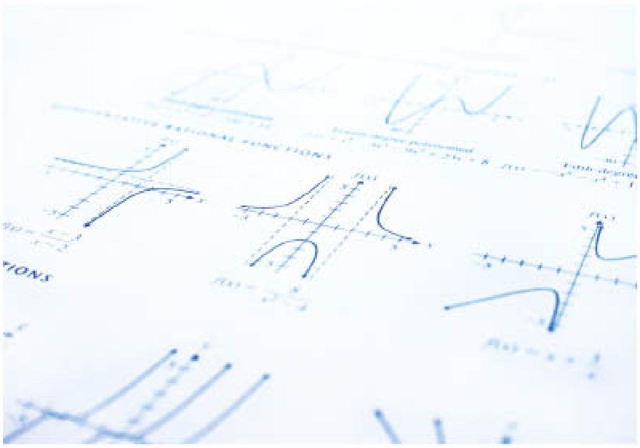
¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Bloque VI

Aplicas funciones racionales

Introducción

Tomando como base el estudio de las funciones polinomiales se introducen las funciones racionales y se obtienen las principales características de las mismas, el bloque inicia con el estudio de algunos problemas cuyo modelo matemático son funciones racionales, lo que permite pasar posteriormente a estudiar otras características de las funciones.



¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque VI

Tiempo 8 horas

Contenidos curriculares que se abordan

1. Funciones racionales.
   - Concepto de función racional.
   - Dominio de una función racional.
   - Rango de una función racional.
   - Gráficas de funciones racionales.
   - Modelado y solución de problemas con funciones racionales.

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

Evaluación del aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias.

- *Actividad de aprendizaje 1*. Análisis de funciones racionales.
- *Actividad de aprendizaje 2*. Solución de problemas con funciones racionales.
- *Actividad de aprendizaje 3*. Aplicación de la variación inversa.
- *Autoevaluación*.

Para iniciar, reflexiona

Dado que las funciones racionales son divisiones de funciones, debemos tener cuidado con el valor del denominador. ¿Qué pasa si intentamos realizar una división entre cero?

....

....

....

Aprende más

Funciones racionales

Concepto de función racional

Las funciones racionales son las que expresan el cociente de expresiones polinomiales como fracciones donde el denominador (divisor) sea de grado mayor que cero. La expresión general de una función racional es:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ donde el grado de } Q(x) \text{ debe ser mayor que cero.}$$

$$\text{Un ejemplo es } f(x)=\frac{2x}{x-4}$$

Dado que las funciones racionales son divisiones de funciones, debemos tener cuidado con el valor del denominador. ¿Qué pasa si intentamos realizar una división entre cero?

Analiza el comportamiento de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ con base en la tabla 6.1.

Tabla 6.1.

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	...	0
$g(x)$	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	...	∞

Puedes darte cuenta de que, a medida que x se aproxima a cero, el resultado de la división es una cantidad cada vez más grande. Si seguimos añadiendo celdas a la tabla, ¿cuál sería el valor de f para $x = 0$? Pues bien, dado que las divisiones entre cero no existen, entonces tampoco existe un valor asociado a f cuando $x = 0$. Del análisis anterior concluimos que la función f va tomando valores cada vez más grandes, y eso se dice que tiende a infinito cuando x tiende a cero, pero este tema es objeto de estudio de un curso de cálculo diferencial. Por ahora nos limitaremos a describir gráficamente lo que sucede con una función racional cuando el denominador se anula.

Dominio de una función racional

Las funciones sólo pueden relacionar valores reales para x con valores reales para y, de modo que la división entre cero no está permitida para una función. Esto da la pauta para explicar la forma en que se determinan los valores del dominio de la función. Ya que en el dominio de la función (*Domf*) sólo pueden estar los valores de x que producen valores reales en f, entonces debemos excluir del dominio aquellos valores de x que provoquen división entre cero, es decir, la condición que deben cumplir los valores de la variable x para pertenecer a *Domf* es que:

$$Q(x) \neq 0$$

Para entender este concepto, analizaremos primero la existencia de asíntotas.

Asíntotas verticales. Los valores que hacen que $Q(x) = 0$, es decir, los ceros de $Q(x)$ se llaman asíntotas verticales de una función racional y representan gráficamente líneas rectas verticales que la gráfica de f no corta, pero que tienen la propiedad de llevar la gráfica de f hacia un valor y que tiende a $+\infty$ o $-\infty$. Se grafican como líneas punteadas.

> Así, el *dominio de una función racional* es el conjunto de todos los números reales excepto los ceros de $Q(x)$.

Las asíntotas verticales tienen como ecuación $x = x_i$, donde x_i representa los ceros de $Q(x)$ como los valores x_1, x_2, ... que hacen que $Q(x) = 0$

Asíntotas horizontales. Una función racional también puede tener asíntotas horizontales, que son líneas rectas horizontales que llevan la gráfica de f hacia el infinito (positivo o negativo) horizontalmente. Estas asíntotas pueden determinarse analizando el comportamiento de la gráfica de f cuando aproximamos el valor de x a $\pm\infty$. Aunque esto es tema de cálculo diferencial, asignatura que cursarás posteriormente, es posible tratar un método intuitivo del límite de la función f cuando la variable x toma valores cada vez más cercanos a $\pm\infty$.

Considera ahora que a partir de $g(x)=\frac{1}{x}$ se construye la tabla 6.2 en la siguiente página.

Tabla 6.2.

x	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	...	∞
$g(x)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	...	0

Puedes darte cuenta de que, a medida que x se aproxima a ∞, el resultado de la división es una cantidad cada vez más cercana a cero. Así, la función racional tiene asíntotas horizontales si, al aproximar el valor de x a infinito (positivo y negativo), el valor de $f(x)$ se aproxima a un valor real L, de modo que la gráfica de f no corte la recta $y = L$, que es la ecuación de la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. Si el grado de $P(x)$ es mayor en una unidad que el grado de $Q(x)$, es decir:

$$grado\big(P(x)\big)-grado\big(Q(x)\big)=1$$

Entonces la función tiene además una asíntota oblicua, por ejemplo:

$$f(x)=\frac{x^2-8}{x+3}$$

Las asíntotas oblicuas se obtienen realizando la división algebraica indicada en f, y el cociente de la división es la ecuación de la asíntota oblicua.

Así, en $f(x)=\frac{x^2-8}{x+3}$ tenemos:

$$\begin{array}{r|l} & \quad x-3 \\ \hline x+3 & \cancel{x^2} \qquad -8 \\ & \underline{-\cancel{x^2}-3x\quad} \\ & \quad -\cancel{3x}-8 \\ & \quad \underline{\cancel{3x}+9} \\ & \qquad\quad 1 \end{array}$$

De donde $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x+3}$

La asíntota oblicua es $y = x - 3$
Esta función también tiene una asíntota vertical en $y = x - 3$

Su gráfica es:

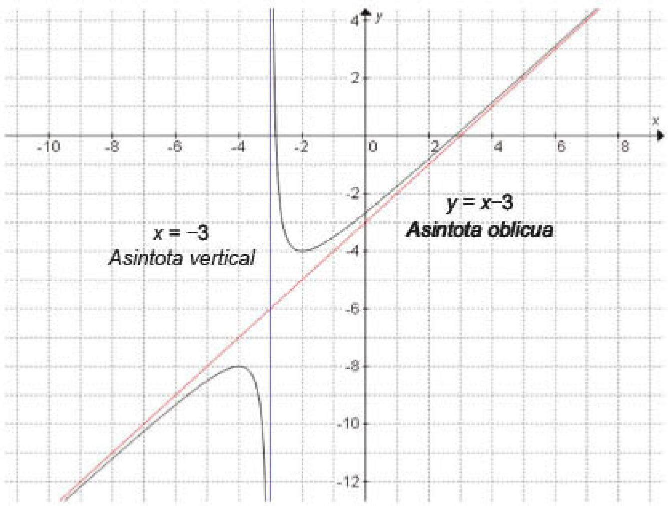


Figura 6.1.

Rango de una función racional

Para determinar el rango de la función, es necesario cambiar *f*(*x*) por y en la expresión funcional y, si es posible, despejar la variable *x*.

En caso de que sea posible tal despeje, tendremos una función *x* = *R*(*y*), de modo que:

$$\text{el rango de } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ es igual al dominio de la función } R(y)$$

Si descubres asíntotas verticales para *R*(*y*), éstas serán asíntotas horizontales para *f*(*x*). Esto puedes comprobarlo con el procedimiento de aproximación al infinito explicado antes.

Es importante que sepas que el cálculo del dominio de una función implica conocimientos algebraicos previos, entre los cuales se encuentra el tema de *desigualdades* o *inecuaciones* que, de manera simple, fueron abordados en cursos anteriores.

No siempre es posible el despeje, de modo que el rango de una función racional no siempre se puede determinar.

Las intersecciones con los ejes coordenados se obtienen mediante las expresiones:

- I_x: $f(x) = 0$, es decir, se buscan los ceros de f, que son las abscisas de las intersecciones con el eje X. Esto sólo es posible si en el rango de la función (*Rangof*) está contenido el valor de $y = 0$; en caso de no ser así, entonces la gráfica de f no tiene intersecciones con el eje X.

Es fácil comprender que los ceros de $P(x)$ son los ceros para $f(x)$, de modo que basta calcular los ceros de $P(x)$ mediante la solución de la ecuación $P(x) = 0$.

- I_y: $y = f(0)$, es decir, se sustituye el valor $x = 0$ si este valor pertenece a *Domf* en la función f y los resultados obtenidos son las ordenadas de las intersecciones con el eje Y.

Para comprender este análisis se aplicará de forma directa en los siguientes ejemplos de gráfica de funciones racionales.

Gráficas de funciones racionales

Para graficar una función racional, se sigue el procedimiento que se explica con el ejemplo inicial.

Procedimiento	**Ejemplificación**
Partimos de la función: $$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$	Ejemplo: $$f(x)=\frac{2x}{x-4}$$
1. Buscar asíntotas verticales:	
a) $Q(x)=0$ para obtener $x_1, x_2, \ldots$	$x-4=0$ $x_1=4$ **(1)**
b) Las asíntotas verticales tienen ecuaciones: $x = x_i$, para $i = 1, 2, \ldots$	Asíntota vertical: $x=4$

2. Determinar el dominio de la función quitando del conjunto de los números reales los valores de *x* donde hay asíntotas verticales.

$$Domf = \mathbb{R} - \{4\}$$

o bien

$$Domf = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

usando notación de intervalos **(2)**

3. Cambiar $f(x)$ por la variable y.

$$y = \frac{2x}{x-4} \qquad \textbf{(3)}$$

4. Despejar, si es posible, la variable *x*.

$$y(x-4) = 2x \qquad \textbf{(4)}$$

$$xy - 4y - 2x = 0$$

$$xy - 2x = 4y$$

$$x(y-2) = 4y$$

$$x = \frac{4y}{y-2}$$

5. Obtener la función $R(y)$ y su dominio.

$$R(y) = \frac{4y}{y-2} \qquad \textbf{(5)}$$

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

$DomR = \mathbb{R} - \{2\}$ o bien,

$DomR = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ en notación de intervalos.

6. $Rangof = DomR$

$$Rangof = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) \qquad \textbf{(6)}$$

7. Asíntotas horizontales

   a) Como asíntotas verticales $R(y)$

   b) Por aproximación x a ±∞

   No es necesario realizar ambos procedimientos. Si no es posible a), entonces debes realizar b).

a) Asíntota horizontal: $y = 2$ **(7)**

b) Para comprobar solamente:

$$f(x) = \frac{2x}{x-4} = \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x-4}{x}} = \frac{2}{1-\frac{4}{x}}$$

Cuando x se aproxima a infinito x/4 se aproxima a cero, por lo que puede afirmarse que hay una asíntota horizontal en *y* = 2. Que resulta ser lo mismo que en a).

8. Si $grado[P]-grado[Q]=1$, la función tiene asíntota oblicua, que se obtiene por la división algebraica de *P* entre *Q*.

Dado que los grados de $2x$ y $x-4$ son iguales a 1, $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas. **(8)**

$$R(y)=\frac{4y}{y-2} \quad \textbf{(9)}$$

$$R(0)=\frac{4(0)}{0-2}=0$$

9. Intersecciones con el eje X: sustituir $y = 0$ (puede ser en $R(y)$) si $y = 0$ pertenece *Rangof.*

o alternativamente

$$P(x)=2x=0$$
$$x=0$$
$$I_X:(0,0)$$
$$I_X:(0,0)$$

$$f(x)=\frac{2x}{x-4} \quad \textbf{(10)}$$

10. Intersecciones con el eje Y: sustituir $x = 0$ en $f(x)$. Si $x = 0$ pertenece a *Domf.*

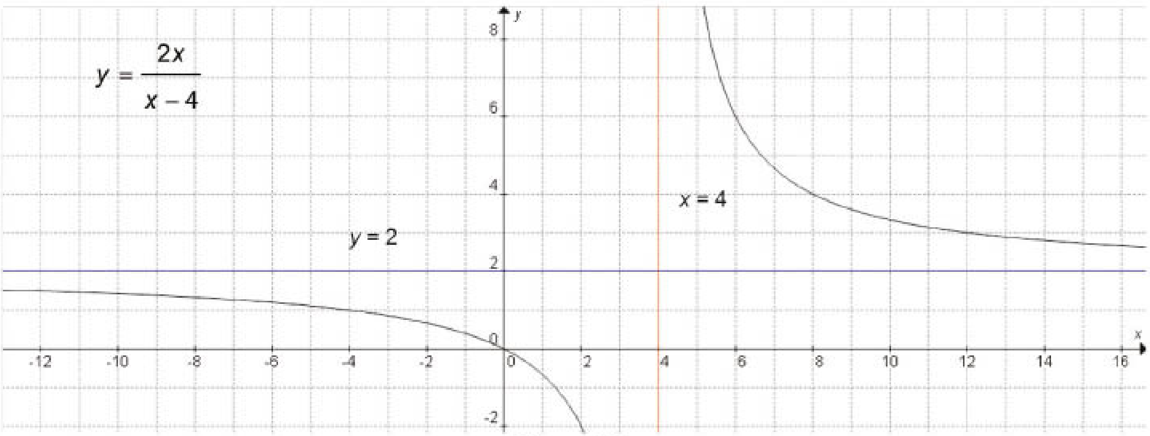
$$f(0)=\frac{2(0)}{0-4}=0$$
$$I_Y:\quad(0,0)$$

11. Tabular en caso de ser necesario.

12. Graficar.

x	$f(x)=\frac{2x}{x-4}$
-4	$\frac{2(-4)}{-4-4}=\frac{-8}{-8}=1$
2	$\frac{2(2)}{2-4}=\frac{4}{-2}=-2$
6	$\frac{2(6)}{6-4}=\frac{12}{2}=6$
8	$\frac{2(8)}{8-4}=\frac{16}{4}=4$

(11)



(12)

Figura 6.2.

Ejemplo 1: Analiza la función $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ y bosqueja su gráfica.

Solución:

Cálculo de asíntotas verticales:

$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

$$\text{Dominio: } Domf = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

Cálculo del rango:

$$y = \frac{x+3}{x-3}$$
$$xy - 3y = x + 3$$
$$xy - x = 3 + 3y$$
$$x(y-1) = 3(1+y)$$
$$x = R(y) = \frac{3(1+y)}{y-1}$$
$$y - 1 = 0$$
$$\text{Asíntota horizontal: } y = 1$$
$$DomR = Rangof = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

Intersecciones con el eje X:

$$R(0) = \frac{3(1+0)}{0-1} = -3$$
$$I_x : (-3, 0)$$

Continúa...

Intersecciones con el eje Y:

$$f(0)=\frac{0+3}{0-3}=-1$$
$$I_Y:(0,-1)$$

Tabulación:

x	$f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$
2	$\dfrac{2+3}{2-3}=\dfrac{5}{-1}=-5$
4	$\dfrac{4+3}{4-3}=\dfrac{7}{1}=7$
9	$\dfrac{9+3}{9-3}=\dfrac{12}{6}=2$

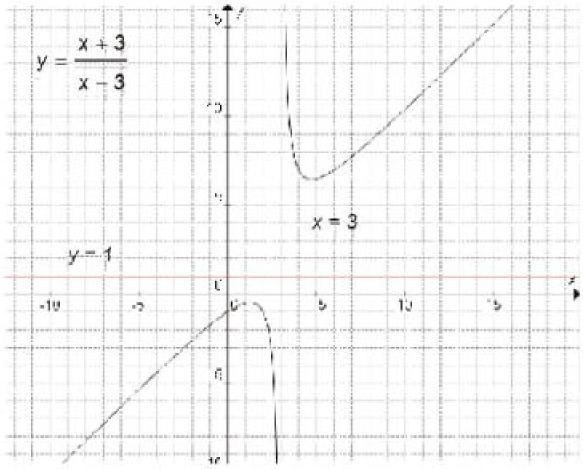


Figura 6.3.

Ejemplo 2: Analiza la función $f(x)=\dfrac{5}{x^2-9}$ y bosqueja su gráfica.

Solución:

Cálculo de asíntotas verticales:

$$x^2-9=0$$
$$(x+3)(x-3)=0$$
$$x_1=-3 \quad x_2=3$$

Dominio: $Domf=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

Cálculo del rango:

$$y=\frac{5}{x^2-9}$$
$$x^2y-9y=5$$
$$x^2y=5+9y$$
$$x^2=\frac{5+9y}{y}$$

$$x=R(y)=\sqrt{\frac{5+9y}{y}}$$

Para que $R(y)$ tenga resultados reales, se debe cumplir que:

1. $y \neq 0$ (asíntota horizontal en el eje X)

2. $\dfrac{5+9y}{y} \geq 0 \qquad y \geq -\dfrac{5}{9}$

$5+9y \geq 0 \qquad 9y \geq -5$

Y es positivo (o cero) para valores mayores (o iguales) a $-\dfrac{5}{9}$*, de modo que:*

Si $y < -\dfrac{5}{9}$, $\dfrac{5+9y}{y} \geq 0$

Si $y = -\dfrac{5}{9}$, $\dfrac{5+9y}{y} = 0$

Si $y > -\dfrac{5}{9}$ *y* $y > 0$*, es decir, cuando* $y > 0$*, tenemos que* $\dfrac{5+9y}{y} > 0$

Asíntota verticales: y = 0 (eje X). No hay intersecciones con el eje X porque y = 0 está fuera de Rangof.

Intersecciones con el eje Y:

$$f(0) = \frac{5}{(0)^2 - 9} = -\frac{5}{9}$$

$$I_Y : \left(0, -\frac{5}{9}\right)$$

$$DomR = Rangof = \left(-\infty, -\frac{5}{9}\right] \cup (0, \infty)$$

Tabulación:

x	$f(x) = \dfrac{5}{x^2-9}$
-4	$\dfrac{5}{x^2-9} = \dfrac{5}{16-9} = \dfrac{5}{7}$
-2	$\dfrac{5}{x^2-9} = \dfrac{5}{4-9} = -1$
2	$\dfrac{5}{x^2-9} = \dfrac{5}{4-9} = -1$
4	$\dfrac{5}{x^2-9} = \dfrac{5}{16-9} = \dfrac{5}{7}$

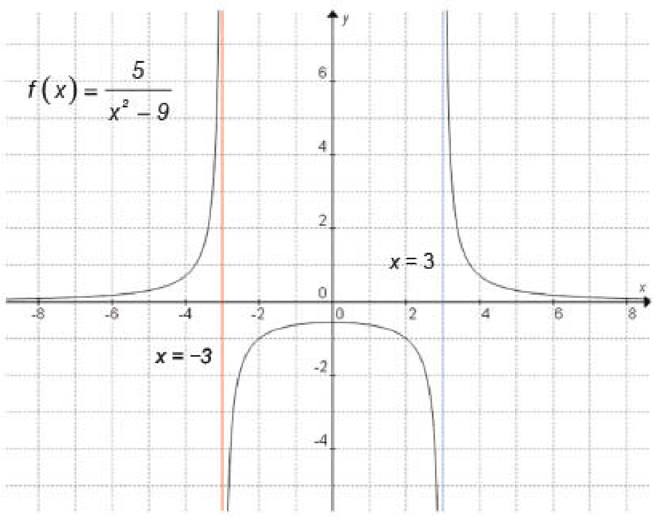


Figura 6.4.

Ejemplo 3: Analiza la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ y bosqueja su gráfica.

Solución:

Cálculo de asíntotas verticales:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{(x-2)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=\frac{x-2}{x+2} \qquad \begin{aligned} x+2&=0\\ x&=-2\end{aligned}$$

$$\text{Dominio: } Domf=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$$

Calculo del rango:

$$\begin{aligned} y&=\frac{x-2}{x+2}\\ xy+2y&=x-2\\ xy-x&=-2-2y\\ x(y-1)&=-2(1+y)\end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1-y&=0\\ y&=1\end{aligned}$$

$$DomR=Rangof=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$$

Intersecciones con el eje X:

$$R(0)=\frac{2(1+0)}{1-0}=2$$

$$I_X:(2,0)$$

Intersecciones con el eje Y:

$$f(0)=\frac{(0)^2-4(0)+4}{(0)^2-4}=-1$$

$$I_Y:(0,-1)$$

Tabulación:

x	$f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
-4	$\dfrac{(-4)^2-4(-4)+4}{(-4)^2-4}=\dfrac{36}{12}=3$

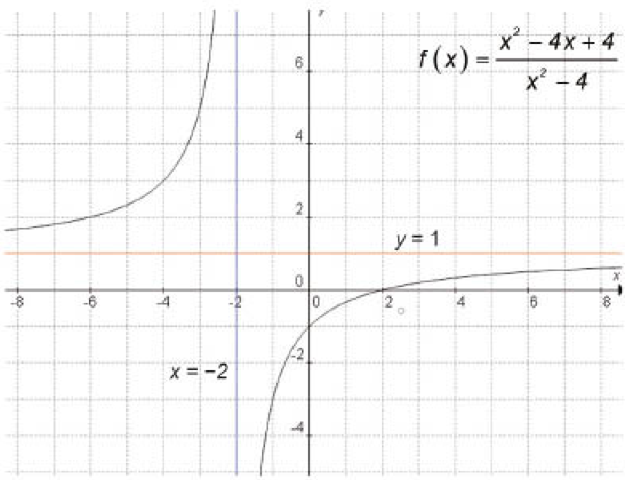


Figura 6.5.

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones (1): Analiza las funciones siguientes y bosqueja su gráfica. Realizalo en tu libreta, registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

a) $f(x)=\dfrac{3x^2}{1-x}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{2x}{4-x^2}$

e) $f(x)=-\dfrac{2x^3-5}{x^2-3}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta las respuestas en el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Sabías que...

Es posible visualizar funciones en un gran número de formas que observas en tu entorno, ya que el desarrollo de funciones racionales permite describir patrones de estas formas de manera que se expresan en un lenguaje matemático.

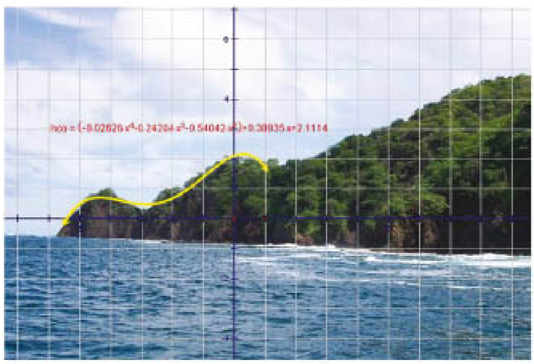


Figura 6.6.

Aprende más

Modelado y solución de problemas con funciones racionales

Las funciones racionales encuentran su aplicación principalmente en problemas de variación inversa, es decir, en relaciones donde el valor de una variable aumenta cuando el valor de otra variable disminuye y viceversa. Por ejemplo, si una obra de construcción la realizan 4 obreros en 5 días, ¿cuántos días necesitarán 10 obreros? Si aumenta la cantidad de obreros, el tiempo para terminar la misma obra deberá ser menor. Aquí la cantidad de obreros y el tiempo para terminar la obra son variables en una relación de variación inversa.

Otro ejemplo lo encontramos en la *ley de gravitación universal* de Newton, que enuncia que "dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional a la distancia r entre ellos", es decir, la fuerza de atracción gravitacional está dada por la expresión:

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ donde $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \dfrac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$ es la *constante de gravitación universal.*

A partir de la expresión anterior, a mayor distancia de separación, menor será la fuerza de atracción y viceversa.

Un ejemplo más lo encontramos en la ley de los gases ideales, que establece que "el producto de la presión y el volumen de un gas ideal es directamente proporcional a su temperatura absoluta", es, decir:

$PV = nRT$ donde $R = 0.082\ \dfrac{\mathrm{atm \cdot L}}{\mathrm{mol \cdot K}}$ es la *constante universal de los gases ideales.*

¿Cómo varía el volumen de un gas ideal si mantenemos su temperatura y aumentamos su presión? De la expresión anterior despejamos el volumen:

$$V = \frac{nRT}{P}$$

Nos damos cuenta de que la variación entre el volumen y la presión de un gas ideal es inversa: a mayor presión disminuye el volumen y viceversa.

Otras aplicaciones las encontramos en el estudio del movimiento, el crecimiento de poblaciones, la depreciación de bienes, geometrías arquitectónicas, diseño de motores, etcétera.

Ahora te presentamos algunos ejemplos que ilustran la forma de emplear lo estudiado sobre las funciones racionales en la solución de problemas de variación inversa.

Ejemplo 1: Si *x* hombres están disponibles para realizar una obra que 4 hombres realizan en 5 días, ¿cuál es la función del tiempo que realizarán dependiendo del valor de *x*? ¿Qué tiempo les llevará a 10 hombres realizar la misma obra?

Solución:

$t = \frac{k}{x}$ *es la relación de variación inversa entre t y k, donde t está dada en días*

Cuando x = 4, t = 5, por lo que k = tx = 5(4) = 20

Así que el modelo de variación del tiempo con respecto a la cantidad de hombres es:

$$t(x) = \frac{20}{x}$$

Esta función tiene asíntota en x = 0 (eje Y), por lo que no tiene intersección con el eje Y. Dado que P(x) = 20 es la función constante, la función no corta al eje X. Su gráfica es:

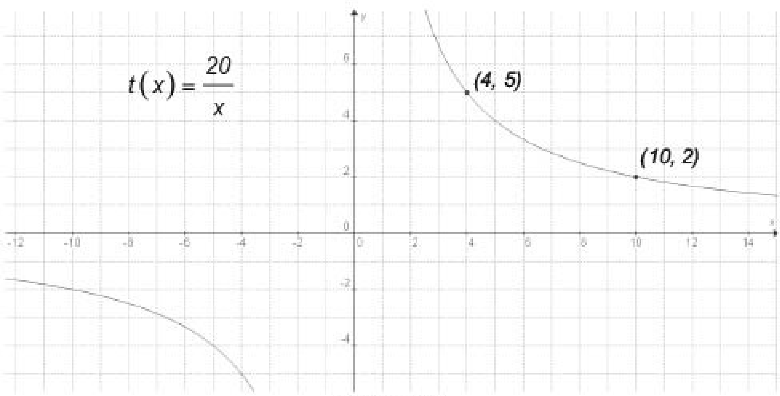


Figura 6.7.

Para x = 10 se tiene que: $t(10) = \frac{20}{2} = 10$

Que significa que a 10 hombres les llevarán 2 días realizar la obra.

Ejemplo 2: Un gas a 25°C tiene comportamiento ideal. ¿Cuál es la función de variación del volumen molar (n = 1) con respecto al cambio de presión de dicho gas? ¿Qué volumen tendrá dicho gas si se somete a una presión de 2 atmósferas?

Solución:

$$PV = nRT$$

$$V(P) = \frac{nRT}{P} = \frac{(1)(0.08205)(25 + 273.15)}{P}$$

$$V(P) = \frac{24.4632075}{P}$$

Asíntota en P = 0 (eje Y), por lo que no hay asíntotas con el eje Y.

Tampoco hay intersecciones con el eje X.

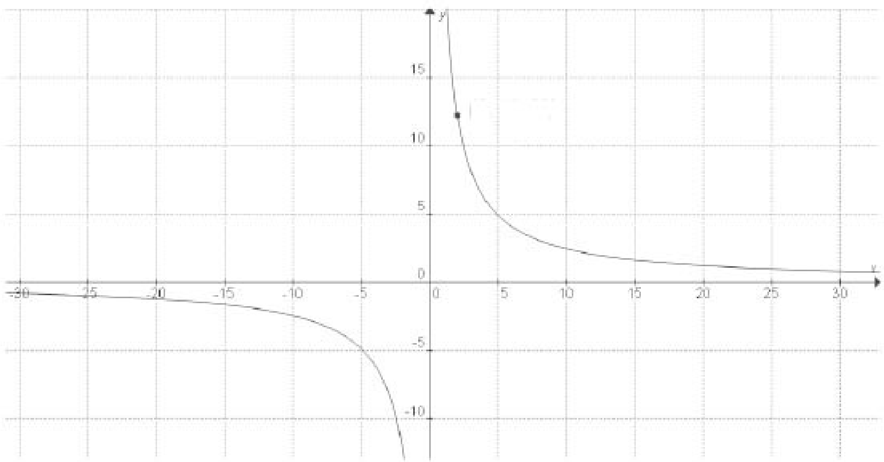


Figura 6.8.

El volumen del gas es de 12.23 litros a una presión de 2 atmósferas.

Ejemplo 3: El cambio de posición en metros de un objeto respecto al tiempo del movimiento (t), está dado por la expresión

$$s(t) = 2t^2 - 5t + 2$$

Determina la función de su velocidad. ¿Qué velocidad tendrá el objeto a los 10 segundo de iniciado su movimiento?

Solución:

$$v(t) = \frac{s(t)}{t}$$

$$v(t) = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t}$$

Asíntota vertical en t = 0 (eje Y). No hay intersecciones con el eje Y.
Para hallar la asíntota oblicua:

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{t} = 2t - 5 + \frac{2}{t}$$

$$A_{oblicua} : y = 2t - 5$$

Para encontrar intersecciones con el eje X:

$$s(t) = 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$d = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = 2$$

$$I_X : \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (2, 0)$$

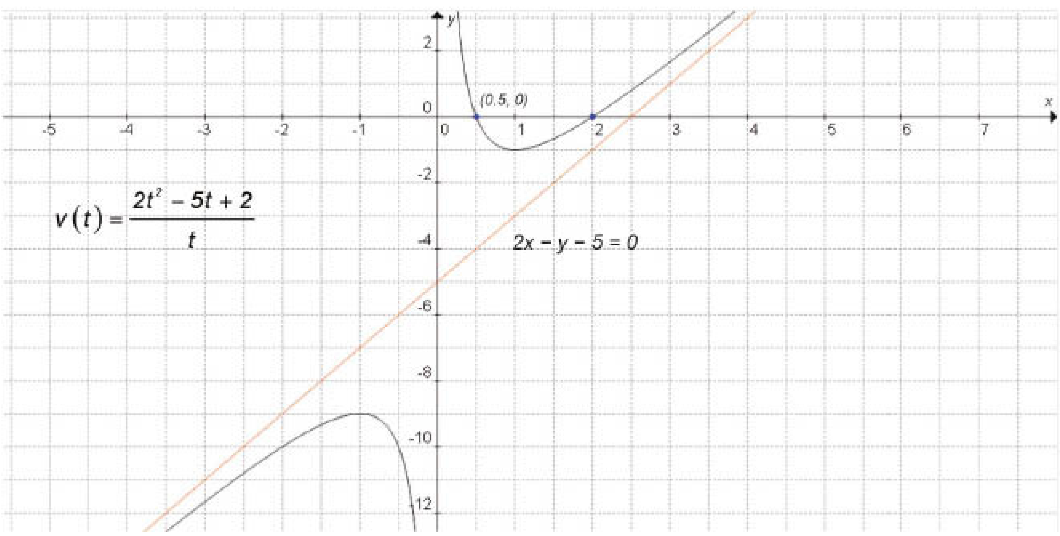


Figura 6.9.

Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas en tu libreta. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase. Resuelve los siguientes problemas:

a) Determina el modelo de variación del tiempo que requieren *x* obreros para realizar una tarea que 4 obreros realizan en 7 días. Analiza la función obtenida y traza su gráfica ¿Qué tiempo requieren 15 obreros para realizar la tarea?

b) La ley de Ohm expresa la relación entre intensidad de corriente (I, en amperes), voltaje (V, en voltios) y resistencia (R, en ohm), con la expresión $V = IR$. Si en un circuito particular el voltaje se considera constante e igual a 110 V, determina el modelo de variación de la corriente con respecto a la resistencia. Analiza la función obtenida y traza su gráfica. ¿Qué corriente en amperes se tendrá para una resistencia total de 300 ohms?

c) La presión que ejerce una fuerza sobre una superficie está dada por la expresión

$$P = \frac{F}{A}$$

Donde P se expresa en pascales (Pa), F en newtons (N) y A en metros cuadrados (m^2). Determina la función de variación de la presión que ejerce una fuerza de 150 N sobre distintas áreas. Analiza la función obtenida y traza su gráfica. ¿Qué presión se ejerce sobre una superficie de 2π m^2?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta las respuestas en el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad de aprendizaje 3

Recordemos que dos cantidades mantienen una relación de variación directa cuando ambas crecen o decrecen juntas. Si k representa la constante de proporcionalidad, la relación se puede representar como $y = kx$. A diferencia de la variación directa, en la variación inversa, si x crece, y decrece y viceversa. Esto es:

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{o bien} \quad xy = k$$

Donde el producto (k) resulta ser la constante de variación y ni ésta ni x pueden ser cero ($k \neq 0$; $x \neq 0$).

Instrucciones: Realiza una investigación sobre el tema de variación inversa:

1. En equipos conformados de acuerdo a las instrucciones de tu profesor, elaboren mapas conceptuales sobre el tema de variación inversa como caso particular de la función racional en hojas de rotafolio o cartulinas y explíquenlos a sus compañeros de clase.

2. Cada equipo deberá entregar al profesor evidencia de su investigación y una conclusión que describa la importancia del trabajo realizado y sus aplicaciones en la solución de problemas cotidianos en distintos ámbitos: social, político, científico, etc.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta las respuestas en el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Cierre del bloque VI

Reflexiona sobre lo aprendido

Al final del presente bloque ya cuentas con nuevos elementos de aprendizaje para que poco a poco te apropies de ellos y puedas trabajar y aplicar funciones racionales a situaciones teóricas, pero también a algunas situaciones reales.

Con estos elementos, te invito a que investigues acerca de algún tipo de aplicación de funciones racionales y comparte la información con tu docente y grupo.

Cuestiónense acerca de la utilidad de estar desarrollando estos aprendizajes y la importancia de manejarlos adecuadamente. Al final presenta a tu docente las observaciones del trabajo realizado para realimentar tu aprendizaje en cuanto a funciones racionales

Como recordarás, en el desarrollo de este bloque VI se propuso la elaboración de una investigación que consiste en realizar actividades relacionadas con la variación directa. Toma en cuenta que el proyecto deberá cumplir con las especificaciones que se te pidieron. Ha llegado la hora de hacer la exposición frente al grupo.

Autoevaluación

Instrucciones: Realiza los siguientes ejercicios, anotando en tu libreta los procedimientos completos con un orden y limpieza, como evidencia del análisis y solución del problema.

1. Determina la función de la recta que pasa por los puntos (−5, 3) y (0, −4) y traza su gráfica.
2. Analiza la función $f(x) = 6x^2 - 6x - 36$ y traza su gráfica.
3. Analiza la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y traza su gráfica.
4. Explica el comportamiento de la gráfica de $f(x) = x^7 + 3$
5. Analiza la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$ y traza su gráfica.

6. Una computadora que se compró hace 6 años cuesta 1850 pesos. Si hace 4 años su precio era de 3500 pesos, ¿cuál es el modelo de depreciación del precio de la computadora en el tiempo? ¿Cuánto costó la computadora cuando era nueva?

7. Determina el área máxima del terreno rectangular que se puede cercar con 248 metros de reja.

8. Determina el modelo de variación del tiempo que requieren x alumnos para resolver los problemas de un examen de matemáticas si se sabe que un equipo de 5 alumnos resuelve el examen en 30 minutos. Analiza la función obtenida y traza su gráfica. ¿Qué tiempo requiere un alumno para resolver el examen él solo?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta las respuestas en el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior lograste los *8 puntos*, considera tu resultado como *Excelente*, y si lograste *7 a 8 puntos* es *Bien*, de *5 a 6 es Regular* y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como *No suficiente*, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Bloque VII

Utilizas funciones exponenciales y logarítmicas

Introducción

Las funciones exponenciales y logarítmicas se emplean en diferentes sectores, como el económico, el de salud, el de producción, el de población, por mencionar algunos, ejemplo de lo anterior se puede ver en periódicos y revistas donde se menciona la deuda externa de un país, los gastos en servicios de salud, el uso de internet y la población mundial. Donde se observa un crecimiento aun ritmo acelerado en sus indicadores. Algunas de las funciones especiales que se abordarán en este bloque, son la función exponencial natural y la función natural logarítmica. En ambas funciones la base es *e*, un número irracional cuyo valor es aproximadamente 2.7183. Algunos fenómenos, tales como el fechado con carbono en el caso de analizar restos fósiles, el decaimiento radiactivo del comportamiento de un elemento de la tabla periódica y el crecimiento de los ahorros invertidos en una cuenta en la que el interés sea capitalizado de forma continua, pueden describirse por medio de funciones exponenciales naturales.

¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque VII

Tiempo

10 horas

Contenidos curriculares que se abordan

1. Concepto de función exponencial.
    - Gráficas de funciones exponenciales.
    - Dominio y rango.
2. Función exponencial.
3. Función exponencial natural.
4. Logarítmos comunes y naturales.
    - Logarítmos de otras bases.
    - Propiedades generales de los logarítmos.
    - Concepto de función logarítmica.
    - Dominio y rango.
    - Gráficas de funciones logarítmicas.
5. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Evaluación del aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias.

- *Actividad de aprendizaje 1*. Investigación sobre series y sucesiones numéricas.
- *Actividad de aprendizaje 2*. Función exponencial.
- *Actividad de aprendizaje 3*. Logaritmos comunes y naturales.
- *Actividad de aprendizaje 4*. Función logarítmica.
- *Actividad de aprendizaje 5*. Gráficas de funciones logarítmicas.
- Actividad 6. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
- *Autoevaluación*.

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e Interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Para iniciar, reflexiona

Se deja caer una pelota desde una altura de 10 m. Cuando rebota alcanza la mitad de la altura desde la que se dejó caer. ¿A qué altura se encuentra la pelota después de 5 rebotes? En el recuadro dibuja un esquema que muestre la solución a este problema:

Aprende más

Concepto de función exponencial

En febrero del 2005 adquiriste un auto en $75,000. Si cada año disminuye 13% de su valor inicial, ¿cuánto valdrá en el año 2015? Compara tus resultados con las respuestas de tus compañeros de grupo.

Se denomina *función exponencial* a toda función de la forma:

$$y = a \cdot b^{x} \qquad \text{ó} \qquad f(x) = a \cdot b^{kx}$$

Donde x acepta cualquier valor real, b es un número positivo y distinto de 1 y $a \neq 0$ y $k \neq 0$.

En la definición anterior *b* se conoce como *base* y la variable independiente *x* se conoce como *exponente*.

Gráficas de funciones exponenciales

En forma gráfica, se representa de la siguiente manera:

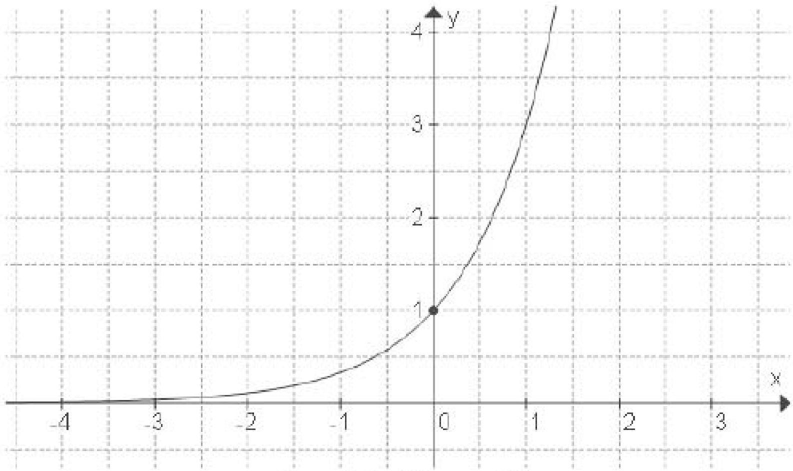


Figura 7.1. $f(x) = a \cdot b^{kx}$

Ejemplo 1: Obtener la gráfica de la función exponencial de base 7.

Solución:

Se calculan los valores de $f(x) = 7^x$

Utiliza una calculadora para hallar los valores que se muestran a continuación:

x	-2	-1.5	-0.5	0	1.2
$f(x)$					

Traza las parejas de coordenadas en el siguiente plano y verifica si pertenecen al gráfico:

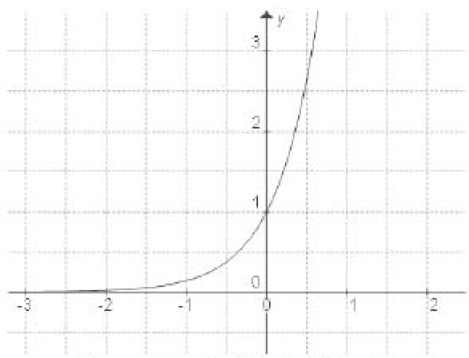


Figura 7.2. Gráfica de $f(x) = 7^x$

Ejemplo 2: Obtener la gráfica de la función exponencial de base $\frac{2}{3}$.

Solución:

Se calculan los valores de $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Utiliza una calculadora para hallar los valores que se muestran a continuación:

x	*−3*	*−2*	*−1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)							

Traza las parejas de coordenadas en el siguiente plano y verifica si pertenecen al gráfico de la figura 7.3.

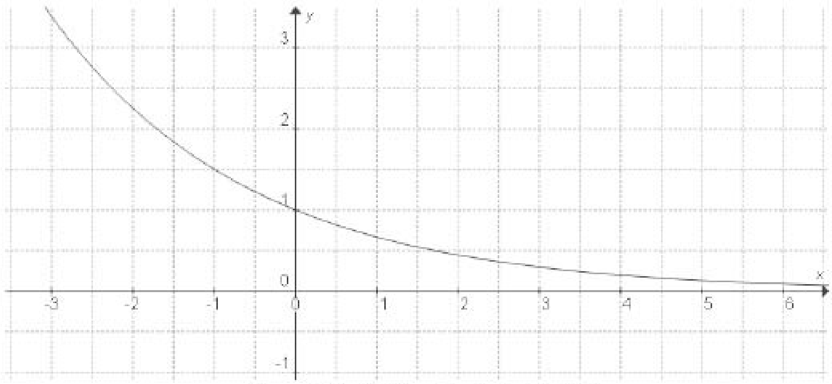


Figura 7.3. Gráfica de $f(x) = (2/3)^x$

Sabías que...

La gráfica de la función exponencial tiene una curvatura característica que hace que la función crezca (presenta crecimiento) si el exponente es positivo $y = b^x$; o bien, si el exponente es negativo tienda a hacerse cero $y = b^{-kx}$ (presenta un decaimiento) o si la base es menor que uno y mayor que cero, esta característica es conocida como *variación exponencial.*

Dominio y rango

Al igual que cualquier otro tipo de funciones, la función exponencial tiene un dominio y un rango para los cuales la función tiene valores reales.

Al analizar la gráfica del ejemplo 1, se observa que la gráfica de la función es continua y que siempre hay una valor de $f(x)$ para cada valor de x, por lo tanto, el *dominio de una función exponencial* es $D = \{x : -\infty < x < \infty\}$ que corresponde a todos los números reales.

Otra característica de esta gráfica es que nunca toma valores negativos en el eje Y por tanto, el *rango de una función exponencial* es $R = \{y : 0 < y < \infty\}$ o bien el conjunto de todos los números reales positivos.

Las funciones exponenciales pueden graficarse seleccionando valores para x, determinando los correspondientes valores de y, y trazando los puntos.

En forma general, para toda función exponencial de la forma $y = a \cdot b^x$ ó $f(x) = a \cdot b^{kx}$ donde $b > 0$ y $b \neq 1$:

- El dominio de la función es $(-\infty, +\infty)$.
- El rango de la función es $(0, +\infty)$.
- La gráfica pasa por los puntos $(-1, a/b)$, $(0, a)$ y $(1, ab)$ .En casi todos los casos, puede trazarse una buena gráfica exponencial a partir de estos puntos.
- Las gráficas de funciones exponenciales son continuas y tienen por asíntota al eje X, es decir, se aproximan a dicho eje sin llegar a tocarlo nunca.
- La gráfica de una función exponencial puede ser creciente o decreciente, según la base b sea mayor o menor que 1 o los valores de su dominio están entre 0 y 1.

La base de las funciones exponenciales no puede ser negativa, pero ¿qué tipo de gráfica resulta si el exponente es negativo?, es decir, qué sucede con las funciones de la forma $y = b^{-x}$ o su equivalente $y = 1/b^x$, por la ley de los exponentes.

Ejemplo 1: Obtener la gráfica de la función exponencial de base 3 y exponente negativo.

Solución:

La función se establece como $f(x) = 3^{-x}$

Se calculan los valores y se obtienen los siguientes resultados. Verifica si los valores obtenidos pertenecen a la gráfica siguiente.

x	f(x)
-2	
-1.5	
-0.5	
0	
0.5	
0.75	
1	

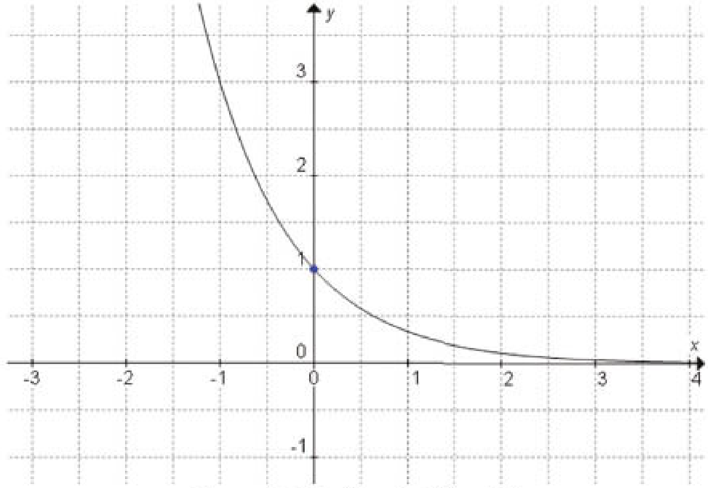


Figura 7.4. Gráfica de $f(x) = 3^{-x}$

En conclusión, podemos asegurar que la gráfica de la función $y = a \cdot b^x$, es creciente si el exponente es mayor que uno y decreciente en los casos en que el exponente es negativo, o bien, si la base es mayor que cero y menor que uno.

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones (1): En equipos de 3 a 4 integrantes, realiza la investigación sobre series o sucesiones numéricas aritméticas y geométricas; elaborar un mapa conceptual para su exposición, donde se represente la información con ejemplos que muestren la diferencia entre sucesiones aritméticas y geométricas.

Instrucciones (2): Realiza los siguientes ejercicios conceptuales.

a) ¿Qué son las funciones exponenciales?

b) Considera la función exponencial $y = 2^x$. Contesta lo siguiente:

- ¿Qué sucede con la variable *y* conforme *x* crece?
- ¿La variable *y* puede ser cero? Explica.
- ¿El valor de *y* puede ser negativo? Explica.

c) Considera la función exponencial $y = 2^{-x}$. Escribe una función exponencial equivalente a la anterior, pero que no tenga signo negativo en el exponente. Explique cómo obtuvo su respuesta.

d) Considera las ecuaciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$

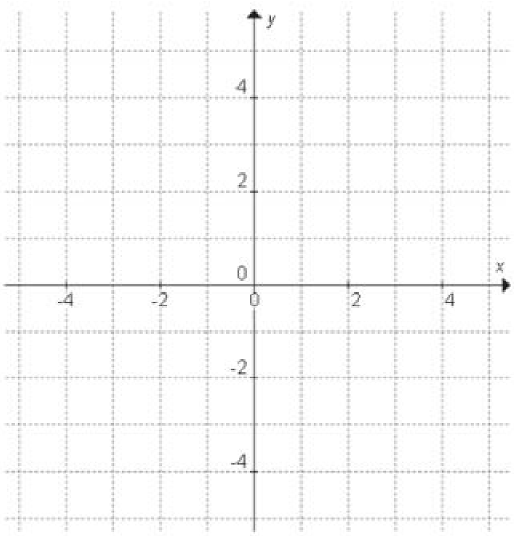
- Determina el punto de intersección de la gráfica de cada función con el eje Y. Compare las gráficas de las dos funciones ¿Cuál de las dos presenta un crecimiento más acelerado?

Instrucciones (3): Traza la gráfica de las siguientes funciones en un mismo plano cartesiano y contesta las preguntas referentes al análisis de las respuestas. Utiliza diferentes colores para graficar.

Funciones:

a) $y = 3x$
b) $y = x^3$
c) $y = 3^x$

Gráficas:



- ¿Cuál de las tres gráficas tiene mayor crecimiento cuándo x > 2?

....

- ¿Cuál de las tres gráficas tiene mayor crecimiento cuándo $2 \leq x < 4$?

....

- ¿Cuál de las tres gráficas tiene mayor crecimiento cuándo $x \geq 4$?

....

- Compara tus respuestas con la de otro compañero para hacer una conclusión acerca del crecimiento exponencial.

....

....

....

....

Instrucciones (5): De las siguientes funciones exponenciales, realiza una tabulación y elaborar la gráfica. y escribe tus observaciones contestando a la pregunta, ¿existe algún punto en común en las tres gráficas? ¿Por qué? Compara tus resultados con las respuestas de tus compañeros de grupo.

Función: Tabulación: Gráfica:

$y = 3^x$

x	y

Observaciones:

....

....

Función: Tabulación: Gráfica:

$y = 10^x$

x	y

Observaciones:

....

....

Función: Tabulación: Gráfica:

$y = \pi^x$

x	y

Observaciones:

Instrucciones (6): Responde a lo siguiente.

a) ¿Por cuáles puntos del eje Y pasan las gráficas de las funciones exponenciales del ejercicio (4), respectivamente?

b) Explica por qué todas las gráficas exponenciales $y = a \cdot b^x$ pasan por $(0, a)$?

c) ¿Por qué no puede ser igual a 1 la base de una función exponencial?

Instrucciones (7): En parejas, en una hoja milimétrica, tracen las gráficas de una ecuación exponencial con base 10, tomando valores para la constante $a = 0.5$ y $a = -0.5$. Te sugerimos utilizar colores diferentes para cada gráfica.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

De las gráficas de las diferentes funciones que has realizado en la actividad anterior, escribe las los cambios que observas según su función y explica el porqué.

....

....

....

....

....

....

....

....

Aprende más

Función exponencial

Tiene una curvatura característica que hace que la gráfica crezca, si el exponente es positivo; o bien, tienda a hacerse cero o presente un comportamiento decreciente, si el exponente es negativo o si la base es menor que uno y mayor que cero, esta característica es conocida como *variación exponencial*, y se representa por:

$$y = a \cdot b^{kx} \text{ donde } k \neq 0$$

Si $k = 0$ implicaría que la gráfica de la función se convirtiera en la gráfica de la función $y = 1$, si k es negativo, entonces la gráfica presentará un *decaimiento*. Con k positivo, la gráfica presentará siempre un *crecimiento*. El *factor de crecimiento* es a, porque multiplica al término exponencial.

Ejemplo 1: Obtener la gráfica de la ecuación exponencial de base 4 y constante $k = 2$, es decir $f(x) = 4^{-2x}$.

Solución:

Se tabula la función correspondiente.

x	$f(x)$
0.503	0.247
1.95	0.0045
0	1
−0.503	4.03503
−0.628	5.718

k es negativo, entonces la gráfica presenta un decaimiento.

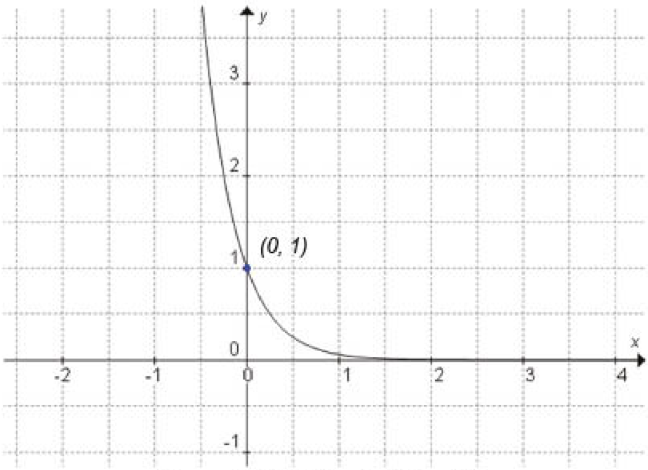


Figura 7.5. Gráfica de $f(x) = 4^{-2x}$.

Ejemplo 2: Obtener la gráfica de la ecuación exponencial de base 4 y constante $k = -2$, es decir $f(x) = 4^{2x}$.

Solución:

Se tabula la función correspondiente.

x	$f(x)$
0.503	4.035
0.6918	6.8083
0	1
−1.07	0.0519
−2.012	0.0037

k es positivo, entonces la gráfica presenta un crecimiento.

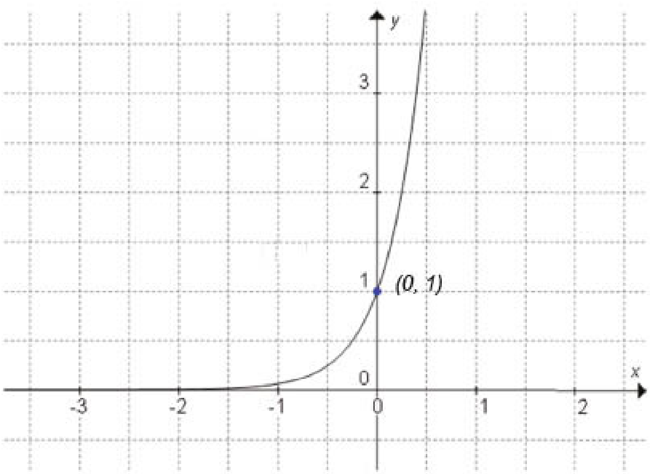


Figura 7.6. Gráfica de $f(x) = 4^{2x}$.

Función exponencial natural

Como se vio anteriormente, las condiciones para que un número sea base de una función exponencial es que sea positivo y diferente de uno, condiciones que dejan como opción al número irracional llamado e, el cual tiene un valor aproximado de 2.71828...

En el interés compuesto, n veces los intereses se abonan en n periodos (año, trimestre, mes, etc.). En el interés compuesto continuo los intereses se abonan instantáneamente. Mientras más grande sea el valor de n la ganancia tiende a ser 2.7182818…, que es el valor del número e.

La *función exponencial natural* es una función exponencial con base e:

$$y = a \cdot e^{kx}$$

Los criterios de una función exponencial son:

$y = a \cdot e^{kx}$ es creciente si k es positivo

$y = a \cdot e^{kx}$ es decreciente si k es negativo

El dominio de la función exponencial natural es $D = \{x : -\infty < x < \infty\}$ que corresponde al conjunto de todos los números reales.

Otra caracteristica de esta gráfica es que nunca toma valores negativos en el eje Y por tanto, el rango de una función exponencial natural es $R = \{y : 0 < y < \infty\}$ o bien el conjunto de todos los números reales positivos.

Sabías que...

El número e apareció en 1618, en trabajos publicados por John Napier, pero su importancia no se ve reflejada sino hasta los trabajos de Jacob Bernoulli, quien estudió un problema particular llamado *interés compuesto* en el que se muestra el surgimiento del valor e.

Ejemplo 1: Identificar la función $y = 2e^{0.5x}$ como crecimiento o decaimiento exponencial natural y dibujar su gráfica. Hallar los valores de y, localizar los puntos de coordenadas sobre la gráfica correspondiente.

Solución:

Se tabula la función correspondiente.

x	y
−3	
−2	
−1	
0	
1	

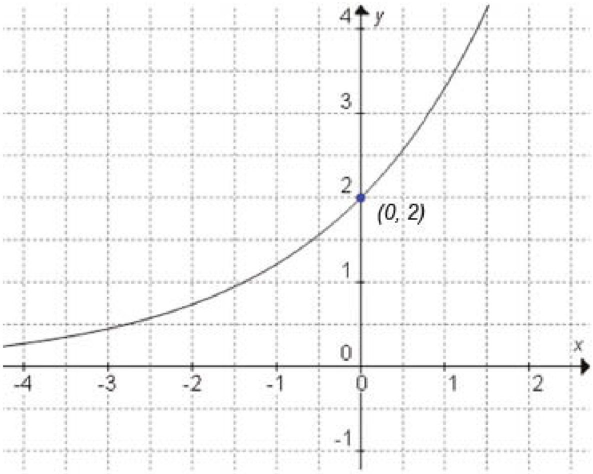


Figura 7.7. Gráfica de $y = 2e^{0.5x}$.

Interpretación gráfica:
Crecimiento exponencial natural
0.5 es positivo.

Ejemplo 1: Identificar la función $y = 2e^{-0.5x}$ como crecimiento o decaimiento exponencial natural y dibujar su gráfica. Hallar los valores de y, localizar los puntos de coordenadas sobre la gráfica correspondiente.

Solución:

Se tabula la función correspondiente.

x	y
−2	
−1	
0	
1	
2	

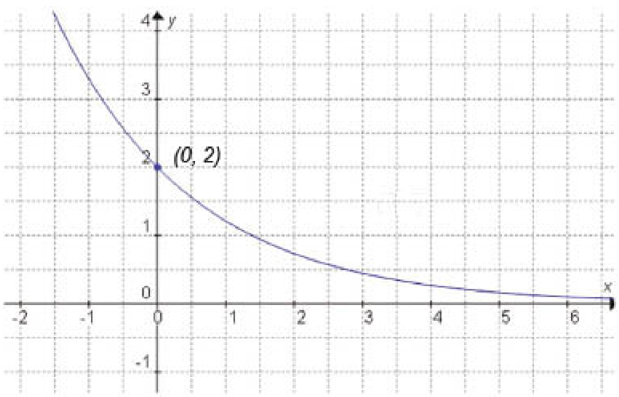


Figura 7.8. Gráfica de $y = 2e^{-0.5x}$.

Interpretación gráfica:
Decaimiento exponencial natural
−0.5 es negativo.

Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, anotando en tu libreta los procesos completos que sean evidencia de la aplicación de las propiedades y conceptos estudiados.

1. Considera las ecuaciones $y = e^{kx}$, $y = e^{k+x}$ y los valores −2, −1, −0.5, 0.75, 1 y 3 para la constante k. Con ayuda de una hoja de cálculo (u otro programa de computadora apropiado), construye una tabla de valores para cada caso y realiza la gráfica correspondiente de cada función. Imprime tus ejercicios y compáralos con otras soluciones.

2. Identificar cada función como crecimiento o decaimiento exponencial natural y dibujar su gráfica.

   a) $y = 4e^{0.5x}$
   b) $y = 4e^{-0.5x}$

3. Depositas $17,500 en una cuenta bancaria que te produce intereses compuestos a 15% anual. Calcula el saldo en tu cuenta al cabo de 3 años, si los intereses se capitalizan:

   a) Mensualmente
   b) Semestralmente
   c) Continuamente

4. ¿Cuál será el monto en 4 años, de $1,200 depositados en una cuenta bancaria que otorga 18% de interés anual, compuesto trimestralmente?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Logarítmos comunes y naturales

Existen dos tipos de logaritmos que son muy usados en la práctica. Primero, el *logaritmo común* de un número es la potencia a la que hay que elevar el número 10 para obtener el número propuesto, en general sea x un número real, entonces el logaritmo común es la función que asigna una potencia (o exponente) al cual hay que elevar la base 10 para obtener dicho número x.

Simbólicamente es log x

Ejemplo:	log 1 = 0	porque	100= 1
	log 10 = 1	porque	101 = 10
	log 100 = 2	porque	102 = 100
	log 1000 = 3	porque	103 = 1000
	log 10000 = 4	porque	104 = 10000
	log 100000 = 5	porque	105 = 100000
	log 1000000 = 6	porque	106 = 1000000

Segundo, el *logaritmo natural* de *base e* o *Neperiano* de un número es la potencia a la que hay que elevar el número *e*, para obtener el número propuesto, en general sea x un número real, entonces el logaritmo natural es la función que asigna una potencia (o exponente) al cual hay que elevar la base *e* para obtener dicho número x.

Simbólicamente es $\ln x$ donde $e = 2.718281828459...$

$\ln 1 = \log_e 1 = 0$ porque $e^0 = 1$

En general, todas las propiedades que se presenten para cualquiera de estos logaritmos, se cumplen para ambas bases (10 y e). Una propiedad básica de estos es:

$$\ln e^x = x \text{ para cualquier valor de } x$$
$$e^{\ln x} = x \text{ para } x > 0$$

En general, $\log_b(b^x) = x$ para cualquier valor de x y $b^{\log_b(x)} = x$ para $x > 0$, un caso particular de la propiedad anterior es cuando $x = 1$, lo cual implicaría:

$$\ln e^1 = \ln e = 1 \quad \text{y} \quad e^{\ln 1} = e^0 = 1$$
En general, $\log_b(b) = 0$ y $\log_b(1) = 0$

Logarítmos de otras bases

Para calcular logaritmos con base distinta a 10, se puede utilizar una calculadora científica que tenga la capacidad de calcular de manera automática logaritmos de cualquier base o bien recurrir al cambio de base.

Sabes que $y = \log_b(x)$ si y sólo si $x = b^y$, entonces, si tomamos $x = b^y$ y aplicamos ln a ambos lados de la ecuación tenemos:

$\ln x = y \ln b$, despejando $y = \dfrac{\ln x}{\ln b}$, sabemos que $y = \log_b(x)$ entonces:

$\log_b(x) = \dfrac{\ln x}{\ln b}$ que también es válido para el logaritmo de base 10

Propiedades generales de los logarítmos

Propiedad 1. La base en todo sistema de logaritmo es siempre un número positivo mayor que cero. Ejemplo: 10 > 0.

Propiedad 2. El logaritmo de un número, cuando existe, es único. Ejemplo:

$$\log 1000 = 3$$
$$\ln e = 1$$
$$\log_3 27 = 3$$

Propiedad 3. El logaritmo del número cero no existe. Ejemplo:

$$10^? = 0 \text{ entonces } \log 0 = ?$$
$$e^? = 0 \text{ entonces } \ln 0 = ?$$
$$7^? = 0 \text{ entonces } \log_7 0 = ?$$

Propiedad 4. El logaritmo de la unidad en cualquier sistema de logaritmos es igual a cero. Ejemplo:

$$\log 1 = 0 \text{ es decir } 10^0 = 1$$
$$\ln 1 = 0 \text{ es decir } e^0 = 1$$
$$\log_4 1 = 0 \text{ es decir } 4^0 = 1$$

Propiedad 5. Los números negativos carecen de logaritmos.

$$\log(-5) = ? \quad \text{porque} \quad 10^{?} = -5$$
$$\ln(-2) = ? \quad \text{porque} \quad e^{?} = -2$$
$$\log_6(-8) = ? \quad \text{porque} \quad 6^{?} = -8$$

Propiedad 6. La misma relación de igualdad o desigualdad que se da entre dos o más números existe entre sus logaritmos en un mismo sistema.

$$20 > 10 \text{ entonces } \log 20 > \log 10$$

$$1.3010 > 1.000$$

Propiedad 7. Los logaritmos de los números mayores que la unidad son positivos. Los logaritmos de los números menores que la unidad, pero mayores que cero, son negativos. Ejemplo:

$$\log 10 = 1 \text{ porque } 10^1 = 10$$

$$\log 1000 = 3 \text{ porque } 10^3 = 1000$$

$$\log 0.1 = -1 \text{ porque } 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\log 0.0001 = -4 \text{ porque } 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$$

Propiedad 8. El logaritmo del producto de varios factores es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de ellos.

$$\log_b(A \times B) = \log_b A + \log_b B$$

a) $(5 \times 20 \times 37) = \ln 5 + \ln 20 + \ln 35$
b) $\log_2 (8 \times 16 \times 24) = \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64$

Propiedad 9. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$$

a) $\ln\left(\frac{430}{12}\right) = \ln 430 - \ln 12$ b) $\log_5\left(\frac{625}{25}\right) = \log_5 625 - \log_5 25$

Propiedad 10. El logaritmo de una potencia es igual al producto de dicha potencia por el logaritmo del número base.

$$\log_b\left(A^n\right) = n \cdot \log_b A$$

a) $\ln 254 = 41n25$
b) $\log_2 103 = 3 \log_2 10$

Propiedad 11. El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo del número dividido entre el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \log_b A^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_b A = \frac{\log_b A}{n}$$

a) $\log\sqrt[3]{37} = \dfrac{\log 37}{3}$ b) $\log_8 \sqrt{45} = \dfrac{\log_8 45}{2}$

Sabías que...

Los logaritmos constituyeron un recurso para realizar operaciones muy laboriosas antes de que se introdujeran calculadoras y computadoras. Por ejemplo, para hallar $(0.00013)(0.5)^{-25} / (1.047)^3$:

1. Se aplicaban primero los *logaritmos*:

$$\log\left[(0.0013)(0.5)^{-25} / (1.047)^3\right] =$$
$$\log(0.0013)(0.5)^{-25} - (1.047)^3 =$$
$$\log(0.0013) + \log(0.5)^{-25} - 3\log 1.047 =$$
$$-3.8860 + 7.5257 - 0.0598 = 3.5799$$

2. Se hallaba por último el *antilogaritmo* (función inversa) de este último número:

$$\text{antilog}\, 3.5799 = 3801.01$$

Así $(0.00013)(0.5)^{-25} / (1.047)^3 \approx 3801$
(Los valores de logaritmos y antilogaritmos se consultaban en tablas)

Actividad de aprendizaje 3

Instrucciones: Resuelve los siguientes logaritmos comunes y naturales en tu libreta. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

1. Determina los siguientes logaritmos:

a) $\log 0.9104$ b) $\log 5767$ c) $\log 3.003$

d) $\log 300100$ e) $\log 0.3$ f) $\log 0.000347$

2. Calcula el valor de *x* en cada una de las siguientes expresiones:

a) $\log x = 3.1886$ b) $\log x = 1.5736$ c) $\log x = 4.6931$

d) $\log x = 4.2351$ e) $\log x = 3.6297$ f) $\log x = 1.4437$

g) $\log x = 3.8661$ h) $\log x = 2.8393$ i) $\log x = 0.1358$

j) $\log x = 2.8464$ k) $\log x = 2.6372$ l) $\log x = 4.2867$

m) $\log x = 2.1679$ n) $\log x = 4.5791$ o) $\log x = 3.7455$

3. Escribe las siguientes expresiones en notación logarítmica:

a) $2^3 = 8$ b) $2x = y$ c) $8^{2/3} = 4$

d) $5^3 = 125$ e) $6^0 = 1$ f) $10^{-2} = 0.01$

g) $4^{-2} = 1/16$ h) $4^3 = 64$ i) $2^7 = 128$

j) $b^x = m$

4. Escribe las siguientes expresiones en notación logarítmica:

a) $\log_3 81 = 4$ b) $\log_9 1 = 0$ c) $\log_x y = z$

d) $\log_3 1/243 = -5$ e) $\log 1000 = 3$ f) $\log_{36} 6 = 1/2$

g) $\log_2 8 = -5$ h) $\log_3 x = y$ i) $\log_2 x = y$

j) $\log 100 = 2$

5. Encuéntrense los valores de las literales indicadas.

a) $\log_6 n = 3$ b) $\log_3 n = -5$ c) $\log_b 27 = -3$

d) $\log_b 27 = -3$ e) $\log_b 3 = -1/4$ f) $\log_b 4 = -2/3$

g) $\log_b 1000 = 3$ h) $\log_b 6 = -1/3$ i) $\log_2 n = 8$

j) $\log_b 125 = -3$

6. Empleando logaritmos efectúense las operaciones indicadas en los problemas, obténgase las respuestas con cuatro cifras.

a) $\sqrt[3]{496}$ b) $\sqrt[4]{.801}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{(77.6)(66.5)}{(44.3)(33.2)}}$

d) $\sqrt{6.16}\sqrt[3]{81.2}$ e) $\sqrt{77.1}\sqrt[3]{\ 1.41}$ f) $\dfrac{\sqrt{615}}{\sqrt[3]{401}}$

g) $\dfrac{(215)^{2/3}}{(16.2)\sqrt{41.1}}$ h) $(10.66)^6$ i) $\sqrt[4]{.1081}$

7. Utilizando el cambio de base, determina:

a) $\log 5$ b) $\log 6$ c) $\log 8$ d) $\log 100$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Al realizar la operación del logaritmo de un número, con diferentes bases. ¿Cómo influye en el resultado a medida que la base disminuye o aumenta?

Aprende más

Concepto de función logarítmica

Dado un número real x, mayor que cero, la función logarítmica es la inversa de la función exponencial de base b.

Algebraicamente el logaritmo base b se denota como:

$$\log_b(x)$$

Dado que esta función y la función exponencial con b son inversas se puede afirmar que $y = \log_b(x)$ significa $x = b^y$ entonces, si existe una función:

$$f(y) = x = b^y$$

La cual cumple con las características de las funciones exponenciales, su función inversa está dada por:

$$f(x) = x = \log_b(y)$$

Que resulta ser la función inversa de la función exponencial.

En la función logarítmica:

a) La base b debe ser un número positivo y distinto de uno, igual que en la función exponencial.

b) La variable x nunca puede ser cero pues no existe un número y real tal que b^y sea cero.

c) La variable x sólo puede tomar valores positivos debido a que la base positiva genera sólo potencias positivas.

Por ejemplo:

$$4^2 = 16 \qquad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = 0.04$$

Dominio y rango

Para obtener el dominio y el rango de la función logarítmica dado que es la función inversa de la función exponencial, el dominio de la función exponencial se convierte en el rango de la función logarítmica. Lo mismo sucede con el rango. Es decir, el dominio de una función logarítmica es $D = \{x : 0 < x < \infty\}$ que ee lee como el conjunto de todos los números reales positivos. Este dominio se puede verificar, ya que la gráfica nunca toma valores negativos sobre el eje x.

El rango de una función logarítmica es $R = \{x : -\infty < x < \infty\}$ que es el conjunto de todos los números reales. En resumen:

	$y = b^x \ (b > 0,\ b \neq 1)$		$y = \log_b x \ (b > 0,\ b \neq 1)$
Dominio	$(-\infty,\ \infty)$		$(0,\ \infty)$
Rango	$(0,\ \infty)$		$(-\infty,\ \infty)$

$$\text{Puntos en la gráfica} \begin{cases} \left(-1,\ \frac{1}{b}\right) \\ (0,\ 1) \\ (1,\ b) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \text{ se transforma en } y \\ \\ y \text{ se transforma en } x \end{matrix} \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{b},\ -1\right) \\ (1,\ 0) \\ (b,\ 1) \end{cases}$$

A continuación se identifican los logaritmos y las bases de las siguientes expresiones:

$9=3^2$	$2=\log_3 9$	2 es el logaritmo base 3 de 9
$0.25=2^{-2}$	$-2=\log_2 0.25$	−2 es el logaritmo base 2 de 0.25
$20^0=1$	$0=\log_{20} 1$	0 es el logaritmo de base 20 de 1
$0.1=10^{-1}$	$-1=\log_{10} 0.1$	−1 es el logaritmo base 10 de 0.1
$5^2=25$	$2=\log_5 25$	2 es el logaritmo base 5 de 25

Actividad de aprendizaje 4

Instrucciones: Resuelve los siguientes logaritmos comunes en tu libreta. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

1. Obtener el logaritmo y la base para cada número:

a) $100000 = 10^5$ b) $7^4 = 343$ c) $64 = 4^3$

d) $64 = 2^6$ e) $64 = 2^6$ f) $64 = 8^2$

2. Escribe cada expresión en su forma exponencial o logarítmica, según el caso:

a) $4 = \log_5 625$ b) $25^2 = 625$ c) $0.001 = 10^{-3}$

d) $2 = \log_{1/3} 0.111$ e) $6^1 = 6$

3. Escriba cada ecuación en forma exponencial; luego determine el valor desconocido.

a) $\log_4 16 = y$ b) $\log_2 x = 5$ c) $\log_{1/2} x = 2$ d) $\log_5 125 = y$

e) $\log_3 x = 3$ f) $\log_{1/3} x = 4$ g) $\log_b 81 = 4$ h) $\log_b 1/27 = -3$

i) $\log_b 25 = 2$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Gráficas de funciones logarítmicas

Cualquier función logarítmica con base mayor que cero y diferente de 1, que tenga la forma $f(x) = \log_b(x)$, describirá una gráfica similar a la que se muestra a continuación y siempre pasará por el punto (1, 0) sin importar la base que se utilice.

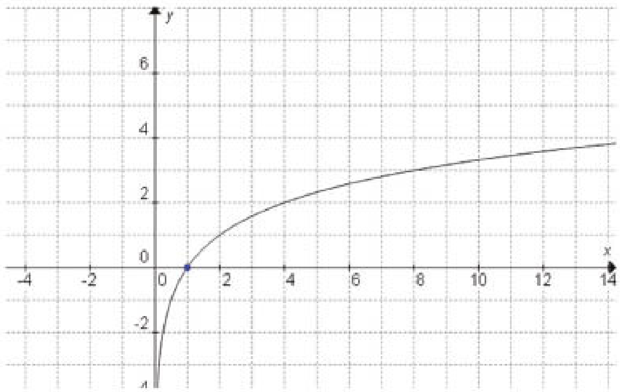


Figura 7.9. Gráfica de $f(x) = \log_b x$

Ejemplo 1: Grafique $y = \log_2 x$ e indique el dominio y el rango de la función.

Solución:

Dominio. El conjunto de valores de "x", es $\{x / x > 0\}$

Rango. Conjunto de valores de "y", es el conjunto de todos los valores reales $\mathbb{R}$.

Esta es una ecuación de la forma $y = \log_b x$, donde b = 2, lo que significa que:

$$y = \log_2 x$$

Con esta expresión construiremos la tabla de valores seleccionados de "y" y determinando los valores correspondientes de "x". Los tres puntos listados en el cuadro del dominio y rango aparecen en la tabulación.

x	y
1/6	−4
1/8	−3
1/4	−2
1/2	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

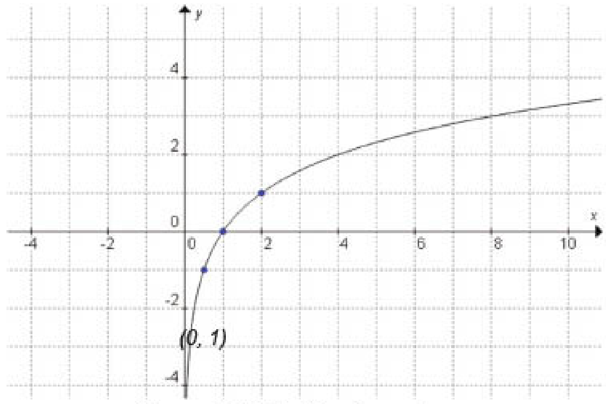


Figura 7.10. Gráfica de $y = \log_2 x$

Ejemplo 2: Grafique $y = \log_{1/2}x$ e indique el dominio y el rango de la función.

Solución:

Dominio: El conjunto de valores de "x", es $\{x / x > 0\}$
Rango: Conjunto de valores de "y", es el conjunto de todos los valores reales $\mathbb{R}$.

Esta es una ecuación de la forma $y = \log_b x$, donde $b = 1/2$, lo que significa que:

$$x = (1/2)^y$$

Con esta expresión construiremos la tabla de valores seleccionados de "y" y determinando los valores correspondientes de "x". Los tres puntos listados en el cuadro del dominio y rango aparecen en la tabulación.

x	y
16	−4
8	−3
4	−2
2	−1
1	0
1/2	1
1/4	2
1/8	3

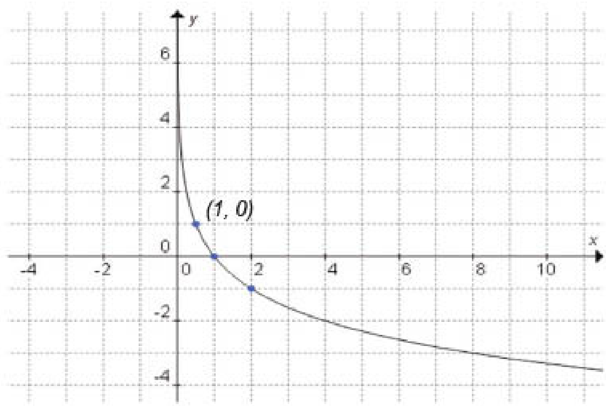


Figura 7.11.

Dado que la función logarítmica $x = b^y$ ($y = \log_b x$) es la *inversa* de la función exponencial $y = b^x$, su gráfica se obtiene reflejando la gráfica exponencial en la recta $x = y$

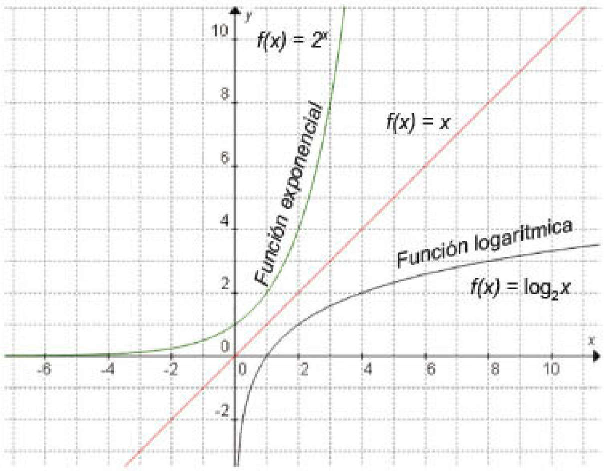


Figura 7.12.

En la figura 7.12, se muestran las gráficas generales de $y = b^x$ y de $y = \log_b x$, $b > 0$ en los mismos ejes. Observa que son simétricos respecto de la recta $y = x$, podemos ver que el rango de la función exponencial es el dominio de la función logarítmica, y viceversa. Además, los valores de x y de y en los pares ordenados están intercambiados en las funciones exponencial y logarítmica.

Actividad de aprendizaje 5

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

1. Escribe los conceptos que se piden de la función logarítmica $y = \log_b x$

- ¿Qué restricciones hay sobre b?
- ¿Cuál es el dominio de la función? Y, ¿cuál es su rango?
- Escribe la función $y = \log_b x$ en forma exponencial.
- ¿Cuál es el concepto de función exponencial?

2. Grafique cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \log_{1/4} x$
b) $y = \log_2 x$

c) $y = \log_3 x$
d) $y = \log_4 x$

3. Grafique cada par de funciones en los mismos ejes.

a) $y = 2^2$, $y = \log_{1/2} x$,
b) $y = (1/2)^x$, $y = \log_2 x$,
c) $y = 2^x$, $y = \log_2 x$,
d) $y = (1/2)^x$, $y = \log_{1/2} x$,

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si analizaste las gráficas puedes observar como la función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, pero esto no solo sucede en las gráficas, ¿Qué sucede con las operaciones?

....

....

Aprende más

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

En este apartado analizaremos varios casos en los que se aplican ecuaciones exponenciales o logarítmicas, o bien se tendrán que construir modelos a partir de datos proporcionados.

En ocasiones algunas ecuaciones logarítmicas o exponenciales deben resolverse por métodos gráficos. Esto ocurre cuando las expresiones resultantes mediante transformaciones algebraicas son más complejas que la expresión inicial, en términos generales se debe:

1. Tener presente las propiedades de logaritmos
2. Aislar los términos exponenciales o logarítmicos
3. Interpretar en forma inversa exponentes y logaritmos

Ejemplos 1: Resuelva la ecuación $5^n = 20$

Solución:

Se calcula en ambos lados de la ecuación el logaritmo y se despeja n.

$$\begin{aligned} \log 5^n &= \log 20 \\ n \log 5 &= \log 20 \\ n &= \frac{\log 20}{\log 5} \\ n &= 1.8612 \end{aligned}$$

Ejemplos 2: Resuelva la ecuación $8^x = \frac{1}{2}$

Solución:

Escribir el 8 como 2^3 y $\frac{1}{2}$ como 2^{-1}

$$\begin{aligned} \left(2^3\right)^x &= \frac{1}{2} \\ 2^{3x} &= 2^{-1} \\ 3x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

Ejemplos 3: Resuelva la ecuación $\log_2 (x+1)^3 = 4$

Solución:

$$(x+1)^3 = 2^4 \qquad \textit{Escribir en forma exponencial}$$
$$(x+1)^3 = 16$$
$$x+1 = \sqrt[3]{16} \qquad \textit{Raíz cúbica de ambos lados}$$
$$x = -1 + \sqrt[3]{16} \qquad \textit{Despejar x}$$

Los siguientes ejemplos muestran algunas aplicaciones prácticas:

Ejemplo 4: Si al iniciar un cultivo hay 1000 bacterias este número se duplica cada hora, entonces el número de bacterias al cabo de horas puede calcularse mediante la fórmula $N = 1000\,(2)^t$, ¿Cuánto tiempo tardará el cultivo en tener 30000 bacterias?

Solución:

Observa que se quiere determinar el valor de t; para hacerlo utilizaremos logaritmos, escribiéndolo en ambos extremos de la ecuación.

$$\log 30 = \log (2)^t$$
$$\log 30 = t \log 2$$
$$t = \frac{\log 30}{\log 2}$$
$$t = 4.91$$

Será necesario un tiempo de 4.91 horas para que el cultivo tenga 30000 bacterias.

Ejemplo 5: Los logaritmos se utilizan para medir la magnitud de los terremotos. En la escala Richter, desarrollada por el sismólogo Charles F. Richter, por ejemplo, la magnitud, R, de un terremoto está dada por la fórmula:

$$R = \log_{10} I$$

Donde I representa el número de veces que es más intenso el terremoto respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir con un sismógrafo.

a) Si el terremoto mide 4 grados en la escala Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir?

b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 5 grados que uno de 4?

Solución:

a) Es importante entender el problema, el número asignado en la escala Richter, R, es 4. Para determinar cuántas veces es más intenso el terremoto respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse I, sustituimos $R = 4$ en la fórmula y despejamos I.

$$R = \log_{10} I$$
$$4 = \log_{10} I \qquad \text{Cambiar a la forma exponencial}$$
$$10^4 = I$$
$$I = 10000$$

Respuesta: un terremoto que mide 4 grados es 10000 veces más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir.

b) Cambiar a la forma exponencial y resolver:

$$5 = \log_{10} I$$
$$I = 10^5$$
$$I = 100000$$

Respuesta: como (10000)(10) = 100000, un terremoto que mide 5 es 10 veces más intenso que un terremoto que mide 4.

Ejemplo 6: En el lugar de un accidente un socorrista atiende a una persona inconsciente y sin respiración, en tanto otro efectúa dos tomas de temperatura con diferencia de un minuto, siendo éstas de 37°C y 36°C. El termómetro ambiental de la ambulancia marca 21°C de temperatura. Si la primera toma se hizo a las 7:00 p.m., ¿Cuánto tiempo lleva sin respirar la persona?

Solución:

La temperatura corporal normal es de 37°C. Usando la fórmula para el enfriamiento de los cuerpos:

$$kt = \ln \frac{T_f - T_m}{T_i - T_m}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$kt = \ln \frac{36 - 21}{37 - 21}$$

$$k\left(t+\frac{1}{60}\right)=ln\frac{36-21}{37-21}$$

Resolviendo las ecuaciones, encontramos el valor de las variables:

$$k=-0.0198, \quad t=2.25$$

Por tanto, 2.25 minutos antes de la primera toma, la temperatura corporal era de 37°C. La persona lleva cerca de 2.25 minutos sin respirar.

Actividad de aprendizaje 6

Los estudios de funciones de crecimiento y decaimiento exponencial se relacionan con muchos procesos sociales. Tal es el caso del crecimiento de poblaciones vegetales, animales o humanas.

Trabajo de investigación: el estudio del crecimiento y decaimiento exponencial, es una herramienta útil en trabajos de investigación científica.

Instrucciones: En equipos de tres a cuatro personas realiza las siguientes actividades:

1. Investiga en libros, revistas o gente que conozca del tema, tres ejemplos de crecimiento exponencial tomando como referencia lo descrito en cada inciso y preséntalo al grupo.

   a) El número de contagios de una enfermedad cuando no se toman medidas sanitarias.

   b) El número de células de un feto, mientras se desarrolla en el útero materno.

   c) El número de virus o bacterias que se desarrollan en un charco de cultivo.

2. Investigación en libros, revistas o gente que conozca del tema, tres ejemplos de decaimiento exponencial tomando como referencia lo descrito en cada inciso y preséntalo al grupo

a) La cantidad de energía eléctrica generada por una batería.

b) La cantidad de células cancerígenas, después de aplicar radiación.

c) La cantidad de material radioactivo en un reactor de fisión.

3. Elaboren mapas conceptuales sobre el tema en hojas de rotafolio o cartulinas y explíquenlos a sus compañeros de clase.

4. Cada equipo deberá entregar al profesor evidencia de su investigación y una conclusión que describa la importancia del trabajo realizado y sus aplicaciones en la solución de problemas cotidianos en distintos ámbitos: social, político, científico, etc.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Cierre del bloque VII

Reflexiona sobre lo aprendido

Una vez estudiada la parte principal de este bloque VII de funciones exponenciales y logaritmicas, lo consecuente es que desarrolles las habilidades y actitudes necesarias, para así evidenciar que estas aprehendiendo dichas funciones .

Al final del presente bloque ya cuentas nuevos elementos de aprendizaje para que poco a poco te apropies de ellos y puedas trabajar o utilizar funciones exponenciales y logarítmicas a situaciones teóricas, pero también a algunas situaciones reales. Con estos elementos, te invito a que investigues acerca de algún tipo de aplicación de funciones de crecimiento y decaimiento exponencial que se relacione con algún proceso social y comparte la información con tu docente y grupo.

Cuestiónense acerca de la utilidad de estar desarrollando estos aprendizajes y la importancia de manejarlos adecuadamente. Al final presenta a tu docente las observaciones del trabajo realizado para realimentar tu aprendizaje en cuanto a funciones exponenciales y logarítmicas.

Autoevaluación

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, anotando en tu libreta los procesos completos que sean evidencia de la aplicación de reglas y conceptos estudiados.

1. En tu casa te sirven en el desayuno unos huevos recién sacados de la sartén, a 40°C. La temperatura ambiente es de 20°C y la temperatura (en °C) de tu desayuno está relacionada con el tiempo (en horas), mediante el modelo:

$$-4.1605t = \ln\frac{T-20}{40-20}$$

   ¿Cuánto tardará tu desayuno en enfriarse a 30°C?

2. Cuando pones un refresco a enfriar en el congelador, si el refresco está a 18°C y se congela en 3 horas, estando el congelador a −4°C.

   a) Determina la constante en la fórmula del enfriamiento del problema 3.

   b) ¿En cuánto tiempo el refresco estará a 6°C?

3. La ecuación $y = 41.3 + e^{0.1527t}$ modela la cantidad de personas (en millones) económicamente activas en el país, a partir de 2010 ($t = 1$).

   a) ¿Cuántas personas estaban produciendo ingresos en el país en el año 2010?

   b) ¿En cuánto tiempo la población económicamente activa ascenderá a 44 millones?

4. Si en tres horas se congela un refresco en el refrigerador, estando el refresco a 15°C al introducirlo, ¿Cuál es la temperatura del congelador?

5. La ecuación $y = 4 + \ln 0.5^{-t}$ modela la demanda de bicicletas cada año, entre 1951 ($t = 1$) y 1960. ¿Cuál fue la demanda en 1958? está expresada en millones.

6. Construir un modelo para el crecimiento de una población de mapaches en un zoológico, con capacidad máxima para 80 de ellos, iniciando con una pareja. El primer dato es para $x = 0$ (años), $y = 4$ (mapaches). Un segundo dato podría ser que al final del primer año hubieran 4 mapaches $x = 1$, $y = 4$

7. Una fórmula que se utiliza en ocasiones para calcular la energía sísmica liberada por un terremoto es $\log E = 11.8 + 1.5\, m_s$, donde E es la energía sísmica y m_s es la magnitud de la superficie de la onda.

   a) Determina la energía liberada por un terremoto cuya magnitud de la superficie de la onda es 6.

   b) Si la energía liberada durante un terremoto es de ¿Cuál es la magnitud de la superficie de la onda?

8. El nivel de presión del sonido es $s_p = 20\log\dfrac{P_r}{0.0002}$, donde P_r es la presión del sonido en dinas/cm^2.

   a) Determine el nivel si la presión del sonido es de 0.0036 dinas/cm^2.

   b) Si el nivel es de 10.0, determine la presión del sonido.

9. La escala Richter, usada para medir la intensidad (o fuerza) de los terremotos, relaciona la magnitud, M del terremoto con la energía que libera, E, en ergios, mediante la fórmula:

$$M = \frac{\log E - 11.8}{1.5}$$

Si un terremoto libera 1.259×10^{21} ergios de energía, ¿cuál es su magnitud en la escala Richter?

9. En equipos utilice la fórmula de cambio de base para evaluar $\log_3 45$

10. Resolver la ecuación $\log(3x-5)-\log(5x)=1.23$

11. Resolver la ecuación $\log_7 x=\frac{3}{2}\log_7 64$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

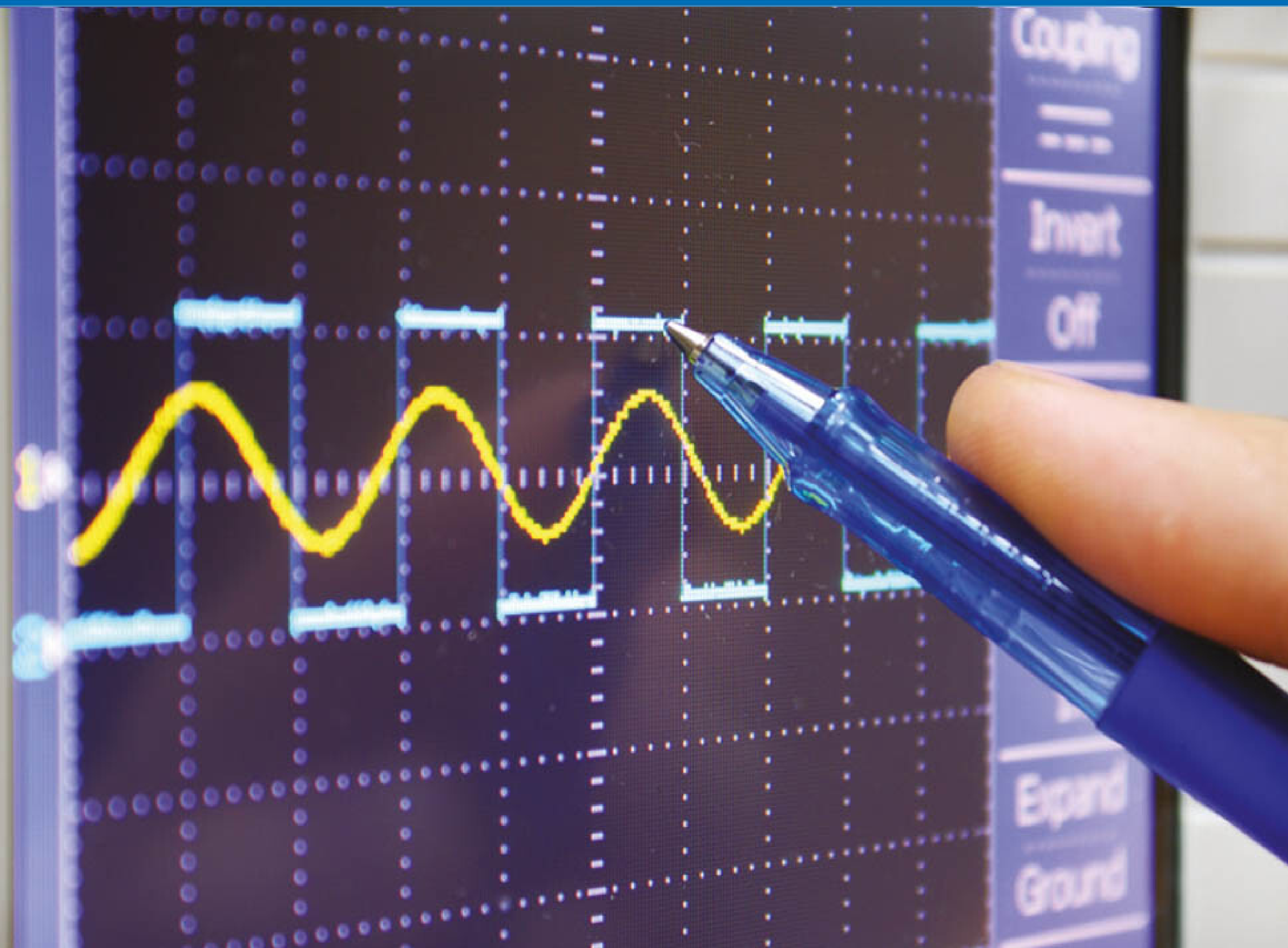
Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior obtuviste los *11 puntos*, considera tu resultado como *Excelente,* y si lograste *9 a 10 puntos* es *Bien*, de *8 a 6 es Regular* y si tus respuestas correctas fueron *menos de 6* considera tu desempeño como *No suficiente*, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Bloque VIII

Aplicaciones funciones periódicas

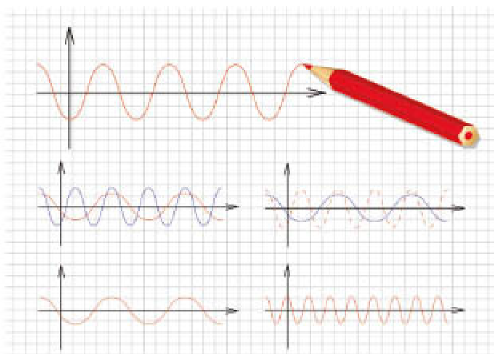


Introducción

Una función periódica se puede definir como una función para la cual matemáticamente $f(\alpha) = f(\alpha + t)$, para todo valor de t. La constante mínima t que satisface la relación se llama el período de la función. Una función es periódica si cumple la condición de periodicidad, es decir, si después de cada cierto intervalo de tiempo o espacio constante, llamado periodo, la función adquiere el mismo valor de partida.

Las aplicaciones de las funciones trigonométricas son extensas e interesantes. Por ejemplo, los fenómenos de vibración tales como los de las cuerdas de una guitarra para producir sonido y el sonido mismo se describen mediante funciones trigonométricas. También el estudio de los temblores es analizado mediante funciones trigonométricas.

La electricidad, y particularmente el cálculo de su intensidad en corriente alterna, está determinada por funciones trigonométricas, la luz y las ondas electromagnéticas, como las ondas de radio y televisión, también obedecen modelos trigonométricos.



¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque VIII

Tiempo 10 horas

Contenidos curriculares que se abordan

1. Concepto de función trigonométrica.
2. Periodicidad de las funciones trigonométricas.
   - Función seno.
   - Función coseno.
3. Gráficas de funciones trigonométricas.
   - Función seno generalizada (senoidal).
4. Función coseno.
   - Función coseno generalizada (cosenoide).
5. Modelado y solución de problemas con funciones trigonométricas.

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e Interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación del aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias.

- *Actividad de aprendizaje 1*. Función seno
- *Actividad de aprendizaje 2*. Función coseno.
- *Actividad de aprendizaje 3*. Análisis de las características de las funciones periódicas.
- *Autoevaluación*.

Para iniciar, reflexiona

Para comenzar, te invitamos a realizar lo siguiente y responder las preguntas:

1. Traza un triángulo que mida dos unidades por lado y determina:

a) ¿Qué tipo de triángulo es?

....

2. Traza la altura y responde:

c) ¿Qué propiedades geométricas tiene la altura del triángulo?

....

d) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo?

....

e) ¿Cuál es la medida de la altura del triángulo?

....

Aprende más

Concepto de función trigonométrica

Estas funciones surgen de la relación entre dos lados de un triángulo rectángulo y un ángulo interior en una razón matemática.

Para entender el comportamiento de estas funciones es necesario recordar algunos conceptos importantes:

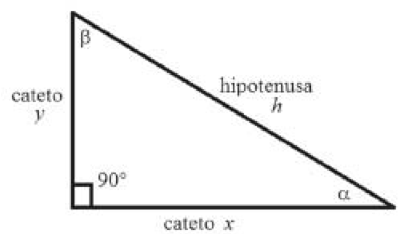


Figura 8.1.

1. Un triángulo rectángulo tiene dos lados perpendiculares entre sí: x y y, que forman un ángulo recto (cuya medida es de 90°). Estos lados se denominan catetos del triángulo.

2. El tercer lado: h, opuesto al ángulo recto, se denomina hipotenusa del triángulo y su medida es mayor que la de los catetos: $h > x$, $h > y$.

3. Los lados se relacionan mediante el *teorema de Pitágoras*, que enuncia que “la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”:

$$h^2 = x^2 + y^2$$

Si tomamos al ángulo α, tenemos las siguientes razones de los dos lados:

- Función seno del ángulo α: $sen\ a = \frac{y}{h} = \frac{\text{cateto opuesto de a}}{\text{hipotenusa}}$

- Función coseno del ángulo α: $cos\ a = \frac{x}{h} = \frac{\text{cateto adyacente de a}}{\text{hipotenusa}}$

- Función tangente del ángulo α: $tan\ a = \frac{y}{x} = \frac{\text{cateto opuesto de a}}{\text{cateto adyacente de a}}$

- Función cosecante del ángulo α: $csc\ a = \frac{h}{y} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de a}}$

- Función secante del ángulo α: $sec\ a = \frac{h}{x} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de a}}$

- Función cotangente del ángulo α: $cot\ a = \frac{x}{y} = \frac{\text{cateto adyacente de a}}{\text{cateto opuesto de a}}$

Para el ángulo b también se pueden definir las mismas seis funciones trigonométrica.

Periodicidad de las funciones trigonométricas

Si en el plano cartesiano dibujamos un círculo de radio r con centro en el origen y trazamos uno de sus radios, tenemos una herramienta útil para analizar a las funciones trigonométricas, denominado *círculo trigonométrico*.

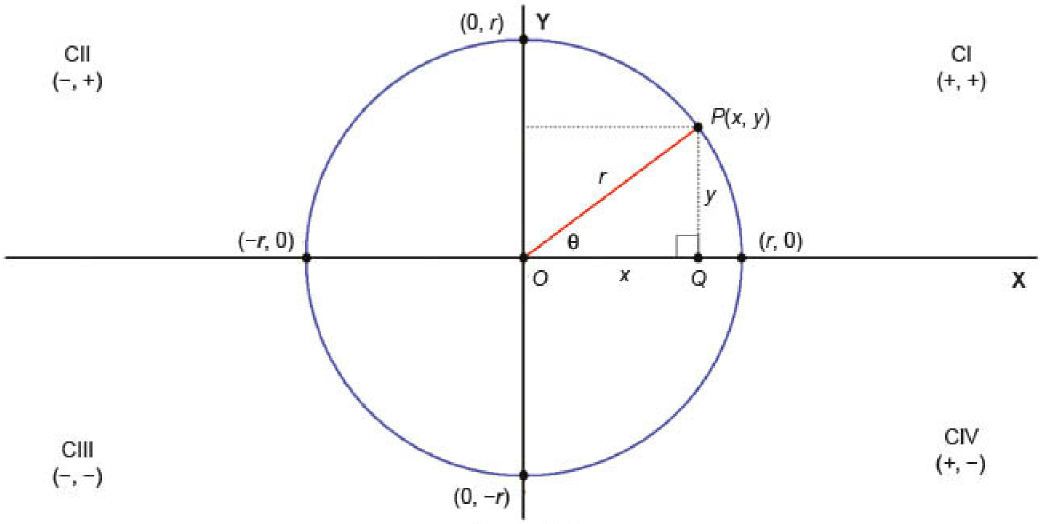


Figura 8.2.

Para el triángulo *OPQ*, que es un triángulo rectángulo, se cumple el teorema de Pitágoras, de modo que: $r^2 = x^2 + y^2$.

Para el ángulo θ, definido por el punto *P*(*x*, *y*). A partir de estas definiciones podemos analizar las funciones trigonométricas para entender y aplicar sus propiedades a la solución de problemas.

Función seno

Está determinada por la coordenada y del punto *P* y el radio *r* cuya medida permanece constante. De este modo, podemos afirmar que el valor de esta función depende, principalmente, del valor de *y*.

En el primer cuadrante, los puntos tienen coordenadas positivas, de modo que la razón *y*/*r* se mantiene positiva en este cuadrante. El ángulo θ es agudo ($0° < \theta < 90°$) y la coordenada *y* cambia desde 0 hasta *r*; es decir, $0 < y < r$.

El ángulo de 0°, que es la frontera inicial de los ángulos del primer cuadrante, está determinado por el punto (*r*, 0) por lo que:

$$sen\ 0° = \frac{0}{r} = 0$$

Y el ángulo de 90°, que es frontera final de los ángulos del primer cuadrante, está determinado por el punto (0, *r*), por lo que:

$$sen\ 90° = \frac{r}{r} = 1$$

Por lo que se concluye que en el cuadrante I se cumple la condición ($0 < \text{sen}\ \theta < 1$).

Con la información obtenida hasta el momento, obtenemos la siguiente tabla:

Cuadrante I:

θ	0°	30°	45°	60°	90°
seno θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

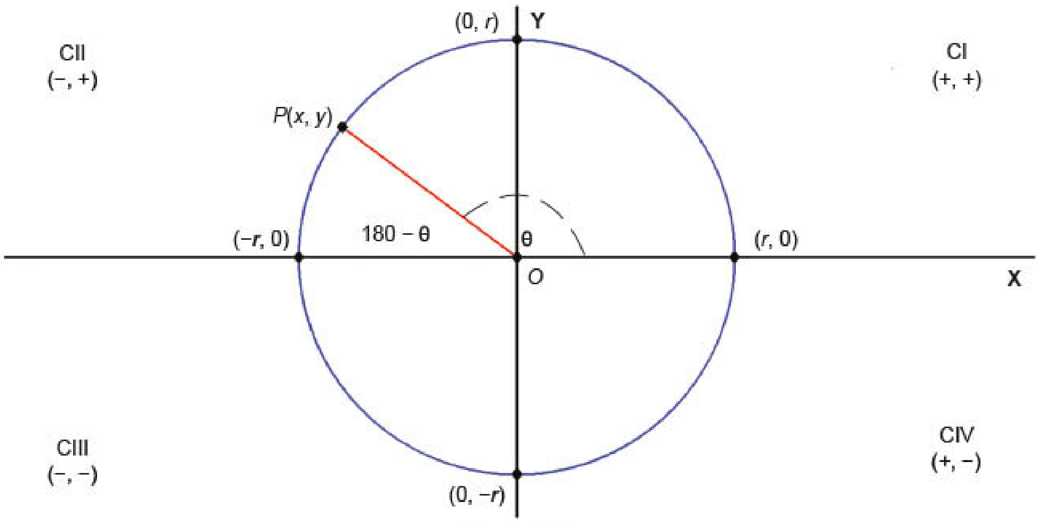


Figura 8.3.

La coordenada y se mantiene positiva, con $0 < y < r$, y los ángulos cumplen las condiciones $90° < y < 180°$ y $0 < \text{sen}\ \theta < 1$. La función seno produce valores positivos en el segundo cuadrante, siendo equivalentes a los valores del primer cuadrante obtenidos con la expresión $\theta_r = 180° - \theta$, donde θ_r se denomina *ángulo de referencia*. La expresión para el ángulo de referencia anterior es válida para el cuadrante II, exclusivamente. Para la función seno en el *cuadrante II* se tiene que:

θ	120°	135°	150°	180°
180°− θ	60°	45°	30°	0°
seno θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Mediante un análisis semejante tenemos lo siguiente.

Cuadrante III: $-r < y < 0$, $180° < \theta < 270°$, $\theta_r = 180° - \theta$, $-1 < \text{sen}\ \theta < 0$.

θ	210°	225°	240°	270°
$\theta - 180°$	30°	45°	60°	90°
seno θ	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Cuadrante IV: $-r < y < 0$, $270° < \theta < 360°$, $\theta_r = 360° - \theta$, $-1 < \text{sen}\ \theta < 0$.

θ	300°	315°	330°	360°
$360° - \theta$	60°	45°	30°	0°
seno θ	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Observa que calcular la función seno en ángulos α mayores a 360° es equivalente a calcular la función del ángulo $\alpha - 360°$ así que los valores de las tablas se repiten infinitamente cada 360°.

Si tenemos un ángulo mayor que 2π (mayor de 360°), ¿qué ocurre con los valores de la función?

Consideremos el caso del ángulo de 390° $\left(\frac{13\pi}{6}\right)$:

390° = 360° + 30°, de modo que el punto que determina al ángulo de 30° es el mismo que para 390°. Dos ángulos determinados en el círculo trigonométrico por el mismo punto se denominan *ángulos coterminales*. 30° y 390° son *ángulos coterminales*. Si ambos ángulos están determinados por el punto *P*, entonces sus funciones trigonométricas tienen exactamente los mismos valores:

$$sen\ 390° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 390° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

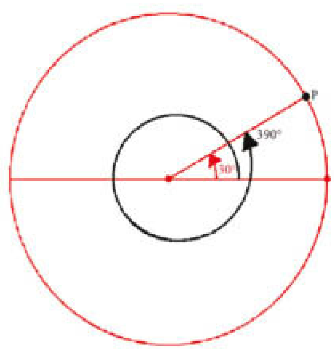


Figura 8.4.

Lo mismo ocurre si utilizamos ángulos negativos. Esta característica de la función seno se denomina *periodicidad*.

Función coseno

Del círculo trigonométrico tenemos:

Cuadrante I			
$\theta°$	$\theta°$ rad	θ_{ref}	cos θ
0°	0	-	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	-	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	-	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	-	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	-	0

Cuadrante II			
$\theta°$	$\theta°$ rad	θ_{ref}	cos θ
120°	$\frac{2\pi}{3}$	60°	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	45°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	30°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
180°	π	0°	−1

Cuadrante III			
$\theta°$	$\theta°$ rad	θ_{ref}	cos θ
210°	—	30°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	45°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	60°	$-\frac{1}{2}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	90°	0

Cuadrante IV			
$\theta°$	$\theta°$ rad	θ_{ref}	cos θ
300°	$\frac{5\pi}{3}$	60°	$-\frac{1}{2}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	45°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
360°	2π	0°	1

Gráficas de funciones trigonométricas

Antes de graficar a las funciones trigonométricas comencemos definiendo un radián. Un radián se define como el ángulo central que se genera cuando el arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio. Observa la siguiente figura:

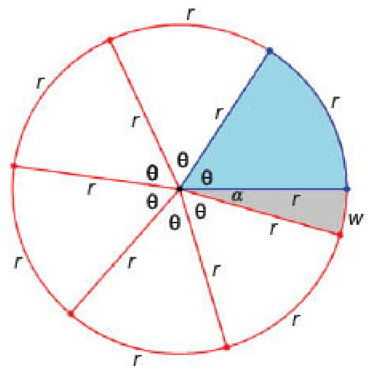


Figura 8.5.

El ángulo en color azul tiene una medida de 1 radián. Sabemos que el diámetro de la circunferencia se puede colocar sobre el perímetro de ella de modo que se cumple que:

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{diámetro}} = \text{p}$$

Es decir, el diámetro de la circunferencia cabe en su perímetro π veces. Esto significa que si colocamos diámetros sobre el perímetro de la circunferencia podremos colocar 3 diámetros completos y faltará una curva de longitud w = 0.14159265, como se muestra en la figura; que define el valor de la constante π. Recuerda que π es la razón del perímetro de una circunferencia al diámetro de la misma; es decir, representa las veces que el diámetro de la circunferencia cabe en su contorno o perímetro. Dado que el diámetro mide lo que dos radios, entonces en el perímetro de la circunferencia caben 2π radianes.

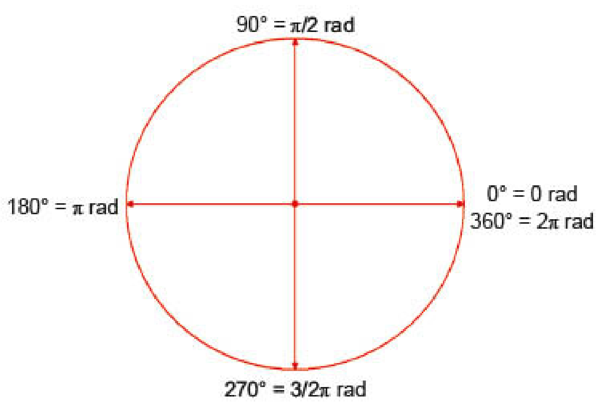


Figura 8.6.

De este modo podemos establecer una relación de equivalencia de las medidas angulares entre grados y radianes:

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad}$$

$$\frac{1}{2} \text{ rev} = \frac{360°}{2} = \pi \text{ rad}$$

$$\frac{1}{2} \text{ rev} = 180° = \pi \text{ rad}$$

Así, si deseamos saber cuál es la equivalencia en radianes de 30° realizamos la siguiente conversión:

$$30° = 30\cancel{°} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180\cancel{°}} = \frac{30\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \text{; } 30° \text{ equivalen a } \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$

Sabías que...

Cuando la medida de un ángulo está expresada en radianes no es necesario escribir la unidad *rad*. El radián es la unidad por defecto de la medida angular en Matemáticas.

Ejemplo 1: ¿Cuál es la equivalencia de 45° en radianes?

Solución:

$$45° = 45\cancel{°} \cdot \frac{\pi}{180\cancel{°}} = \frac{45\pi}{180} = \frac{\cancel{9}(5)\pi}{\cancel{9}(20)} = \frac{\pi}{4} \quad \text{Por lo tanto, } 45° = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 2: ¿Cuál es la medida, en grados, de $\frac{3\pi}{2}$?

Solución:

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = \left(\frac{(3)(180)\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}\right)^{\circ} = \left(\frac{3(90)}{1}\right)^{\circ} = 270° \quad \text{Por lo tanto, } \frac{3\pi}{2} = 270°$$

Una vez entendido el concepto de radián podemos graficar a las funciones trigonométricas.

Utilizando los valores calculados para la función seno, mediante el círculo unitario, tenemos la gráfica siguiente:

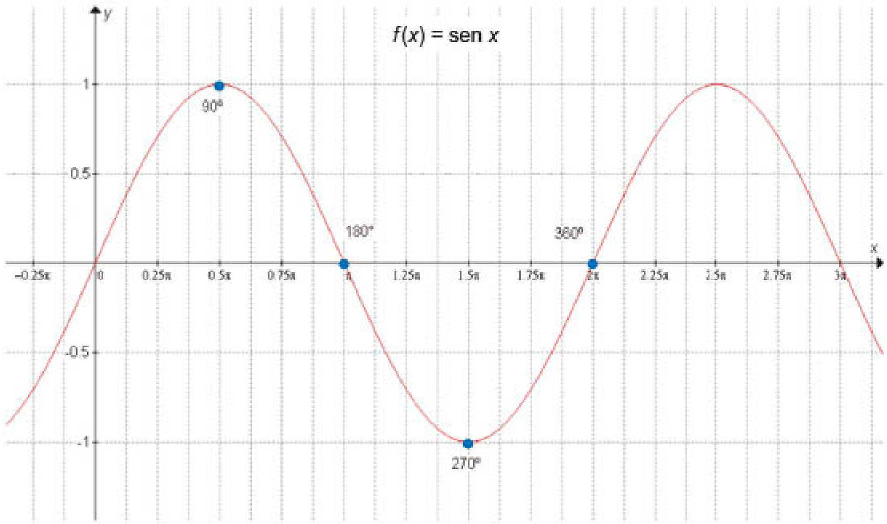


Figura 8.7.

Recordando la periodicidad de la función seno tenemos que la gráfica de la función seno hasta 390° es:

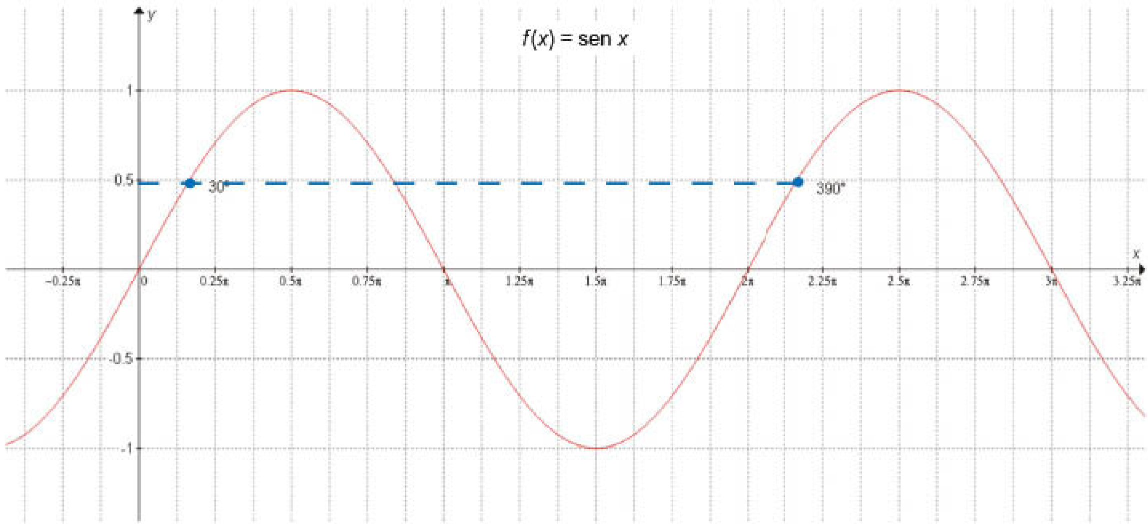


Figura 8.8.

En figura 8.9 la curva azul, que representa los valores de la función seno para ángulos comprendidos entre 0° y 360° (0 y 2π), denominada curva seno base, se reproduce totalmente para ángulos desde 360° hasta 720° (2π a 4π).

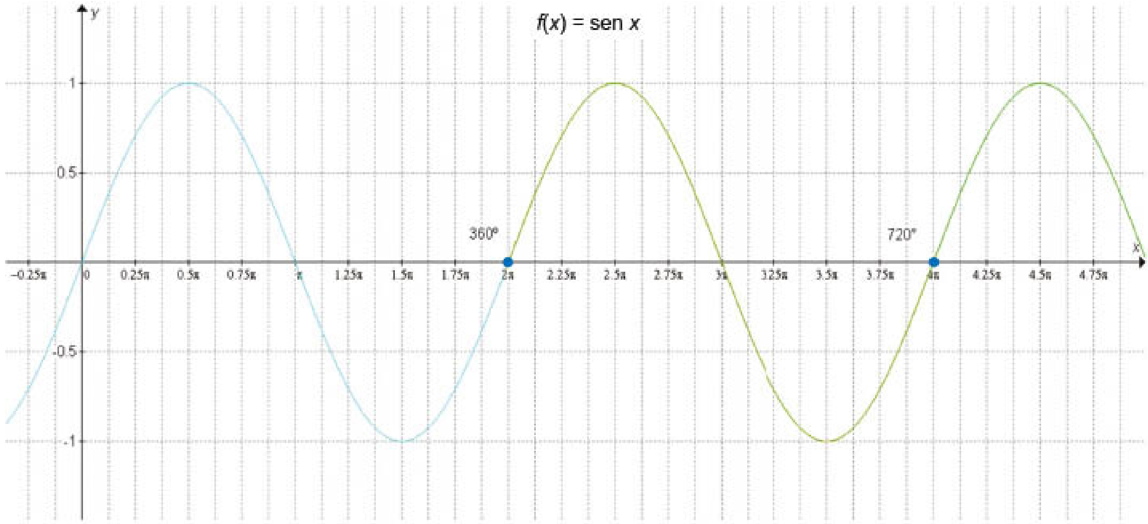


Figura 8.9.

Por último, tenemos que la gráfica para valores negativos y positivos es la siguiente:

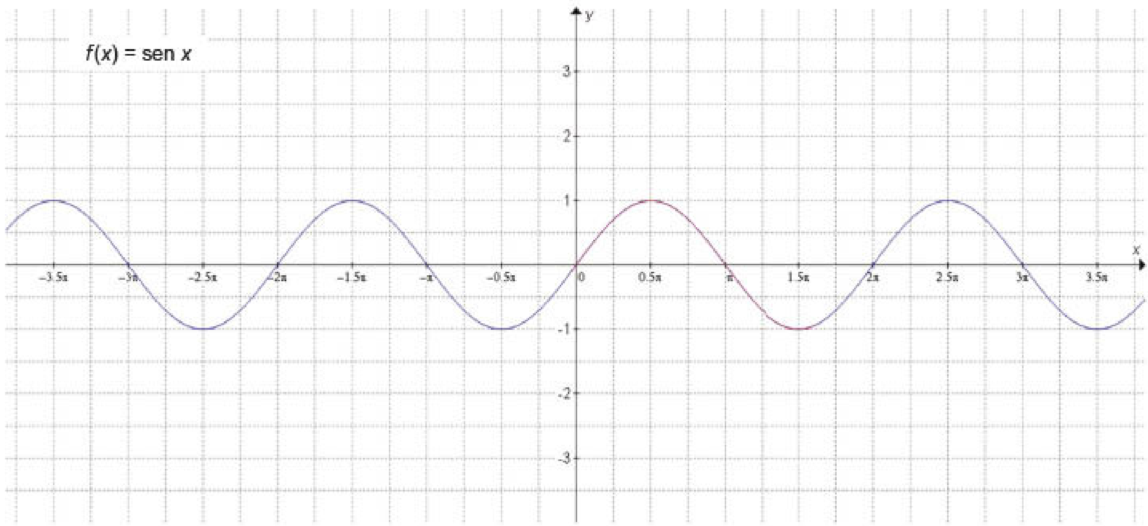


Figura 8.10.

Una vez que hemos comprendido cómo es la gráfica completa de la función seno, analicemos sus elementos:

Dominio. Domf: $x \in (-\infty, \infty)$. La gráfica se extiende horizontalmente continuamente desde $-\infty$ hasta ∞.

Rango. Rangof: $y \in (-1, 1)$. La gráfica varía verticalmente desde -1 hasta 1.

Intersección con el eje Y. El origen del plano cartesiano, que es el punto (0, 0).

Intersecciones con el eje X. Todos los puntos ($n\pi$, 0), donde n =..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...

Puntos máximos. $\frac{4n+1}{2}$p , para n =..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...

Puntos mínimos. $\frac{4n+3}{2}$p , para n =..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...

Periodo (T). 2π, que es la longitud de la onda que se reproduce periódicamente (en la gráfica es la onda azul): $T = 2\pi$. La función seno repite sus valores cada 2π unidades del eje X.

Frecuencia (f). Es el inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\text{p}}$$

Representa el número de ondas seno base que se tienen cada 2π unidades; es decir, hay una onda seno base cada   unidades sobre el eje X.

Amplitud (A). Es la máxima distancia del eje X a la gráfica de la función, sin importar la dirección; es decir, hacia arriba del eje X, el máximo se encuentra en 1 (distancia de una unidad) y hacia abajo del eje X la máxima distancia se presenta en −1 (distancia de una unidad): $A = 1$.

Función seno generalizada (senoidal)

Se ha analizado, hasta el momento, la función $f(x)$ = sen x. Sin embargo, añadiendo parámetros numéricos a esta función, podemos realizar algunas transformaciones gráficas y hacerla útil para la aplicación a problemas tales como el estudio del sonido, la electricidad, el movimiento de rotores, etcétera.

Cuando añadimos parámetros numéricos a la función $f(x)$ = sen x, obtenemos una función cuya gráfica se denomina *senoide*, onda seno, onda senoidal, sinusoide u onda sinusiodal.

La expresión de la función seno generalizada o senoidal es:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}\,(bx + c) + d$$

Donde:

a es el parámetro de amplitud,
b es el parámetro de periodo,
c es el parámetro de fase inicial (desplazamiento horizontal) y
d es el desplazamiento vertical y $d \neq 0$.

Si $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ y $d = 0$, se tiene la función base $f(x) = \text{sen } x$, que se acaba de analizar.

El parámetro *d* representa el desplazamiento de la gráfica con respecto al eje X. La gráfica base tiene su inicio en el punto $(0, d)$. Si $d = 0$, el eje horizontal de la gráfica es el eje X. Si $d > 0$, la gráfica base de seno se desplaza hacia arriba y si $d < 0$, la gráfica se desplaza hacia abajo. El parámetro *a*, de amplitud, modifica la distancia máxima desde el eje base de la gráfica, ubicado en $y = d$, hasta la gráfica senoidal (hacia arriba y hacia abajo del eje).

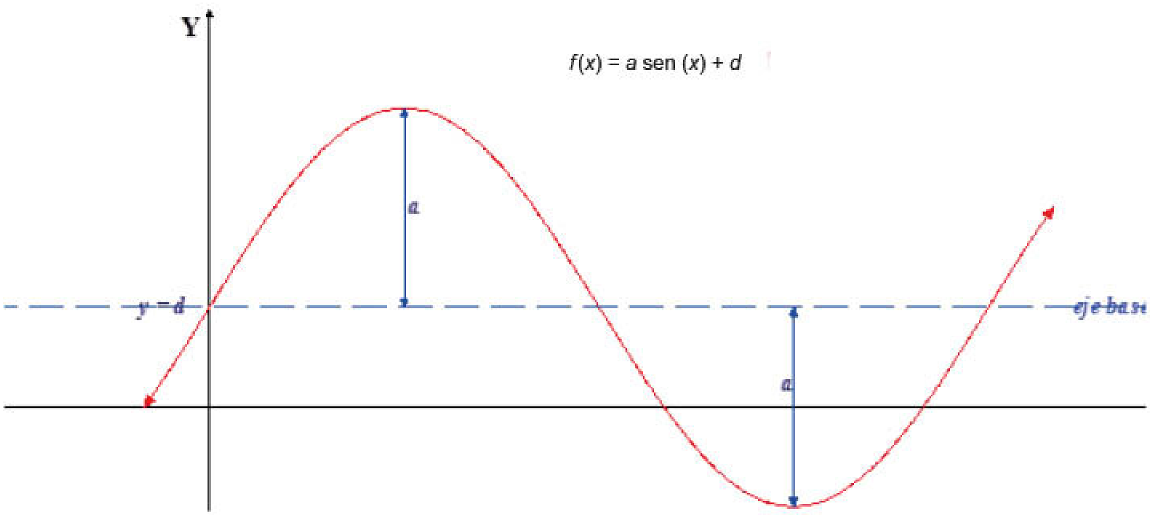


Figura 8.11.

- Si $a > 1$, la gráfica se alarga verticalmente, con respecto a la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$.
- Si $0 < a < 1$, la gráfica se acorta verticalmente, con respecto a la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$.
- Si $-1 < a < 0$, la gráfica se acorta e invierte verticalmente, con respecto a la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$.
- Si $a < -1$, la gráfica se alarga e invierte verticalmente, con respecto a la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$.

El parámetro *b* de periodo permite comprimir o alargar la gráfica base senoidal horizontalmente. Con este parámetro se puede determinar el periodo de la gráfica mediante la expresión:

$$T = \frac{2p}{b}$$

Si $0 < b < 1$, la gráfica se alarga horizontalmente y si $b > 1$ la gráfica se acorta horizontalmente.

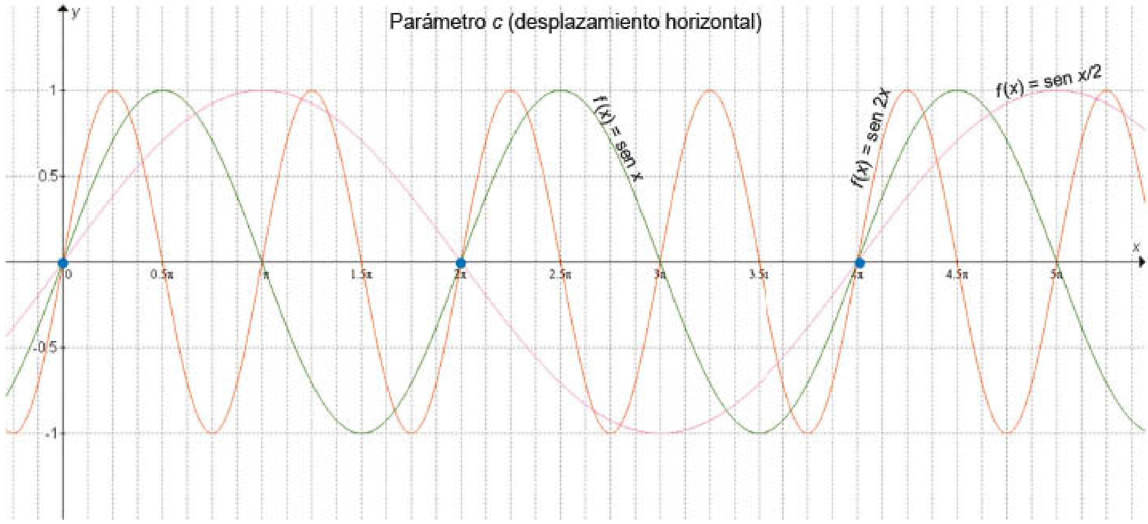


Figura 8.12.

Si $b < 0$, la gráfica se invierte horizontalmente, de modo que la gráfica base se traza de derecha a izquierda.

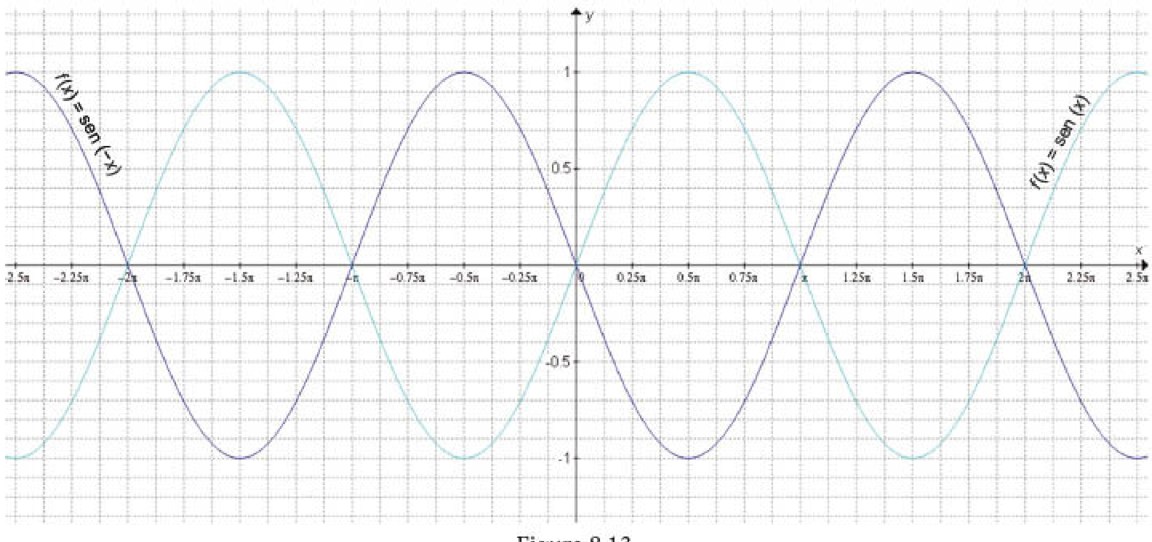


Figura 8.13.

El parámetro *c*, de fase inicial (o desplazamiento horizontal) se emplea para desplazar la gráfica horizontalmente. El inicio de la gráfica se localiza en la solución de la ecuación:

$$bx + c = 0\text{; es decir, en } x_0 = -\frac{c}{b}$$

El final de la gráfica depende del periodo, de modo que el final de la gráfica estará dado en la solución de la ecuación:

$$bx + c = 2\pi\text{; es decir, } x_4 = \frac{2\pi - c}{b}\text{, que es lo mismo que}$$

$$x_4 = x_0 + T = -\frac{c}{b} + \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi - c}{b}$$

Si c > 0, la gráfica de la función base senoidal se desplazará horizontalmente hacia la izquierda y si c < 0, la gráfica de la función base senoidal se desplazará horizontalmente hacia la derecha.

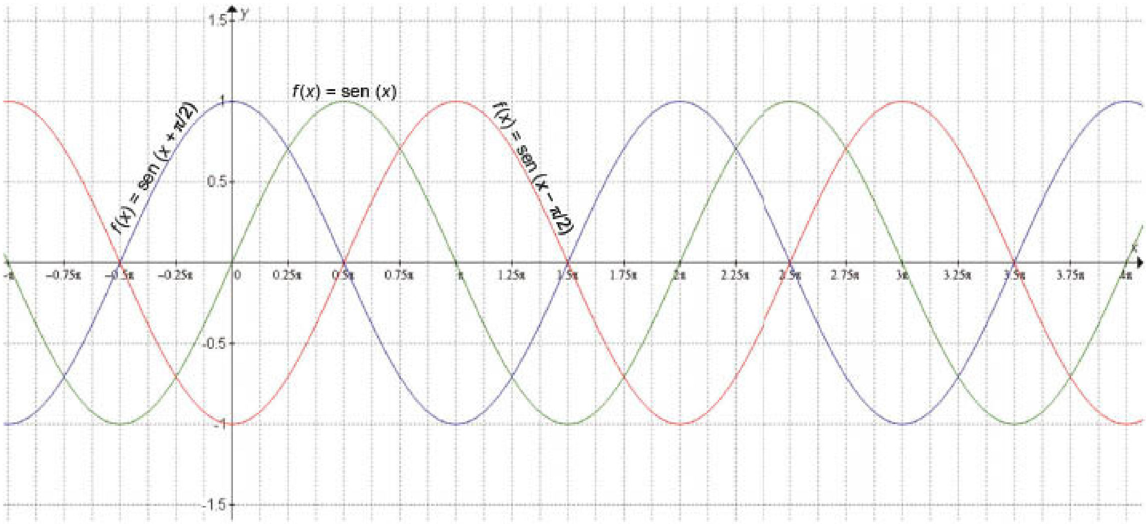


Figura 8.14.

Análisis de la función senoide:

Dominio. Domf = (−∞, ∞)

Rango. Rangof = [*d* - |*a*|, *d* + |*a*|]

Intersección con el eje Y. x = 0, y = a · sen (c) + *d*, (0, *a* · sen (c))

Intersecciones con el eje X. Pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos máximos. Pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos mínimos. Pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Periodo (T). $T=\frac{2\pi}{b}$

Frecuencia (f). $f=\frac{b}{2\pi}$

Amplitud (A). $A = |a|$

Ahora veamos el procedimiento para graficar funciones seno generalizadas, tomaremos como ejemplo la función:

$$f(x)=a\cdot \operatorname{sen}(bx+c)+d$$

Procedimiento	Ejemplificación
1. Identifica los parámetros a, b, c, y d.	$a=2 \quad b=\frac{1}{2} \quad c=-\frac{\pi}{4} \quad d=-1$
2. Calcula el periodo: $T=\frac{2\pi}{b}$	$T=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$
3. Calcula los puntos principales por los que pasará la gráfica senoidal, resolviendo las ecuaciones: $x_0=-\frac{c}{b}$, $bx_1+c=\frac{\pi}{2}$, $bx_2+c=\pi$, $bx_3+c=\frac{3\pi}{2}$ y $bx_4+c=2\pi$	$x_0=-\frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ $\frac{x_1}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{x_1}{2}=\frac{3\pi}{4} \rightarrow x_1=\frac{3\pi}{2}$ $\frac{x_2}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi \rightarrow \frac{x_2}{2}=\frac{5\pi}{4} \rightarrow x_2=\frac{5\pi}{2}$ $\frac{x_3}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{x_3}{2}=\frac{7\pi}{4} \rightarrow x_3=\frac{7\pi}{2}$ $\frac{x_4}{2}-\frac{\pi}{4}=2\pi \rightarrow \frac{x_4}{2}=\frac{9\pi}{4} \rightarrow x_4=\frac{9\pi}{2}$

4. Traza el plano cartesiano, y en él, la línea horizontal $y = d$

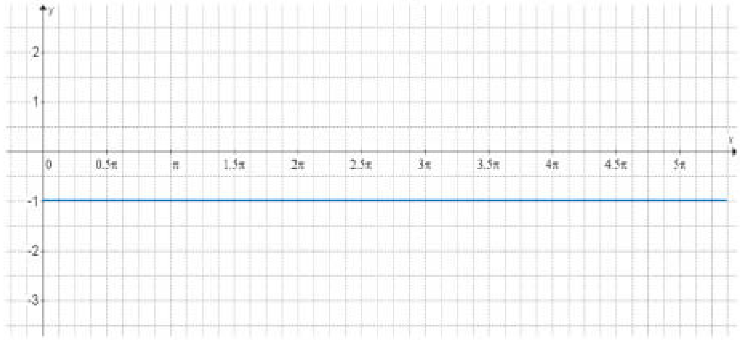


Figura 8.15.

5. Localiza, sobre el eje trazado, los valores x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

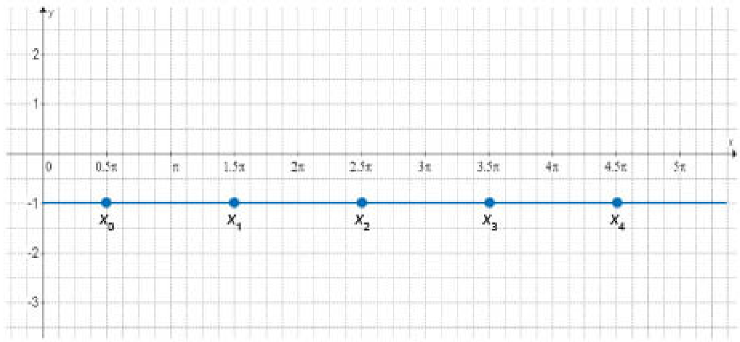


Figura 8.16.

6. Con el valor del parámetro *a* limita los valores de la gráfica, colocando líneas punteadas en $y = d + a$ y en $y = d - a$

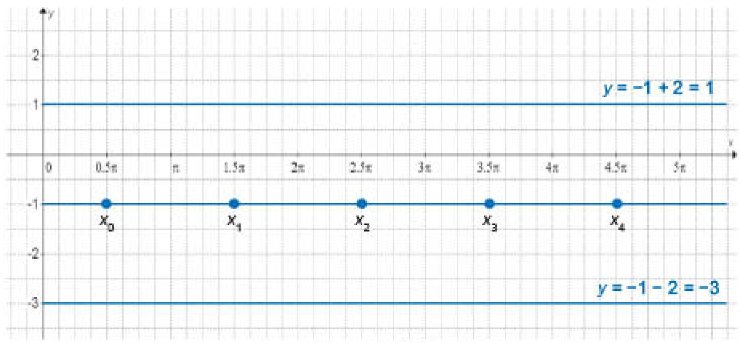


Figura 8.17.

7. Colocar los puntos (x_0, d), $(x_1, d + |a|)$ y $(x_4, 0)$.

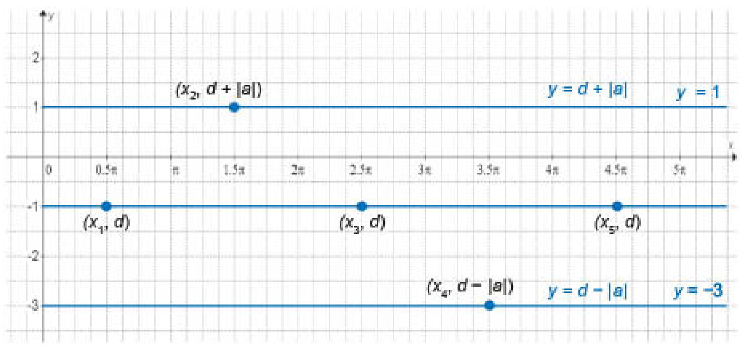


Figura 8.18.

8. Traza la gráfica, empezando en x_0 en dirección hacia x_4 considerando que:

   Si $a > 0$, debes trazar la gráfica seno base original y si $a < 0$, debes trazar la gráfica seno invertida.

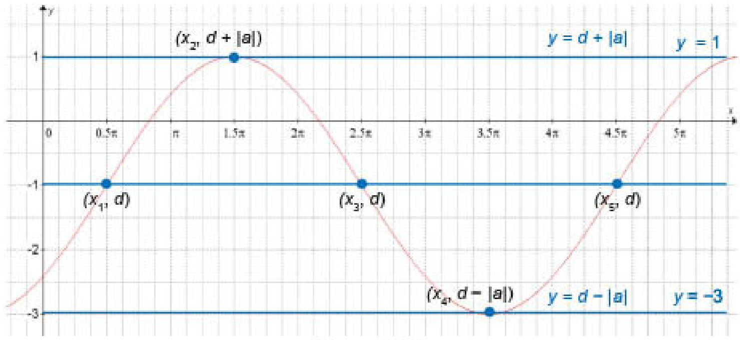


Figura 8.19.

Los siguientes ejemplos ilustran el proceso recomendado para graficar funciones senoidales.

Ejemplo 1: Analiza y traza la gráfica de la función $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$.

Solución:

Análisis de la función senoide:

Dominio: $\text{Dom}f = (-\infty, \infty)$

Rango: $\text{Rango}f = [0 - |3|, 0 + |3|] = [-3, 3]$

Intersección con el eje Y: $x = 0$, $y = 3 \cdot \text{sen}(0) + 0 = 3(0) = 0$; $(0, 0)$.

Intersecciones con el eje X: Pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos máximos: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos mínimos: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Periodo (T): $T = \frac{2p}{b} = \frac{2p}{1} = 2p$

Frecuencia (f): $f = \frac{b}{2p} = \frac{1}{2p}$

Amplitud (A): $A = |3| = 3$

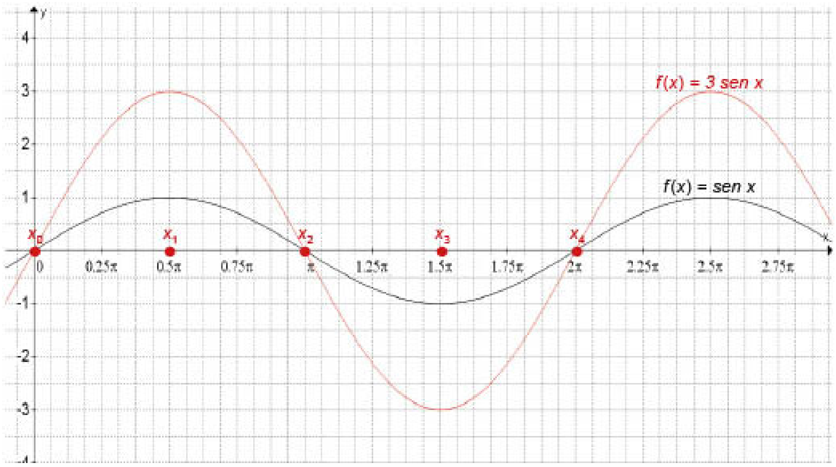
Los parámetros son: $a = 3, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad d = 0$

Dado que $a = 3$*, la gráfica tiene como eje principal al eje X.*

Calculamos los puntos principales de la gráfica:

$$x_0 = -\frac{c}{b} = -\frac{0}{1} = 0 \qquad x_1 = \frac{\pi}{2} \qquad x_2 = \pi \qquad x_3 = \frac{3\pi}{2} \qquad x_4 = 2\pi$$

Dado que a = 3, trazamos la gráfica senoidal sin desplazamientos y alargada verticalmente:



Intersecciones con el eje X: $x = \ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$

Puntos máximos: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{1} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Puntos mínimos: $x = \frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi n}{1} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Ejemplo 2: Analiza y construye la gráfica de la función $f(x) = -4 \text{ sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Solución:

Dominio: Domf = (−∞, ∞)

Rango: Rangof = $[0 - |4|, 0 + |4|] = [-4, 4]$

Intersección con el eje Y: $x = 0, \quad y = -4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0 = -4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}, \quad \left(0, -2\sqrt{2}\right)$

Intersecciones con el eje X: Pueden determinarse después de trazar la gráfica.
Puntos máximos: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Continúa...

Puntos mínimos: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Periodo (T): $T = \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

Frecuencia (f): $f = \dfrac{b}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}$

Amplitud (A): $A = |-4| = 4$

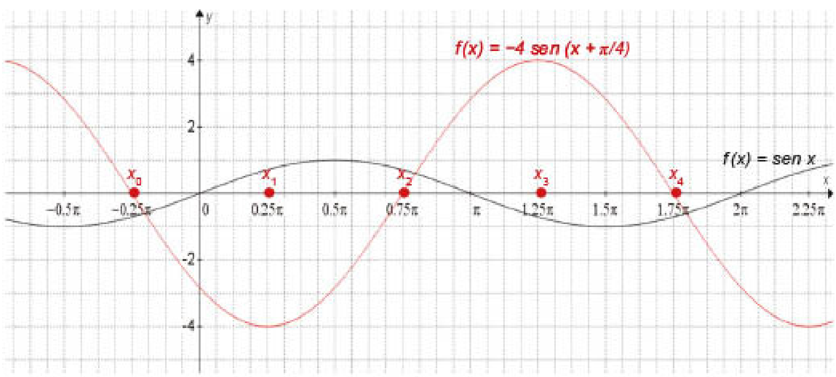
Los parámetros son: $a = -4, \quad b = 1, \quad c = \dfrac{\pi}{4}, \quad d = 0$

Dado que d = 0, la gráfica tiene como eje principal al eje X. Calculamos los puntos principales de la gráfica:

$$x_0 = -\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\pi}{4}}{1} = -\frac{\pi}{4} \qquad x_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{4} \qquad x_2 + \frac{\pi}{4} = \pi \;\rightarrow\; x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_3 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \;\rightarrow\; x_3 = \frac{5\pi}{4} \qquad x_4 + \frac{\pi}{4} = 2\pi \;\rightarrow\; x_4 = \frac{7\pi}{4}$$

Dado que a = −4, trazamos la gráfica invirtiendo verticalmente la curva base senoidal, que debe ser una gráfica desplazada π/4 a la izquierda, alargada verticalmente e invertida con respecto a la senoidal base:



Intersecciones con el eje X: $\dfrac{3\pi}{4} + n\pi, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Puntos máximos: $\dfrac{5\pi}{4} + n\pi, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Puntos mínimos: $\dfrac{3\pi}{4} + n\pi, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones: Determina la amplitud y el periodo para cada ecuación y traza su gráfica:

a) $y = 6 \cdot \text{sen}\, x$

b) $y = 5 \cdot \text{sen}(3x)$

c) $y = -1.5 \cdot \text{sen}(4x)$

d) $y = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

e) $y = \text{sen}\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Función coseno

Los elementos de la función coseno son los siguientes:

Dominio. Domf: $x \in (-\infty, \infty)$. La gráfica se extiende horizontalmente continuamente desde $-\infty$ hasta ∞.

Rango. Rangof: $y \in (-1, 1)$. La gráfica varía verticalmente desde -1 hasta 1.

Intersección con el eje Y. El punto (0, 1).

Intersecciones con el eje X. Todos los puntos $\left(\frac{n\pi}{2}, 0\right)$, donde n =..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3... .

Puntos máximos. $2n\pi$ para n =..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3... .

Puntos mínimos. $n\pi$, para n =..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3... .

Periodo (T). 2π.

Frecuencia (f). Es el inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$$

Amplitud (A). Es la máxima distancia del eje X a la gráfica de la función, sin importar la dirección; es decir, hacia arriba del eje X, el máximo se encuentra en 1 (distancia de una unidad) y hacia abajo del eje X la máxima distancia se presenta en −1 (distancia de una unidad): $A = 1$.

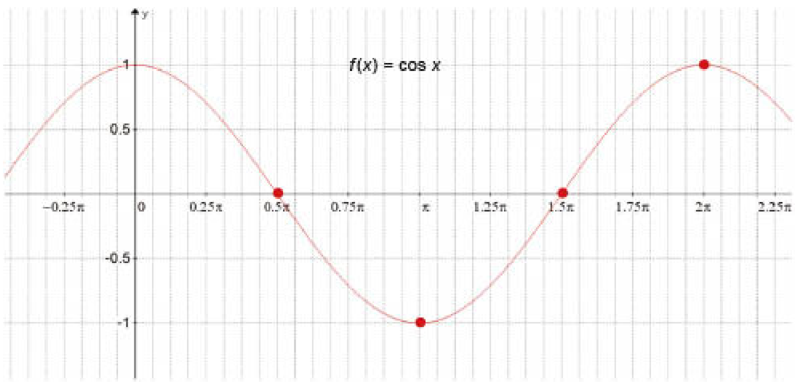


Figura 8.20.

Función coseno generalizada (cosenoide)

Su expresión general es:

$$f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$$

Donde:

a es el parámetro de amplitud,

b es el parámetro de periodo,
c es el parámetro de fase inicial (desplazamiento horizontal) y
d es el desplazamiento vertical y d ≠ 0.

Análisis de la función cosenoide:

Dominio. Domf = (−∞, ∞)

Rango. Rangof = [*d* - |*a*|, *d* + |*a*|]

Intersección con el eje Y. x = 0, y = a · cos (c) + *d*, (0, *a* · cos (c) + d)

Intersecciones con el eje X. Pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos máximos. Pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos mínimos. Pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Periodo (*T*). $T = \frac{2\pi}{b}$

Frecuencia (*f*). $f = \frac{b}{2\pi}$

Amplitud (*A*). *A* = |*a*|

Si *a* = 1, *b* = 1, *c* = 0 y *d* = 0, se tiene la función base *f*(*x*) = cos *x* que se acaba de analizar. Los parámetros de la función cosenoide afectan la gráfica de la función coseno base de la misma manera que en la función senoide. El procedimiento para graficar las funciones cosenoides es semejante al del trazado de la gráfica de la función senoide.

Con los siguientes ejemplos se ilustra el proceso de análisis de las funciones cosenoides:

Ejemplo: Analiza y traza la gráfica de la función $f(x) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{x}{4}\right) + 2$.

Solución:

Dominio: $Domf = (-\infty, \infty)$ *Rango:* $Rangof = \left[2 - \left|\frac{3}{2}\right|, 2 + \left|\frac{3}{2}\right|\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$

Intersección con el eje Y: x = 0, y = a · cos (c) + d, (0, a · cos (c) + d)

$$y=\frac{3}{2}\cdot\cos(0)+2=\frac{3}{2}\cdot(1)+2=\frac{3}{2}+2$$

$$y=\frac{7}{2},\quad\left(0,\frac{7}{2}\right)$$

Intersecciones con el eje X: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos máximos: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos mínimos: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Periodo (T): $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

Frecuencia (f): $f=\dfrac{1}{8\pi}$

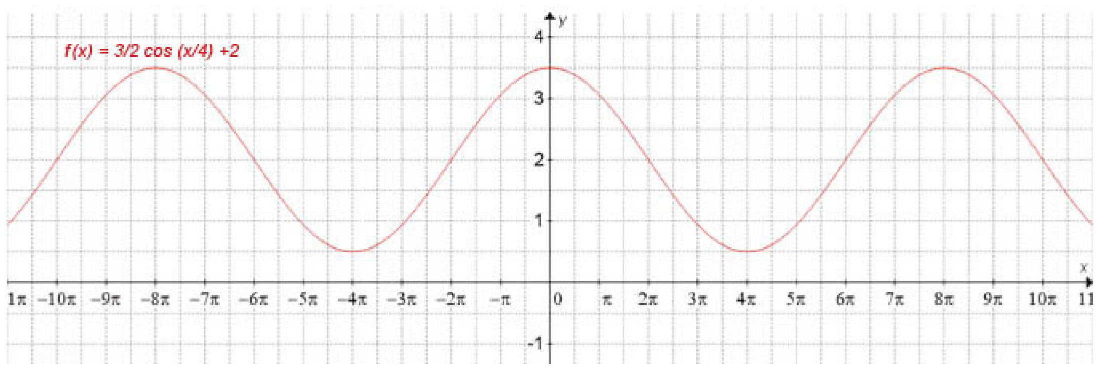
Amplitud (A): $A=\left|\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{3}{2}$

Los parámetros son: $a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{4}, c=0, d=2$

$$x_0=-\frac{c}{b}=-\frac{0}{\frac{1}{4}}=0 \qquad \frac{1}{4}x_1+0=\frac{\pi}{2}\ \rightarrow\ x_1=2\pi \qquad \frac{1}{4}x_2+0=\pi\ \rightarrow\ x_2=4\pi$$

$$\frac{1}{4}x_3+0=\frac{3\pi}{2}\ \rightarrow\ x_3=6\pi \qquad \frac{1}{4}x_4+0=2\pi\ \rightarrow\ x_4=8\pi$$

Dado que a = 3/2, trazamos la gráfica de la curva base cosenoidal, sin desplazamiento horizontal, alargada verticalmente y desplazada verticalmente, como se muestra en la figura:



Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones: Realiza los ejercicios en tu cuaderno.

1. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son el dominio y el rango de las funciones seno y coseno?

b) ¿Cómo se comporta la función seno? ¿y el coseno?

c) ¿Cuál es el procedimiento recomendado para trazar la gráfica de la función seno generalizado? ¿y del coseno generalizado?

Figura 8.21.

2. Traza la gráfica de las funciones dadas:

a) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Compara lo obtenido de la función anterior con la función seno. ¿Qué puedes concluir de este ejercicio?

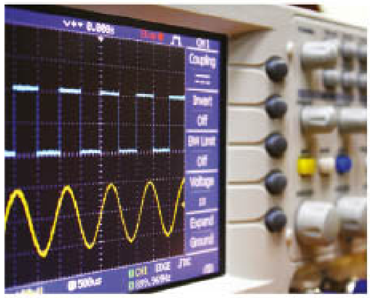


Figura 8.22.

b) $f(x) = \frac{5}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{3}{4}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Modelado y solución de problemas con funciones trigonométricas

Las aplicaciones de las funciones trigonométricas son extensas e interesantes. Por ejemplo, los fenómenos de vibración tales como los de las cuerdas de una guitarra para producir sonido y el sonido mismo se describen mediante funciones trigonométricas. También el estudio de los temblores es analizado mediante funciones trigonométricas.

La electricidad, y particularmente el cálculo de su intensidad en corriente alterna, está determinada por funciones trigonométricas, la luz y las ondas electromagnéticas, como las ondas de radio y televisión, también obedecen modelos trigonométricos.

Los movimientos periódicos, es decir aquellos que cada cierto intervalo de tiempo repiten los valores su posición, velocidad y aceleración, variando desde un valor mínimo hasta un valor máximo en cada oscilación, se dice que son movimientos armónicos simples (MAS). Por ejemplo, los péndulos, los resortes, las cuerdas de una guitarra, etcétera. El modelo que obedece el MAS es:

$$x = a \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + x_0)$$

Donde x es la posición de un punto del objeto que vibra en MAS, a es la elongación máxima o amplitud, ω es la frecuencia angular (número de ciclos por unidad de tiempo) y x_0 es la posición inicial o de equilibrio.

Los siguientes son algunos ejemplos de la forma de analizar y resolver problemas con el uso de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 1: Un objeto se suspende de un resorte fijo, se elonga y se suelta de modo que produce un movimiento vibratorio donde:

$$a = 25 \text{ cm} \qquad \text{w} = \frac{3}{4} \text{ Hz} \qquad x_0 = \frac{\text{p}}{6}$$

Construye la gráfica del movimiento del resorte y calcula su posición a los 4 segundos.

Solución:

La expresión para la posición del objeto es: $x = 25 \cdot sen\left(\frac{3}{4} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$

Que de acuerdo al estudio de la función seno, tiene una gráfica con amplitud de 25 unidades, así como un desplazamiento horizontal hacia la izquierda de $\pi/6$ respecto a la función base de seno.

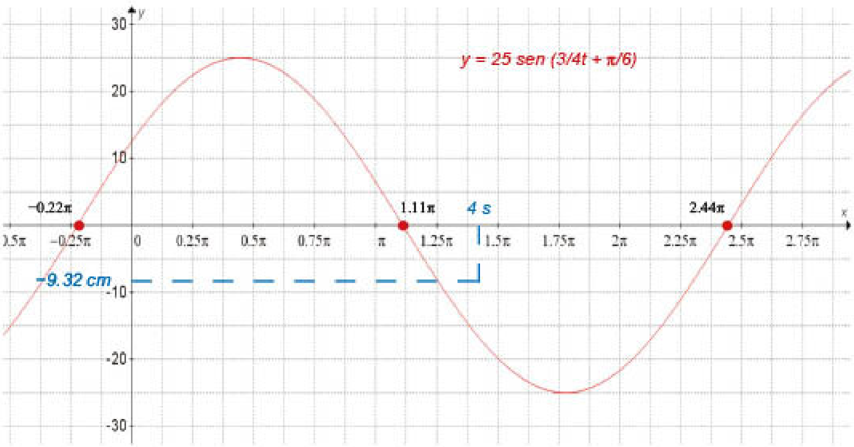
El periodo de la función es: $T = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$ *(la gráfica se alarga horizontalmente)*

$$\frac{3}{4}x_0 + \frac{\pi}{6} = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = -\frac{2\pi}{9} \qquad \frac{3}{4}x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{4\pi}{9}$$

$$\frac{3}{4}x_2 + \frac{\pi}{6} = \pi \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{10\pi}{9} \qquad \frac{3}{4}x_3 + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x_3 = \frac{16\pi}{9}$$

$$\frac{3}{4}x_4 + \frac{\pi}{6} = 2\pi \quad \rightarrow \quad x_4 = \frac{22\pi}{9}$$

Gráfica:



La posición a los 5 segundos es de:

$$f(4) = 25 \cdot sen\left(\frac{3}{4}(4) + \frac{\pi}{6}\right) = 25 \cdot sen\left(3 + \frac{\pi}{6}\right) = -9.32$$

Ejemplo 2: La ecuación para calcular la intensidad de la corriente eléctrica alterna en un dispositivo de cómputo está dada por la expresión:

$$I(t) = I_p \cdot sen(kt)$$

Donde I_p es el valor de pico de la corriente o su amplitud, en amperes, k es la constante de frecuencia, en Hertz (Hz) y t es el tiempo, en segundos. Si el pico máximo de corriente es de 10 amperes y k = 1/2. Construye la gráfica del comportamiento de la corriente en este dispositivo.

Solución:

La función del problema es:

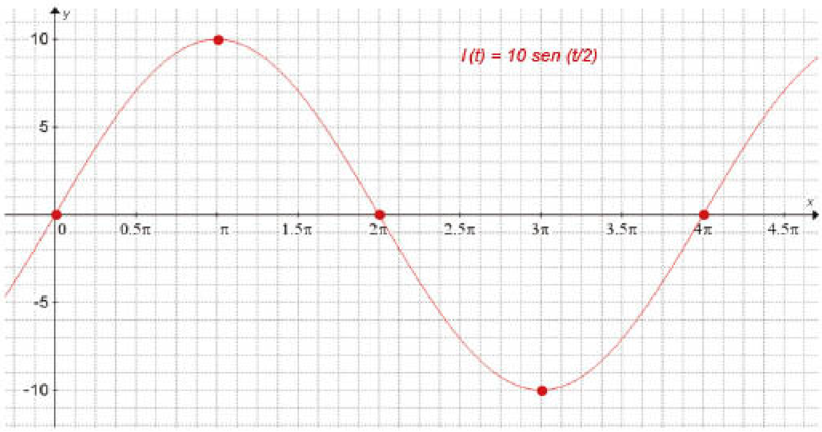
$$I(t) = 10 \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right)$$

Donde la amplitud 10 y el periodo es $T = \dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{2}} = 4\pi$

Donde no hay desplazamientos:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \pi \qquad x_2 = 2\pi \qquad x_3 = 3\pi \qquad x_4 = 4\pi$$

Gráfica:



Ejemplo 3: Por una de las cuerdas de una guitarra se propaga una onda transversal con amplitud de 7 cm, frecuencia de 40 Hz y velocidad de propagación de 25 cm/s. Calcula la ecuación de onda y traza su gráfica.El modelo de las ondas que se propagan en cuerdas está dado por la expresión:

$$f(t) = a \cdot \cos(bt)$$

Donde *a* es la amplitud, $b = 2\pi f$, *f* es la frecuencia y *t* es el tiempo.

Encuentra la ecuación de las ondas sonoras producidas por una cuerda de una guitarra con una amplitud de 7 cm y frecuencia de 40 Hz.

Solución:

La ecuación buscada es:

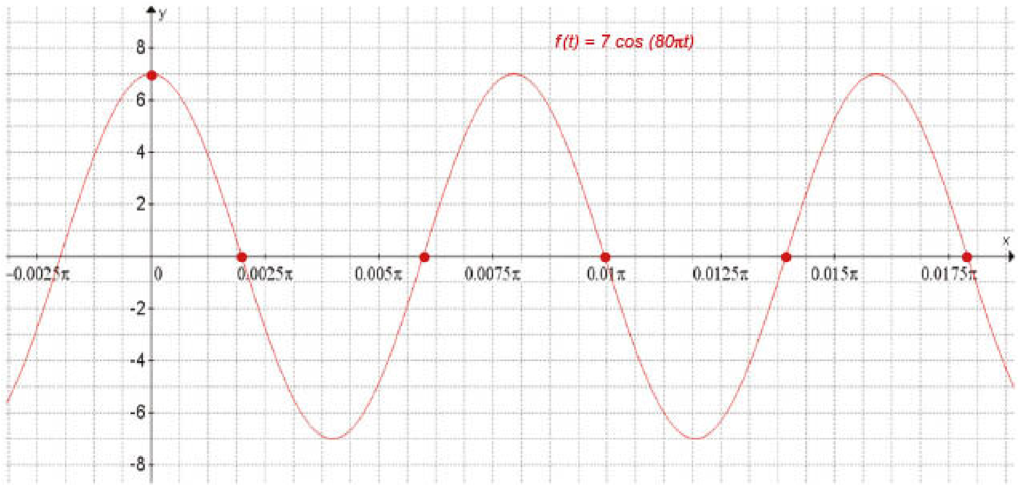
$$f(t) = 7 \cdot \cos\left(2\pi(40)t\right) = 7 \cdot \cos(80\pi t)$$

La gráfica no tiene desplazamientos, por lo que:

$$80\pi t_0 = 0 \rightarrow t_0 = 0 \quad 80\pi t_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow t_1 = \frac{1}{160} \quad 80\pi t_2 = \pi \rightarrow t_2 = \frac{1}{80}$$

$$80\pi t_3 = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t_3 = \frac{3}{160} \quad 80\pi t_4 = 2\pi \rightarrow t_4 = \frac{1}{40}$$

La gráfica es:



Actividad de aprendizaje 3

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

1. Analiza el efecto de las constantes en la gráfica de las siguientes ecuaciones.

a) $y = \text{sen}(x) + 1$

b) $y = \text{sen}(x) - 1$

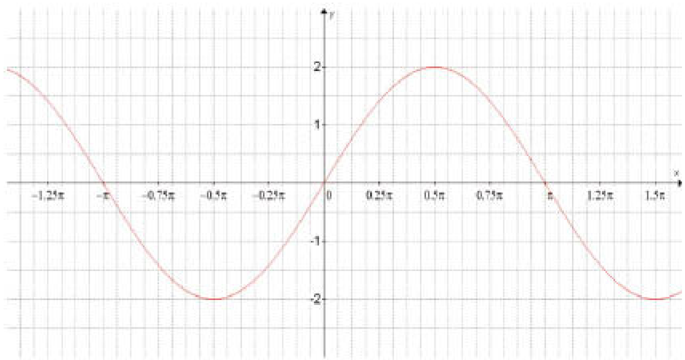
c) $y = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$

d) $y = \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$

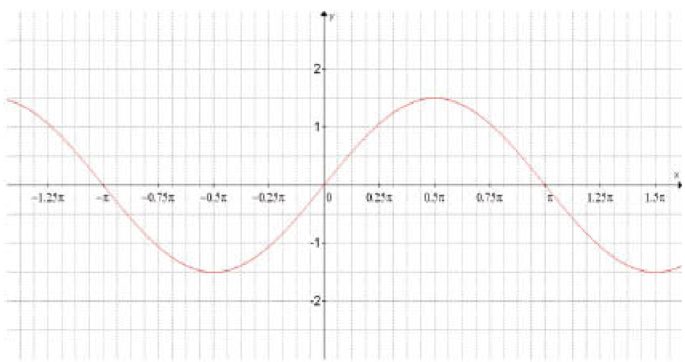
e) $y = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + 3$

2. ¿Cuál es la gráfica de las función $y = \frac{3}{2}\text{sen}(x)$?

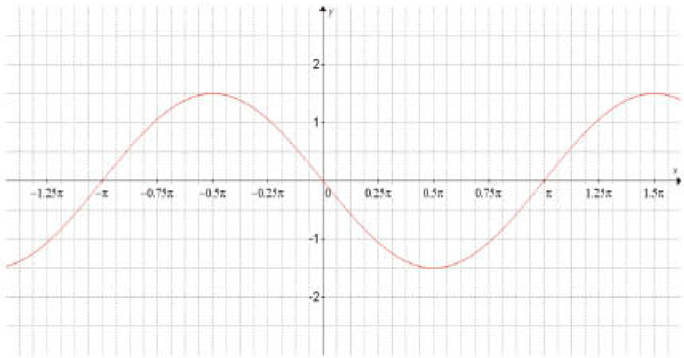
a)



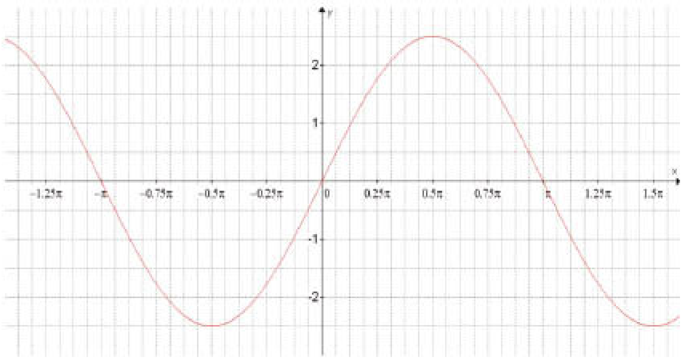
b)



c)



d)



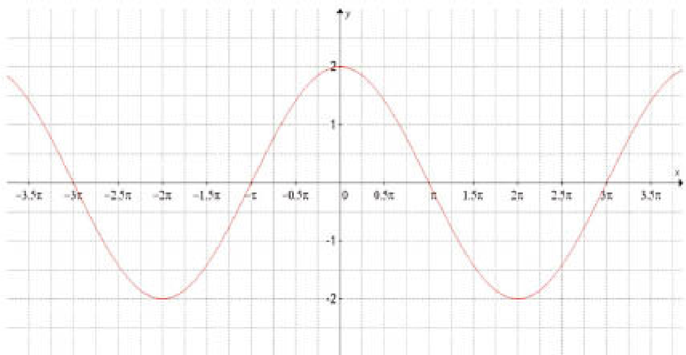
3. ¿Cuál es la ecuación de la gráfica que se muestra?

a) $y = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

b) $y = 2\cos(2x)$

c) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + 1$

d) $y = \cos(2x) + 1$



Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el apéndice al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Cierre del bloque VIII

Reflexiona sobre lo aprendido

Al final de este texto, se presentaron situaciones en las que se incluyó el concepto de aplicas funciones periódicas. A lo largo del texto se han abordado los conceptos básicos al respecto de las relaciones y funciones. Siendo que estas últimas son el motivo principal del presente material, realiza una síntesis en la que describas las ventajas de conocer los elementos de las funciones periódicas descritos y como los aplicarías para mejorar determinadas situaciones.

Es importante considerar que el trabajo de funciones es extenso y, en ocasiones, la teoría formal se vuelve un tanto compleja; sin embargo, puedes comenzar con las bases respecto a qué elementos de una función periódica debes conocer, si existe alguna forma de organizarlas y, en general, los elementos aplicables a ellas. Integra todo lo anterior a través de una investigación cuyo propósito sea identificar la importancia de trabajar adecuadamente con funciones de cualquier tipo.

Autoevaluación

Instrucciones (1): En tu libreta escribe una solución para los siguientes planteamientos. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

a) Describe el análisis para trazar una función seno generalizada (senoidal):

$$f(x) = A\ sen\ tx$$

b) Describe el análisis para trazar una función coseno generalizada (cosenoide)

$$f(x) = A\ \cos tx$$

Instrucciones (2): Investiga diferentes situaciones donde consideres que se pueden observar las gráficas de funciones trigonométricas seno y coseno. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

10. Resolver la ecuación $\log(3x-5)-\log(5x)=1.23$

11. Resolver la ecuación $\log_7 x=\frac{3}{2}\log_7 64$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Glosario

- **Gráfica:** una de las formas más útiles con la que podemos representar situaciones que pueden recibir los nombres de funciones y relaciones.
- **Conjunto:** grupo o colección de personas, objetos, etc., que tienen alguna característica en común.
- **Función:** relación tal que cada elemento del dominio está relacionado con uno, y sólo un elemento del codominio.
- **Relación:** subconjunto de un producto cartesiano formado por los elementos de éste último normalmente definido por una regla o ley dada. Sus elementos se denotan como (x, y), significa que x está relacionado con y.
- **Dominio:** conjunto formado por los primeros componentes de las parejas que pertenecen a la relación.
- **Imagen:** conjunto formado por los segundos componentes de las parejas que pertenecen a la relación, el cual es un subconjunto del codominio.
- **Contradominio:** conjunto al cual pertenecen los segundos componentes de las parejas contenidas en la relación.
- **Regla de correspondencia:** la función es una regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos llamados dominio y rango.
- **Constante:** símbolo que representa un valor fijo; mientras que una variable es un símbolo que puede representar diferentes valores.
- **Asíntotas:** los valores que hacen a una función que sea indefinida, porque al denominador se convierte a cero.
- **Funciones explícitas:** la variable dependiente está despejada.
- **Funciones implícitas:** la función está dada por una ecuación; es decir la variable dependiente no está despejada.
- **Función inyectiva:** función univalente o uno-uno si y sólo si cada $f(x)$ en el recorrido es la imagen de exactamente un único elemento del dominio; es decir, es función inyectiva si cada elemento del dominio tiene una imagen diferente.
- **Función escalonada:** aquella cuya gráfica tiene la forma de una escalera o una serie de escalones (que no necesariamente deben ser crecientes).
- **Valor absoluto:** se representa por el símbolo $|x|$; esto significa que si x es de signo positivo se queda igual, si es negativo se le cambia de signo para que quede positivo.
- **Funciones polinomiales:** modelos matemáticos que describen relaciones entre dos variables por medio de un polinomio, que, como sabemos, es la expresión de suma o resta de términos algebraicos no semejantes entre sí.
- **Pendiente de la recta:** valor numérico de la inclinación de una recta, se representa por la letra (m).
- **Función cuadrática:** su expresión general es $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ que suele expresarse como $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, se le conoce como función cuadrática, al graficar esta función se describe una parábola.
- **Dominio de las funciones polinomiales:** todo el conjunto de los números reales.
- **Función continua:** sus gráficas no presentan interrupciones.

- **Raíces racionales:** técnicas utilizadas para factorizar polinomios de tercer grado con el propósito de encontrar y combinar los factores del coeficiente de x de mayor grado y los factores del termino independiente, ya que las raíces del polinomio siempre dan como producto a esos dos números.
- **Funciones algebraicas:** se definen a partir de relaciones aritméticas como la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potencia y la raíz.
- **Raíces del polinomio:** ceros del polinomio. Valores de x que hacen que un polinomio $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ valga cero se les llaman raíces o ceros del polinomio.
- **Ceros de una función polinomial $f(x)$:** son los valores que hacen que $f(x) = 0$. Gráficamente se reconocen, pues son los valores de las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica con el eje X.
- **Rango:** conjunto de todos los números reales, es decir, $Rangof = \mathbb{R}$, que significa que la gráfica se extiende verticalmente desde $-\infty$ hasta ∞.
- **Función racional:** aquella que se obtiene al dividir un polinomio entre otro polinomio de mayor o menor grado que el primero siempre que ambos polinomios tengan la misma variable.
- **Dominio de una función racional:** Es el conjunto de todos los números reales excepto los ceros.
- **Función exponencial:** se denomina función exponencial a toda función de la forma $y = a \cdot b^x$ o $f(x) = a \cdot b^{kx}$ donde x se acepta cualquier valor real, b es un número positivo y distinto de 1 y $a \neq 0$ y $k \neq 0$.
- **Función exponencial natural:** función con base e, es decir, $y = a \cdot e^{kx}$.
- **Función logarítmica:** potencia a la que hay que elevar el número 10 para obtener el número propuesto.
- **Función periódica:** función que cumple la condición de periodicidad, es decir, si después de cada cierto intervalo de tiempo o espacio constante, llamado periodo, la función adquiere el mismo valor de partida.
- **Círculo trigonométrico:** si en el plano cartesiano dibujamos un círculo de radio r con centro en el origen y trazamos uno de sus radios, tenemos una herramienta útil para analizar a las funciones trigonométricas.
- **Funcion seno:** está determinada por la ordenada y del punto P y el radio r cuya medida permanece constante. De este modo, podemos afirmar que el valor de esta función depende, principalmente, del valor de y, de modo que la razón y/r se denomina función seno.
- **Función coseno:** está determinada por la abscisa x del punto P y el radio r cuya medida permanece constante. De este modo, podemos afirmar que el valor de esta función depende, principalmente, del valor de x, de modo que la razón x/r se denomina función coseno.
- **Radian:** ángulo central que se genera cuando el arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio.
- **Valor de π:** razón del perímetro de una circunferencia al diámetro de la misma; es decir, representa las veces que el diámetro de la circunferencia cabe en su contorno o perímetro.

Apéndice

Retroalimentación de las actividades de aprendizaje

Evaluación diagnóstica

I.

1.

Término algebraico	*Coeficiente numérico*	*Literal*	*Grado absoluto*	*Grado relativo a la primera variable*
$7x^2y^3$	7	xy	5	2
$-3mn^2$	-3	mn	3	71
$7.5a^3bc^2$	7.5	abc	6	3
x^2	1	x	2	2
$\frac{xy}{5}$	$\frac{1}{5}$	xy	2	1
$-x^4y^5$	-1	xy	9	4
$\frac{ab^3}{3}$	$\frac{1}{3}$	ab	4	1
$-\frac{1}{2}mn$	$-\frac{1}{2}$	mn	2	1
$\sqrt[3]{10}\,r^2s^3$	$\sqrt[3]{10}$	rs	5	2
-5.75	-5.75	---	---	---

2.

$$4(3)-\frac{5(-11)}{3(5)+2(3)+1}+\frac{1}{2}=12-\frac{-55}{15+6+1}+\frac{1}{2}=12+\frac{55}{22}+\frac{1}{2}=12+\frac{5(\cancel{11})}{2(\cancel{11})}+\frac{1}{2}=12+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=12+\frac{6}{2}=12+3=15$$

3.

$$\underbrace{(7x-2y)(7x+2y)}_{\text{Producto de binomios conjugados}}=\underbrace{(7x)^2-(2y)^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}=49x^2-4y^2$$

4.

$$\frac{5x}{2y-1}=2$$
$$5x=2(2y-1)$$
$$5x=4y-2$$
$$5x+2=4y$$
$$\frac{5x+2}{4}=y$$
$$y=\frac{5x+2}{4}$$

5.

$$3x(x+2)+x=30-2x$$
$$3x^2+6x+x=30-2x$$
$$3x^2+7x=30-2x$$
$$3x^2+7x+2x-30=0$$
$$3x^2+9x-30=0$$
$$3(x^2+3x-10)=0$$
$$x^2+3x-10=0$$
$$(x+5)(x-2)=0$$
$$x+5=0 \qquad x-2=0$$
$$x_1=-5 \qquad x_2=2$$

6.

$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}}=\frac{x+3}{x-2}$$

II.

7. *c)* 2

8. *d)* $(x-2)(x-2)=0$

III.

9.

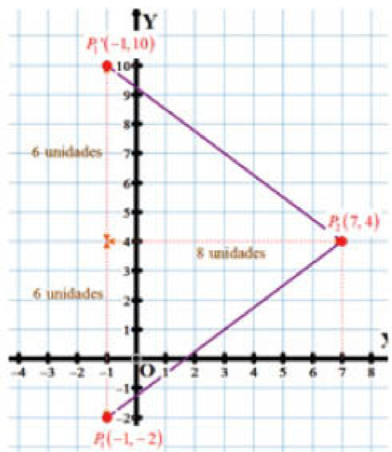
$$10=\sqrt{(7+1)^2+(4-y_1)^2} \;\Rightarrow\; (10)^2=\left(\sqrt{64+(4-y_1)^2}\right)^2 \;\Rightarrow\; 100=64+(4-y_1)^2$$
$$100-64=(4-y_1)^2 \;\Rightarrow\; 36=(4-y_1)^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{36}=\sqrt{(4-y_1)^2} \;\Rightarrow\; \pm 6=4-y_1$$

$y_1 \pm 6=4 \;\Rightarrow\; y_1=4\mp 6$, *lo que implica dos soluciones:*

$$y_1=-2 \qquad y_1=10$$

Los puntos que distan 10 del punto $P_2(7,4)$ *son* $P_1(-1,-2)$ *y* $P_1'(-1,10)$.

La gráfica muestra la validez de esta conclusión:



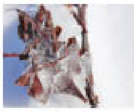
10.

$70xy^8$, $30x^3y^7$, $-7x^2y^6$, $12x^5y^3$, x^4y

Bloque I

Para iniciar, reflexiona

I. Palabras que se pueden asociar a las imágenes dadas:


Frío


Luz


Sombra


Ácido

II. Ahora establece una palabra que relaciones con lo siguiente:

Abeja → Miel
Vaca → Leche
Gallina → Huevos
Borrego → Lana

III. En plenaria o por equipos se comentan las respuestas basándose en las preguntas que se plantean para ese momento de la actividad.

Actividad de aprendizaje 1

I.

1. Es una actividad detonadora. El alumno deberá elegir los valores para la tabla que considere mejores con base en lo estudiado en clase. El conjunto de los números reales o el plano cartesiano.

2.

El objetivo es modelar (linealmente) la situación. Cada elemento de la secuencia se escribe como una función del elemento previo, como una formula:

$$(x_n = n \;, y_n = 2n - 1)$$

II.

3. Es una actividad detonadora. El alumno deberá elegir los valores para la tabla que considere mejores con base en lo estudiado en clase.

4. Soluciones:

$$A \times B = \{(2,0),(2,4),(2,9),(5,0),(5,4),(5,9)\}$$
$$A \times A = \{(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)\}$$

5. Es una actividad detonadora. El alumno deberá elegir los valores para la tabla que considere mejores con base en lo estudiado en clase.

Actividad de aprendizaje 2

1.

Rango $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 5\}$

a) $f(x) = x^2 + 5$

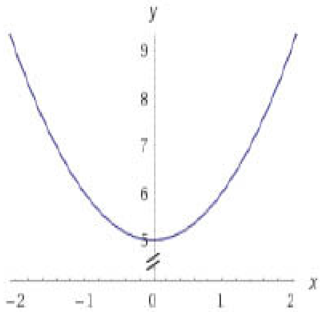
$f(1) = (1)^2 + 5 = 6$

$f(2) =$

$f(3) =$

$f(4) =$

$f(5) =$



Es una relación.

Rango $\{x \in \mathbb{R} : y \geq -5\}$

b) $f(x) = \sqrt{x}\ \text{-}5$

$f(1) = \pm\sqrt{1} - 5 = \pm 1\text{-}5$

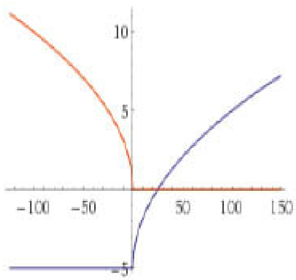
$f(1) = -4 \quad y \quad f(1) = -6$

$f(2) =$

$f(3) =$

$f(4) =$

$f(16) =$



Es una relación.

Rango $\{x \in \mathbb{R}\}$

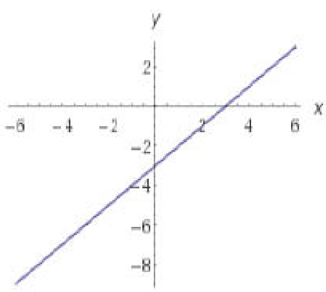
c) $f(x) = x\ \text{-}3$

$f(7) = 7 - 3 = 4$

$f(8) = -4$

$f(9) =$

$f(10) =$



Es una función.

d) *Se trata de una función*

2.

a) Relación

b) Relación

c) Relación

Actividad de aprendizaje 3

1. $A = (x)(2x)$
2. $A = l^3$
3. $$A = \frac{(x)\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$
4. $V = \pi \cdot r^2 \cdot 3r$
5. $x(A-2x)(B-2x) = 240\ m^3$

Actividad de aprendizaje 4

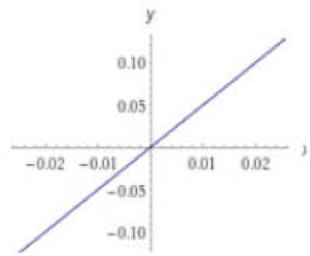
Función | **Tabla** | **Pares ordenados** | **Gráfica**

a)

$y = 5x$

x	y
1	5
2	10
3	15
4	20

$G = \{(1,5),(2,10),(3,15),(4,20)\}$

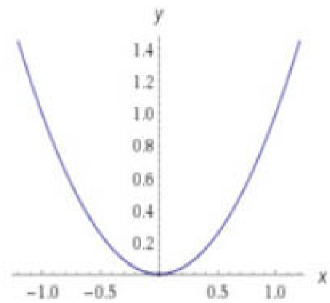


b)

$y = x^2$

x	y
1	1
−1	1
2	4
−2	4

$G = \{(1,1),(-1,1),(2,4),(-2,4)\}$

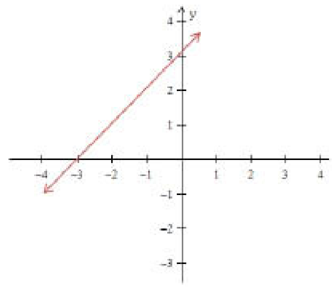


c)

$y = x + 3$

x	y
−3	0
0	3

$G = \{(-3,0),(0,3)\}$

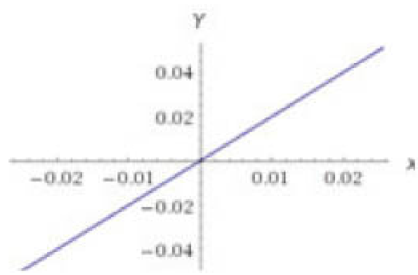


d)

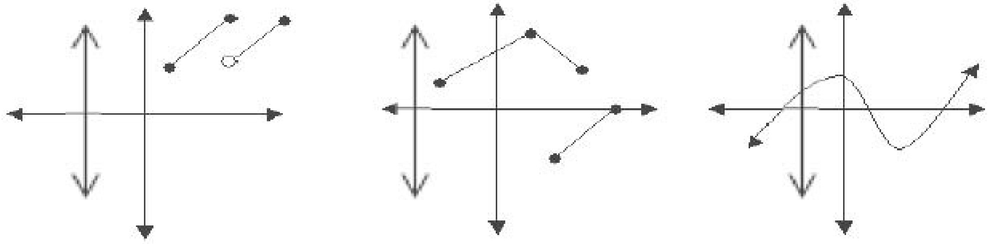
$f(x) = 2x$

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3

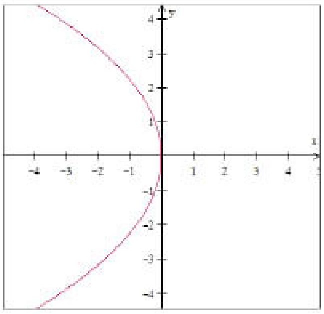
$G = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$



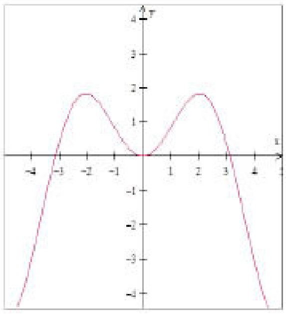
e)



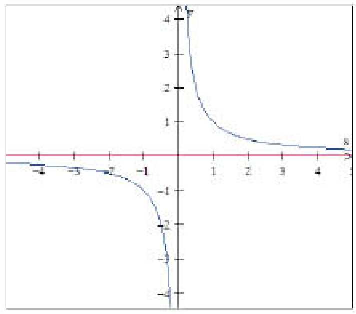
f)



Relación



Función



Función

g)

- $f(x) = x^2 + 3x + 3$

$$f(2) = (2)^2 + 3(2) + 3 = 13$$

$$f(a-b) = (a-b)^2 + 3(a-b) + 3$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{x}\right) + 3$$

$$f(-4) = (-4)^2 + 3(-4) + 3 = 7$$

$$f\left(\sqrt{t}\right) = \left(\sqrt{t}\right)^2 + 3\sqrt{t} + 3$$

- $f(x) = \sqrt{x-3}$

$$f(x) = \sqrt{2-3} = \sqrt{-1}$$

$$f(x) = \sqrt{a-b-3}$$

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{t}-3}$$

$$f(x) = \sqrt{-4-3} = \sqrt{-7}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}-3}$$

- $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

$$f(x) = \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

$$f(x) = \frac{a-b-1}{a-b+3}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+3}$$

$$f(x) = \frac{-4-1}{-4+3} = \frac{-5}{-1} = +5$$

$$f\left(\sqrt{t}\right) = \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+3}$$

Actividad de aprendizaje 5

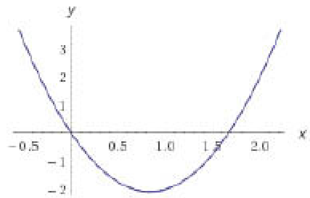
1. $f(x) = 3x^2 - 5x$

Dominio:

$\mathbb{R}$

Rango:

$\left\{ y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{25}{12} \right\}$



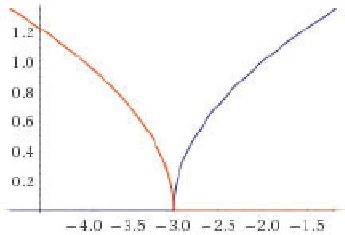
2. $f(x) = \sqrt{x+3}$

Dominio:

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\}$

Rango:

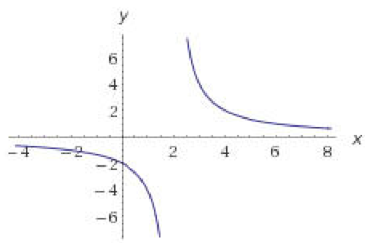
$\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$



3. $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

Dominio:

Rango:



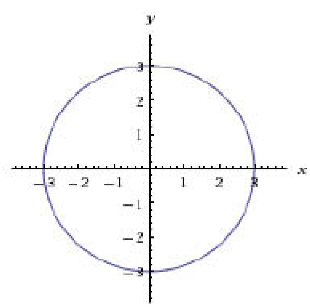
4. $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

Dominio:

$\{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3\}$

Rango:

$\{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 3\}$



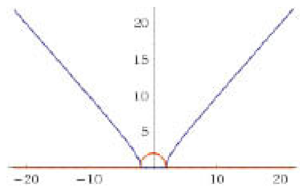
5. $f(x)=\sqrt{x \quad -4}$

Rango:

$\{x \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

Dominio:

$\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \ \text{ ó } \ x \geq 2\}$



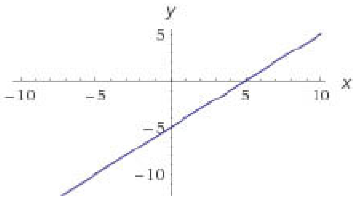
6. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$

Rango:

$\mathbb{R}$

Dominio:

$\mathbb{R}$



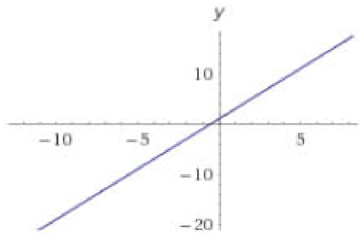
7. $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+3}{x+3}$

Rango:

$\{y \in \mathbb{R} : y \neq -5\}$

Dominio:

$\{y \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$



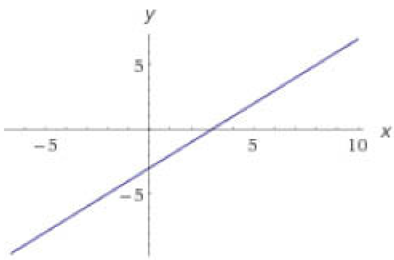
8. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

Rango:

$\{y \in \mathbb{R} : y \neq -2\}$

Dominio:

$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$



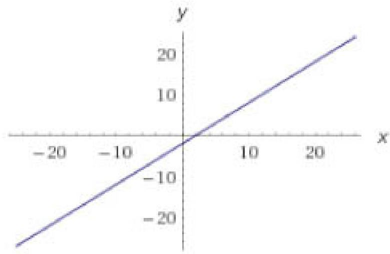
9. $f(x)=\dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^2-x-6}$

Rango:

$\{y \in \mathbb{R} : y \neq -4 \ \text{ y } \ y \neq 1\}$

Dominio:

$\{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \ \text{ y } \ x \neq 3\}$



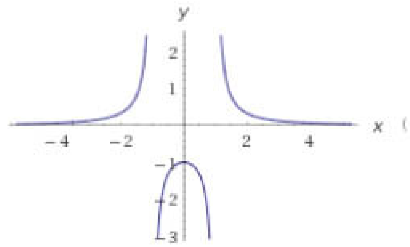
10. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Rango:

$\{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \ \text{ ó } \ y > 0\}$

Dominio:

$\{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \ \text{ y } \ x \neq 1\}$



Bloque II

Actividad de aprendizaje 1

I.

1. $p(x)=3x-7$

$$p(x)=y$$
$$y=3x-7 \text{ despejando } x=\frac{y+7}{3} \text{ sustituyendo a } y \text{ por } x$$
$$\text{se obtiene la funcion inversa } p^{-1}(x)=\frac{x+7}{3}$$

2. $m(x)=x^2-1$

$$m(x)=y$$
$$y=x^2-1 \text{ despejando } x=\ \pm\sqrt{y+1} \Rightarrow m^{-1}(x)=\pm\sqrt{x+1}$$

3. $y = x^3$

Despejando $x = \sqrt[3]{y}$ *sustituyendo a y por x, se obtiene la funcion inversa*
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

4. $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$

Despejando $x = 6y + 2$ *sustituyendo a y por x, se obtiene la funcion inversa*
$f^{-1}(x) = 6x + 2$

5. $y = 6x^2 + 1$

Despejando $x = \mp\sqrt{\frac{y-1}{6}}$ *sustituyendo a y por x, se obtiene la funcion inversa*

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{6}}$

6.

a) $p(x) = x + 1$; $g(x) = x - 1$ Inversa

$p(x) = y$
$g(x)$ es la función inversa de $p(x)$
comprobación :
Despejando x de $p(x)$, $x = y - 1$ sustituyendo a y por x, se obtiene la funcion inversa
$g(x) = x - 1$

b) $F(x) = 6x + 3$; $G(x) = \frac{x-3}{6}$ Inversa

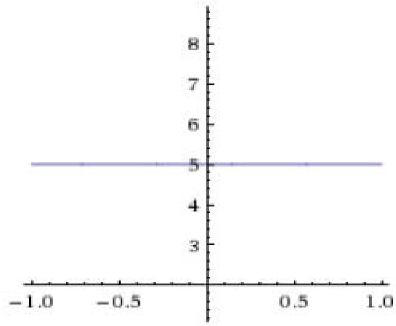
$F(x) = y$
$G(x)$ es la función inversa de $F(x)$
comprobación :

Despejando x de $F(x)$, $x = \frac{y-3}{6}$ sustituyendo a y por x, se obtiene la funcion inversa

$G(x) = \frac{x-3}{6}$

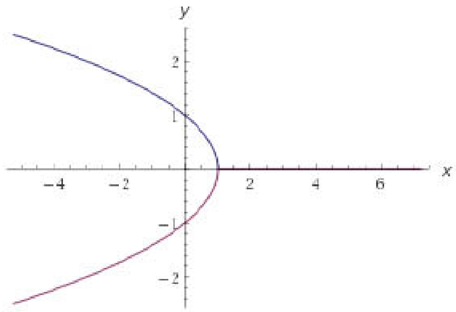
7.

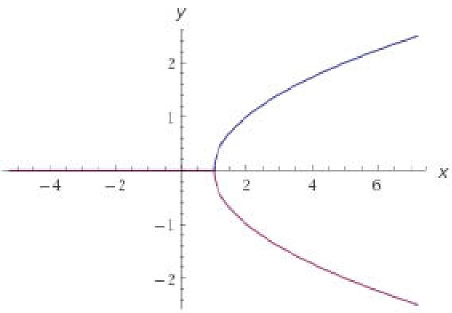
a) $f(x) = 5$



b) $x^2 + y = 1$

Despejando $x = \mp\sqrt{1-y}$ *sustituyendo a y por x, se obtiene la funcion inversa* $f^{-1}(x) = \mp\sqrt{1-x}$ *función para realizar la gráfica solicitada*

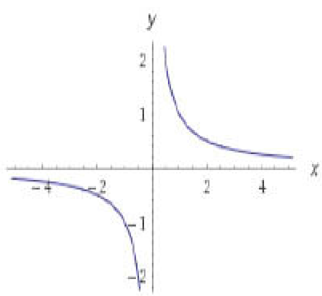




c) $y = \dfrac{1}{x}$

Despejando $x = \dfrac{1}{y}$ *sustituyendo a y por x, se obtiene la funcion inversa*

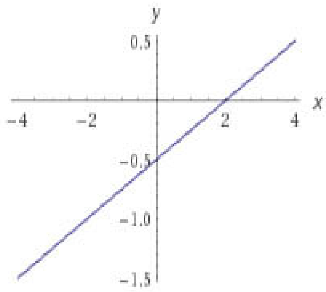
$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$ *función para realizar la gráfica solicitada*



d) $y - 4x = 2$

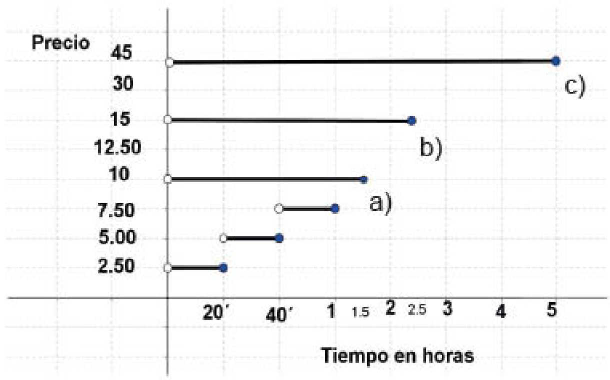
Despejando $x = \dfrac{y-2}{4}$ sustituyendo a y por x, se obtiene la funcion inversa

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{4}$ función para realizar la gráfica solicitada



Actividad de aprendizaje 2

1.



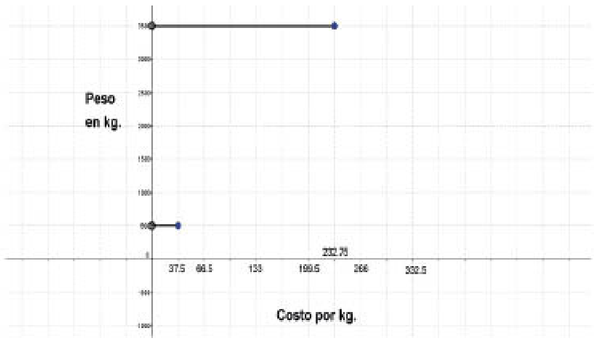
d)

e) *Los importes del envío de paquetes de diferentes pesos en una oficina de correos son.*

Peso (g)	*Importe ($)*
$0 < p \leq 100$	12.50
$100 < p \leq 200$	19.00
$200 < p \leq 300$	25.25
$300 < p \leq 400$	31.50
$400 < p \leq 500$	37.50
$500 < p \leq 600$	43.50
$600 < p \leq 700$	49.35
$700 < p \leq 800$	55.20
$800 < p \leq 900$	61.00
$900 < p \leq 1000$	66.50

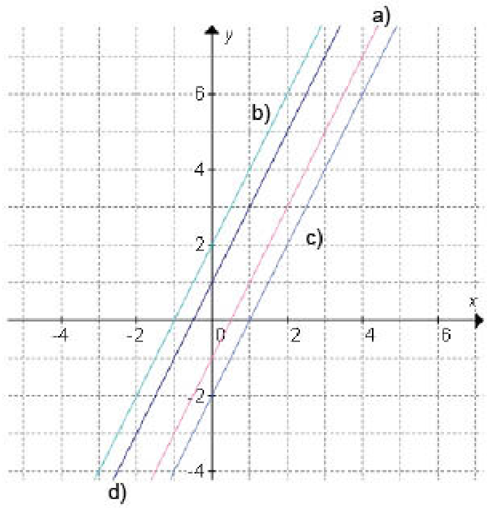
2.

a)



Actividad de aprendizaje 3

1.



a) $y = f(x - c)$
$y = 2(x - 1)$

b) $y = f(x + c)$
$y = 2(x + 1)$

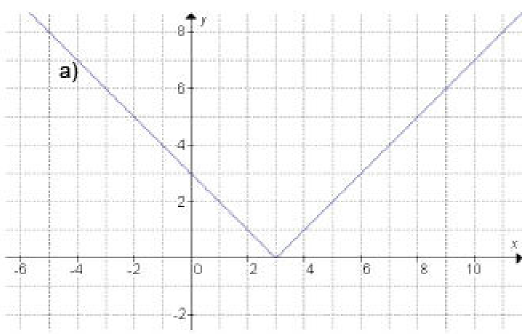
c) $y = f(x) - c$
$y = 2x - 1$

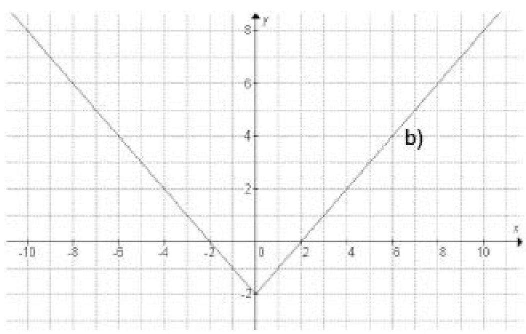
d) $y = f(x) + c$
$y = 2x + 1$

2.

a) $y = |x - 3|$

b) $y = |x| - 2$

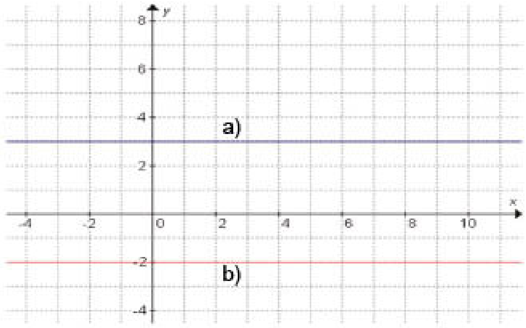




3.

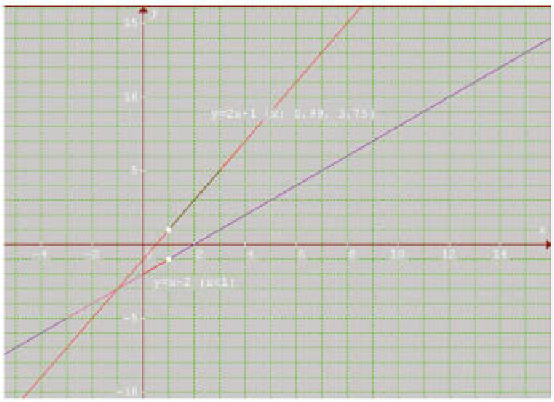
a) $y = 3$

b) $y = -2$

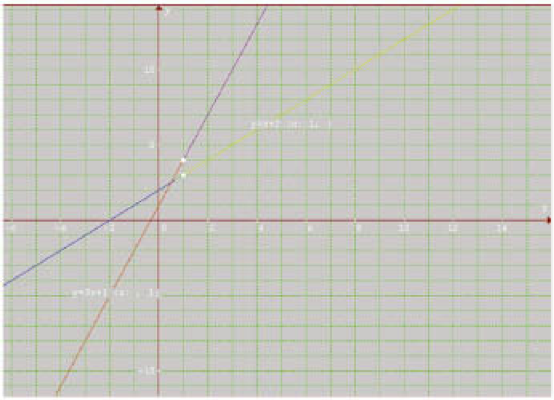


4.

a) $f(x) = \begin{cases} x-2 & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & si \quad x<1 \\ x+2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

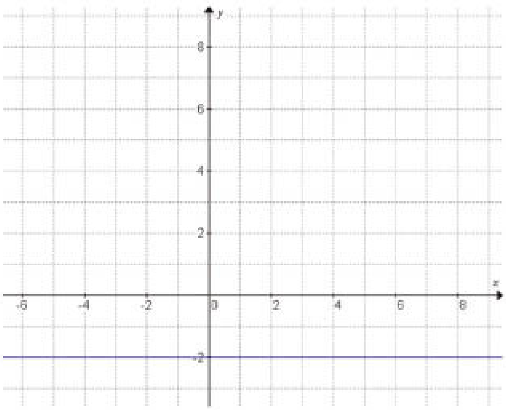


Autoevaluación

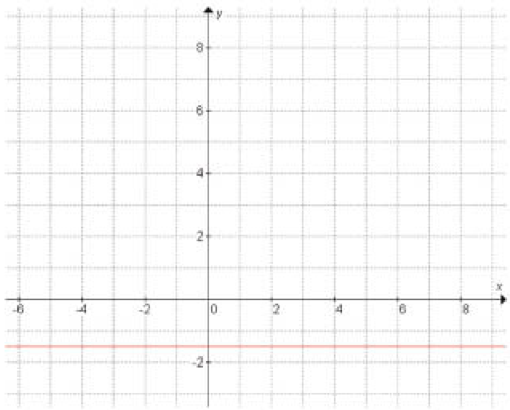
1. *Algebraica*
2. *Logarítmica*
3. *Trigonométrica*
4. *Exponencial*
5. *Racional*
6. *Radical*
7. *Logarítmica*
8. *Algebraica*
9. *Trigonométrica*
10. *Exponencial*
11. *Trigonométrica*
12. *Algebraica*
13. *Valor absoluto*
14. *Idéntica*
15. *Intervalos*
16. *Intervalos*

Bloque III

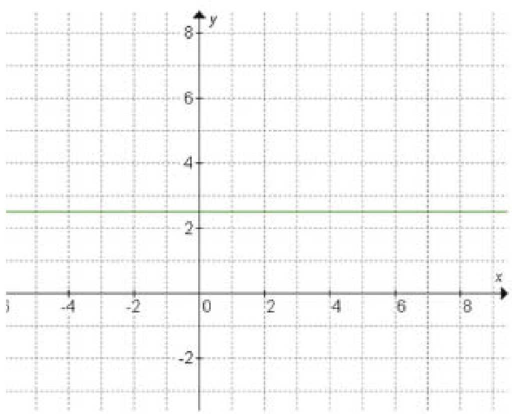
Actividad de aprendizaje 1



f(x) = −2



f(x) = −1.5

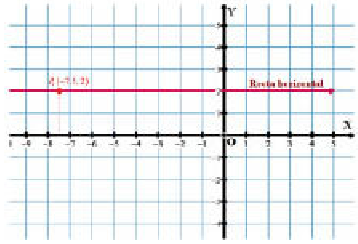


f(x) = 2.5

Actividad de aprendizaje 2

1. *Las rectas horizontales tienen ecuaciones de la forma:*

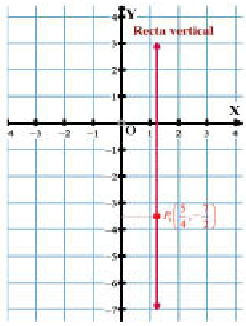
$$y - y_p = 0$$



Por lo tanto la ecuación buscada es $y - 2 = 0$.

2. Las rectas verticales tienen ecuaciones de la forma:

$$x - x_p = 0$$

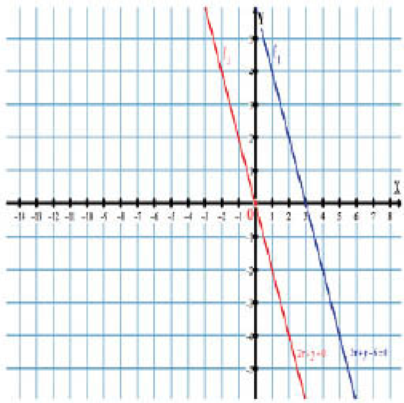


Por lo tanto la ecuación buscada es:

$$x - \frac{5}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 5 = 0$$

3. *Se busca la recta* ℓ_2, *que pase por O(0, 0), tal que* $\ell_1 \parallel \ell_2$, *donde:*

$$\ell_1 : \; 2x + y - 6 = 0$$



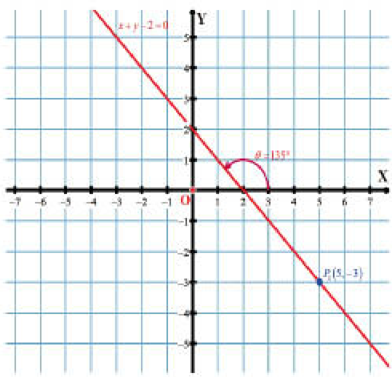
Las rectas paralelas tienen pendientes iguales, entonces:

$$m_2 = m_1 = -\frac{2}{1} = -2$$

Usando la forma punto-pendiente:

$$\ell_2 : \; y - 0 = -2(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -2x \quad \Rightarrow \quad 2x + y = 0$$

4. *Los ángulos de inclinación deben expresarse en el rango* $0° \le \theta < 180°$ *; es decir como ángulos en CI y CII.*



El ángulo de 315° es un ángulo de CIV que es coterminal de -45°, que es opuesto por el vértice del ángulo de CII: $180° - 45° = 135°$, *de modo que, en realidad,* $\theta = 135°$

$$m = \tan(135°) = -1$$

$$y + 3 = -1(x - 5) \quad \Rightarrow \quad y + 3 = -x + 5 \quad \Rightarrow \quad x + y - 2 = 0$$

5. *Se obtiene el punto medio del segmento que une los puntos dados:*

$$x_m = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y_m = \frac{-6+10}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$M(1, 2)$$

Se calcula la pendiente del segmento dado:

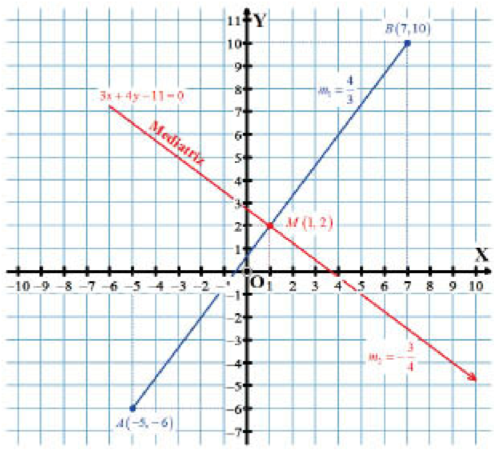
$$m_1 = \frac{10+6}{7+5} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

La pendiente de la mediatriz, m_2*, es recíproca e inversa de* m_1*:*

$$m_2 = -\frac{3}{4}$$

Para obtener su ecuación, usamos la forma punto pendiente:

La gráfica siguiente muestra los resultados:



6. *Pasamos la forma general a la forma pendiente-ordenada al origen, despejando la variable* y *:*

$$5x - 15 = 3y \;\Rightarrow\; y = \frac{5}{3}x - 5$$

De aquí:

$$m = \frac{5}{3} \text{ y } b = -5$$

7.

La función, es $y = f(x) = kx$, la cual, como hemos estudiado, despejando:

$$k = \frac{y}{x} = \frac{300}{6} = 50 \text{ pesos/libro}$$

El modelo de variación es: $f(x) = 50x$, donde x es la cantidad de libros que se compran. Para saber el costo de 25 libros:

$$f(25) = 50(25) = 1250 \text{ pesos}$$

8.

$$k = \frac{y}{x} = \frac{115}{80} = \frac{23}{16} \text{ km/min}$$

$$f(x) = \frac{23}{16}x \text{ donde } x \text{ es el tiempo recorrido en minutos}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ hora} = 30 \text{ minutos por lo que}$$

$$f(30) = \frac{23}{16}(30) = 43.125 \text{ km}$$

9.

La función, es: $y = f(x) = kx$ *la cual, como hemos estudiado, despejando:*

$$k = \frac{y}{x} = \frac{1500}{5} = 300 \text{ pesos/conejo}$$

El modelo de variación es: $f(x) = 300x$, *donde x es la cantidad de conejos que se compran. Para saber el costo de 15 conejos:*

$$f(25) = 300(15) = 4500 \text{ pesos}$$

10.

$$k = \frac{y}{x} = \frac{75}{15} = 5 \text{ km/litro}$$

$f(x) = 5x$, donde x es el número de litros por lo que

$$f(30) = 5(30) = 150 \text{ km}$$

Actividad de aprendizaje 3

2.

$$f(x)=\frac{x^2-6x+9}{4}=\frac{(x-3)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2=4(y-0)$$

Se trata de una parábola de eje vertical, con vértice en V(3,0). Abre hacia arriba.

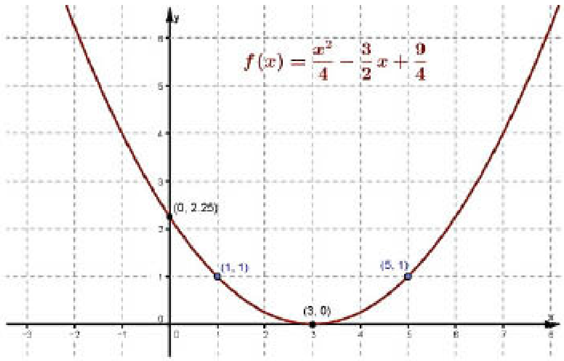
Dado que el término independiente de la forma funcional es $\frac{9}{4}$*, la parábola corta al eje Y en el punto*

$$\left(0,\frac{9}{4}\right)$$

La distancia focal es de p = 1, por lo que los extremos del lado recto son:

$$(x-3)^2=4(1-0) \quad \Rightarrow \quad x=3\pm 2 \text{ es decir, (1, 1) y (5, 1)}$$

La gráfica es:



3. El modelo matemático buscado es de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ por lo que:

$$-6=a(-2)^2+b(-2)+c \quad \Rightarrow \quad 4a-2b+c=-6$$

$$-12=a(1)^2+b(1)+c \quad \Rightarrow \quad a+b+c=-12$$

$$-4=a(0)^2+b(0)+c \quad \Rightarrow \quad c=-4$$

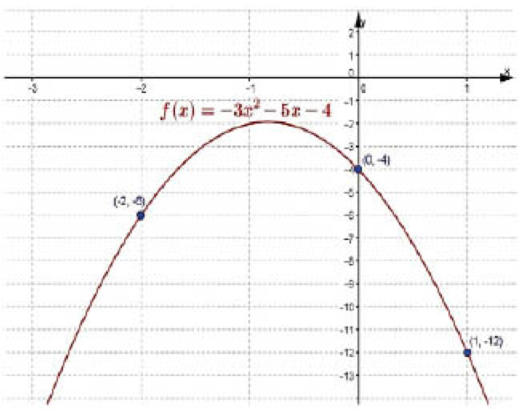
Así, se obtiene el sistema:

$$\begin{matrix} 2a-b=-1 \\ a+b=-8 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a=-3 \\ b=-5 \end{matrix}$$

De donde el modelo matemático es:

$$f(x)=-3x^2-5x-4$$

La gráfica es:



4. *La altura máxima ocurre en el vértice de la parábola.*

$$10y = -\left(49t^2 - 600t\right)$$

$$10y = -49\left(t^2 + \frac{600}{49}t\right)$$

$$-\frac{10}{49}y = t^2 + \frac{600}{49}t + \frac{90000}{2401} - \frac{90000}{2401}$$

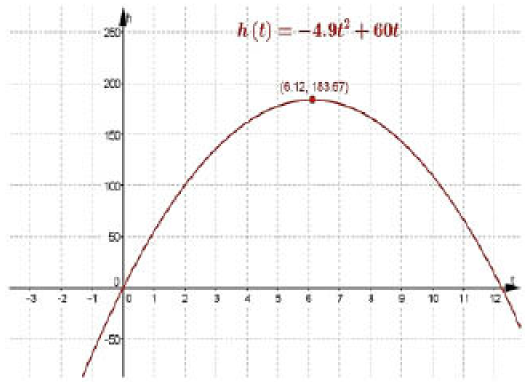
$$-\frac{10}{49}y + \frac{90000}{2401} = \left(t + \frac{300}{49}\right)^2$$

$$\left(t + \frac{300}{49}\right)^2 = -\frac{10}{49}\left(y - \frac{9000}{49}\right)$$

Vértice:

$$\left(\frac{300}{49}, \frac{9000}{49}\right) \approx (6.122, 183.67)$$

En 6 segundos, la piedra alcanza su altura máxima de 183.7 m



5.

$$\underbrace{y}_{\text{Utilidad}} = \underbrace{347x}_{\text{Ingresos por ventas}} - \underbrace{\left(3x^2 - 535x + 1030\right)}_{\text{Costos de producción}}$$

$$y = 347x - 3x^2 + 535x - 1030$$

La función de utilidad es:

$$y = -3x \;\; + 882x - 1030$$

$$y = -3\left(x^2 - 294x + \frac{1030}{3}\right)$$

$$y = -3\left(x^2 - 294x + 21609 + \frac{1030}{3} - 21609\right)$$

$$y = -3\left((x-147)^2 - \frac{63797}{3}\right)$$

$$-\frac{1}{3}y = (x-147)^2 - \frac{63797}{3}$$

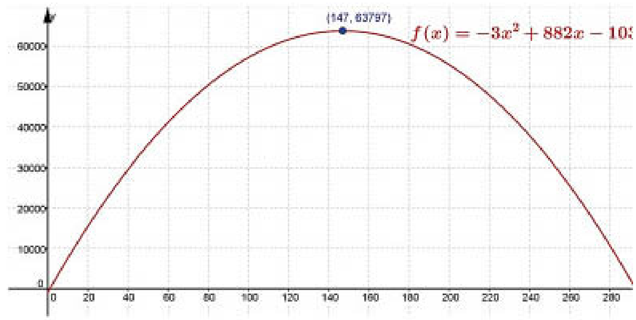
$$-\frac{1}{3}y = (x-147)^2 - \frac{63797}{3}$$

$$(x-147)^2 = -\frac{1}{3}y + \frac{63797}{3}$$

$$(x-147) \;\; = --(y - 63797)$$

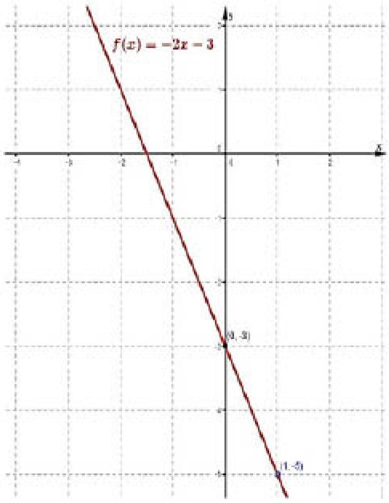
Vértice: $(147, 63797)$

Con 147 unidades se obtiene la utilidad máxima de \$63797 pesos.



Autoevaluación

1. *Se trata de una línea recta con pendiente m = −2 (recta decreciente) y ordenada al origen b = −3; es decir, corta al eje Y en el punto (0,-3). Otro punto de la recta es (0 + 1, −3−2) = (1, −5). La gráfica es:*



2.

Al momento de la compra (x = 0), la casa costaba b pesos: A(0, b).

Cuando han pasado 5 años (x = 5), la casa cuesta 70000 pesos: B(5, 700000).

Cuando hayan pasado 8 años (x = 8), la casa costará 1000000 de pesos: C(8, 1000000).

La pendiente es:

$$m = \frac{1000000 - 700000}{8 - 5} = \frac{300000}{3} = 100000$$

De modo que:

$$100000 = \frac{700000 - b}{5 - 0} \quad \Rightarrow \quad 500000 = 700000 - b \quad \Rightarrow \quad b = 700000 - 500000$$

$$b = 200000$$

El modelo de variación del precio de la casa en el tiempo es:

$$y = 100000x + 200000$$

Hace 5 años la casa costó 200 mil pesos.

3.

$$m=\frac{24-9}{7-2}=\frac{15}{5}=3$$

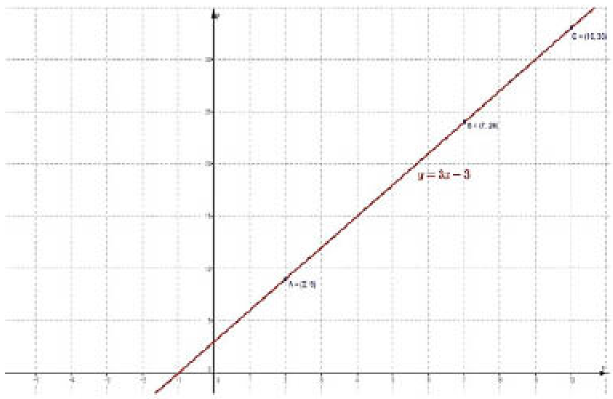
$$y-9=3(x-2)$$

El modelo matemático de la recta es:

$$y=3x+3$$

La altura del punto para el que x = 10 es:

$$y=3(10)+3=30+3=33$$



4.

A(10, 98); B(16, 157)

$$m=\frac{157-98}{16-10}=\frac{59}{6}$$

$$y-98=\frac{59}{6}(x-10)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{59}{6}x-\frac{1}{3}$$

Cuando x = 200

$$y=\frac{59}{6}(200)-\frac{1}{3}=\frac{5900}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5899}{3}\approx 1966.33$$

A una profundidad de 200 m, la presión soportada por el submarino será de 1966.33 Pa

5.

A(5, 45), B(9, 80).

$$m=\frac{80-45}{9-5}=\frac{35}{4}$$

$$y-45=\frac{35}{4}(x-5)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{35}{4}x+\frac{5}{4}$$

$$y=\frac{35}{4}(20)+\frac{5}{4}=\frac{705}{4}\approx 176.25$$

La distancia recorrida con 20 litros de gasolina es de 176.25 km

6.

$$f(x)=\frac{x^2-6x+9}{4}=\frac{(x-3)^2}{4}\quad\Rightarrow\quad (x-3)^2=4(y-0)$$

Se trata de una parábola de eje vertical, con vértice en V(3,0). Abre hacia arriba.

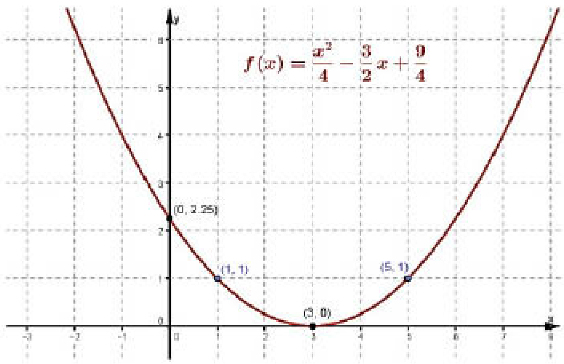
Dado que el término independiente de la forma funcional es $\frac{9}{4}$*, la parábola corta al eje Y en el punto*

$$\left(0,\frac{9}{4}\right)$$

La distancia focal es de p = 1, por lo que los extremos del lado recto son:

$$(x-3)^2 = 4(1-0) \quad \Rightarrow \quad x = 3 \pm 2 \text{ es decir, (1, 1) y (5, 1)}$$

La gráfica es:



3. Modelo matemático buscado es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ por lo que:

$$-6 = a(-2)^2 + b(-2) + c \quad \Rightarrow \quad 4a - 2b + c = -6$$

$$-12 = a(1)^2 + b(1) + c \quad \Rightarrow \quad a + b + c = -12$$

$$-4 = a(0)^2 + b(0) + c \quad \Rightarrow \quad c = -4$$

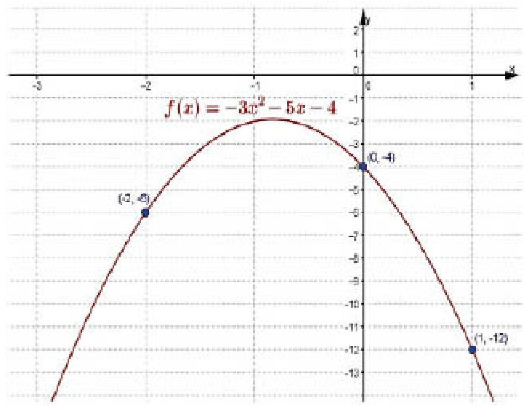
Así, se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{r} 2a - b = -1 \\ a + b = -8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} a = -3 \\ b = -5 \end{array}$$

De donde el modelo matemático es:

$$f(x) = -3x^2 - 5x - 4$$

La gráfica es:

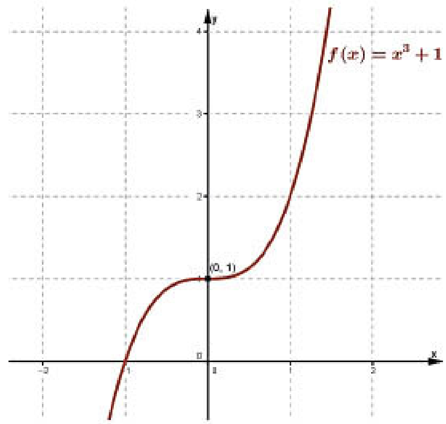


Bloque IV

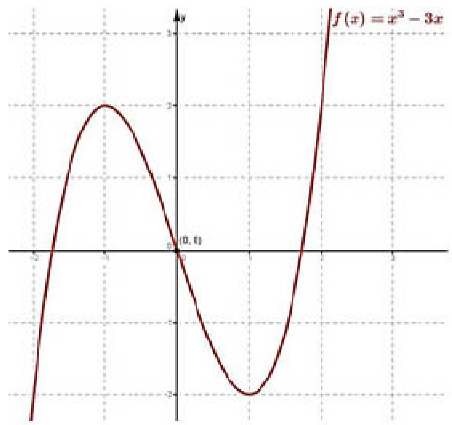
Actividad de aprendizaje 1

1.

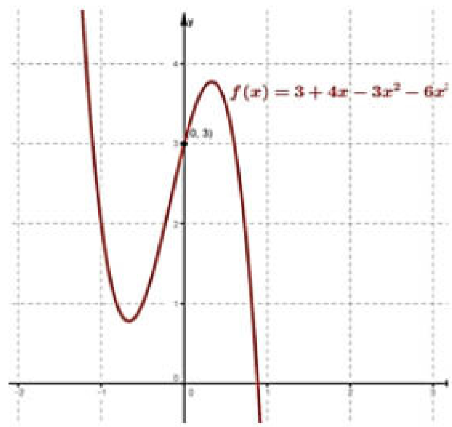
a) *Se trata de una función polinomial impar, con coeficiente principal positivo (a_3 = 1), por tanto, la gráfica se extiende desde la parte de abajo del eje x hasta la parte de encima de éste. Dado que el término independiente es 1, la gráfica corta al eje Y en el punto (0, 1). Su gráfica es:*



b) *Se trata de una función polinomial impar, con coeficiente principal positivo (a_3 = 1), por tanto, la gráfica se extiende desde la parte de abajo del eje x hasta la parte de encima de éste. Dado que el término independiente es 0, la gráfica pasa por el origen (0, 0). Su gráfica es:*



c) *Se trata de una función polinomial impar, con coeficiente principal negativo (a_3 = -6), por tanto, la gráfica se extiende desde la parte de arriba del eje x hasta la parte de abajo de éste. Dado que el término independiente es 3, la gráfica corta al eje Y en el punto (0, 3).*



2.

a) *Debajo*
b) *Debajo*
c) *1*

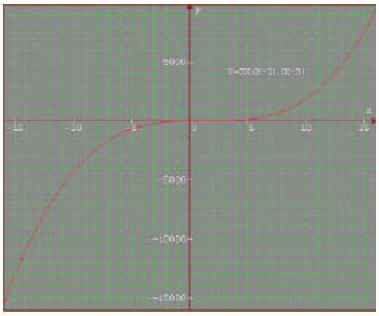
3.

a) *Arriba*
b) *Arriba*
c) 3/2

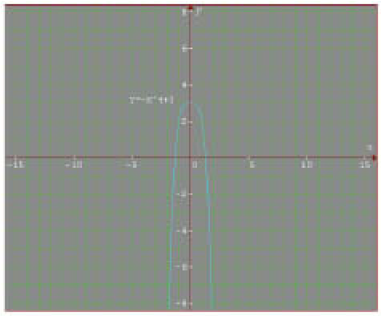
Actividad de aprendizaje 2

I.

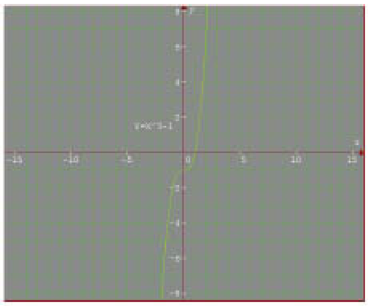
a)



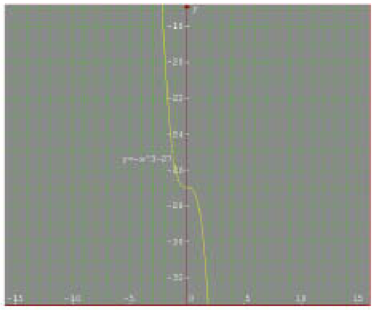
b)



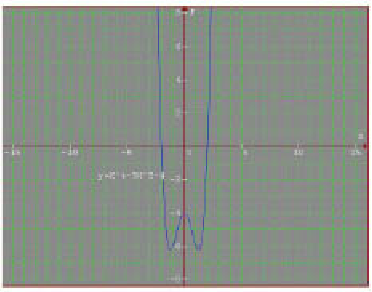
c)



d)

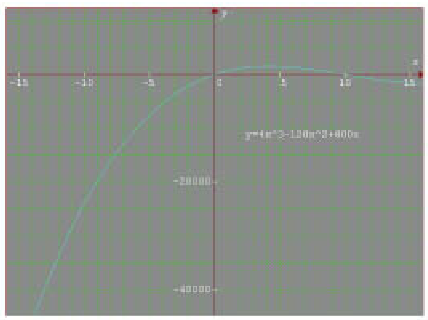


e)



II.

1. Es cúbica $y = x(40-2x)(20-2x)$
2. Todos los números reales
3. Sí
4. La gráfica es:



Actividad de aprendizaje 3

1.

Polinomio	Grado	Término principal	Coeficiente principal	Coeficiente constante
$f(x) = x^6 - x$	6	$1x^6$	1	0
$f(x) = 2x^3 + 3x + 2$	3	$2x^3$	2	2
$g(x) = 3x^4 + x - 1$	4	$3x^4$	3	2
$h(x) = x^3$	3	x^3	1	0

2.

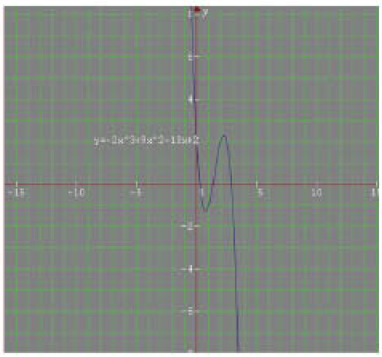
Polinomio	Grado	Término principal	Coeficiente principal	Coeficiente constante
$y = 3x^4 + 6$	4	$3x^4$	3	6
$y = -5x^3 - 8$	3	$-5x^3$	−5	−8
$y = x^3 + 2$	3	x^3	1	2
$y = 2x^4$	4	$2x^4$	2	0

Autoevaluación

1. *La ecuación despejada es:*

$$y = -2x^3 + 9x^2 - 10x + 2$$

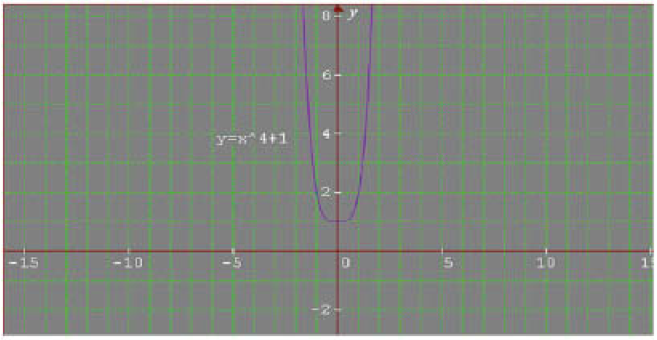
La gráfica es:



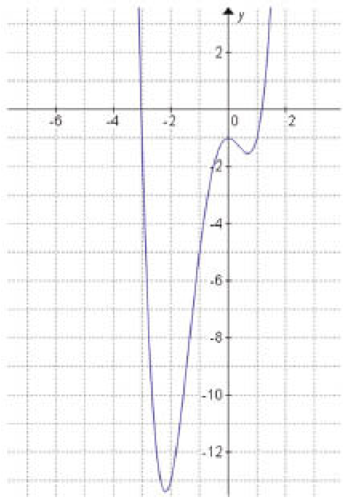
2. *Una es igual a cero y dos son complejas.*

3. *El polinomio que corresponde es:* $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

4. *La gráfica que le corresponde a la función polinomial* $f(x)=x^4+1$ *es:*



5. *Grafica la función* $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-1$



Bloque V

Actividad de aprendizaje 1

Soluciones de las divisiones sintéticas:

1. $6x^2-5x+3+\dfrac{4x^4-8x^2+104x-16}{3x^5+2x^4+4x-8}$

2. $6m^2-m+1+\dfrac{6m}{5m^3+4m^2-2m+1}$

3. $2a-b$

4. $x-2$

5. $3p^3-2p^2+p-7$

Actividad de aprendizaje 2

I.

1. *Evaluación del teorema del residuo:* $p(-1)=4(-1)^2+12(-1)+5=-3$

División sintética:

4	12	5	
	−4	−8	−1
4	8	−3	1

Respuesta: $4x+8-\dfrac{3}{x+1}$

2. *Evaluación del teorema del residuo:* $p(1/2)=2(1/2)^2+9(1/2)+1=6$

División sintética:

2	9	1	
	1	5	1
2	10	6	2

Respuesta: $x+5+\dfrac{6}{x-1/2}$

3. *Evaluación del teorema del residuo:* $P(-7)=5(-7)^4+30(-7)^3-40(-7)^2+36(-7)+14=-483$

División sintética:

5	30	−40	36	14	
	−35	35	35		
				−497	−7
5	−5	−5	71	−483	1

Respuesta: $5x^3-5x^2-5x+71-\dfrac{483}{x+7}$

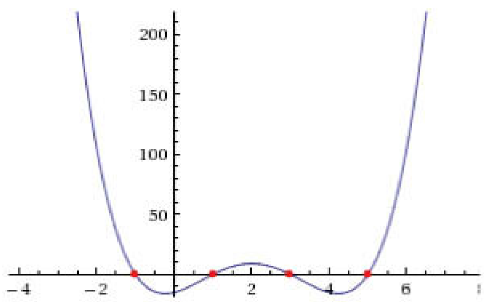
II.

4.

Planteamiento de la ecuación:

$$(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)=0$$
$$x^4-8x^3+14x^2+8x-15=0$$

Solución gráfica:

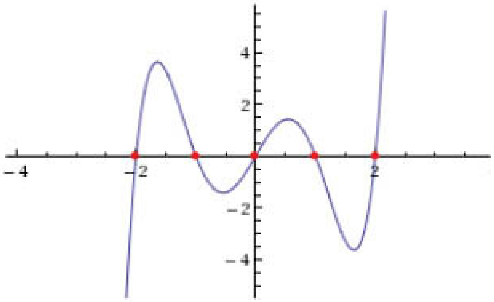


5.

Planteamiento de la ecuación:

$$(x+2)(x+1)(x)(x-1)(x-2)=0$$
$$x^5-5x^3+4x=0$$

Solución gráfica:



Actividad de aprendizaje 3

1.

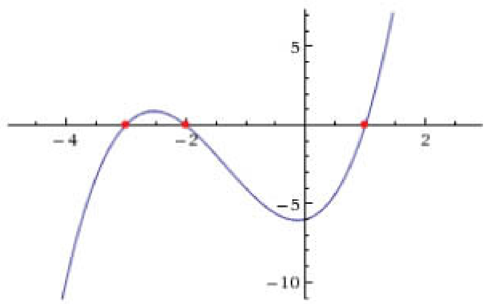
- *Se debe resolver la ecuación: $f(x) = 0$*
- *La cantidad de soluciones de una ecuación polinomial depende del grado, de modo que si éste es n, la ecuación $f(x) = 0$ tendrá n soluciones, cada una de las cuales puede ser real o compleja, y, como consecuencia, la gráfica de $f(x) = 0$ tendrá como máximo n intersecciones con el eje X.*
- *Son n intersecciones con el eje X en el caso de que todas las raíces de la ecuación sean reales.*

2.

a)

Factorización:
$(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

Los ceros son: $x = -3$; $x = -2$; $x = 1$

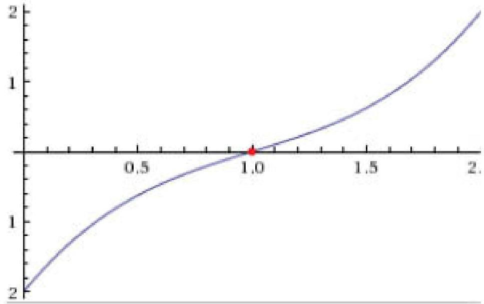


b)

Factorización
$$(x-1)\left(x^2-2x+2\right)=0$$

Solución compleja: $x = 1 - i$; $x = 1 + i$

Solución real: $x = 1$



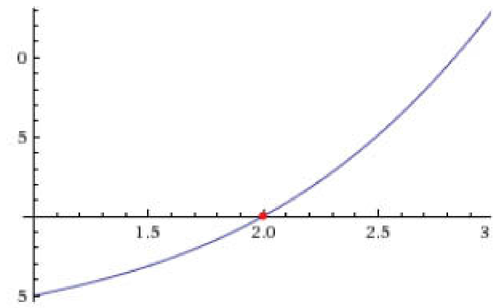
c)

Factorización
$(x-2)(x^2+4)=0$

Solución real:
$x = 2$

Solución compleja:

$x = -2i$
$x = 2i$



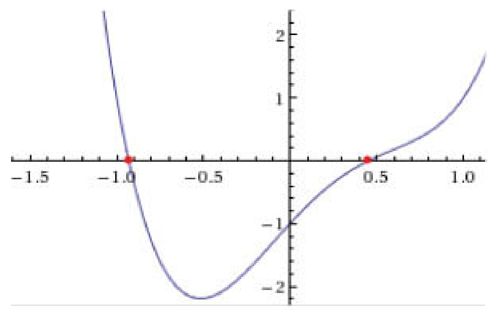
d)

Solución real

$x = -0.93$
$x = 0.46$

Solución compleja:

$x = 0.73 - 0.5i$
$x = 0.73 + 0.5i$

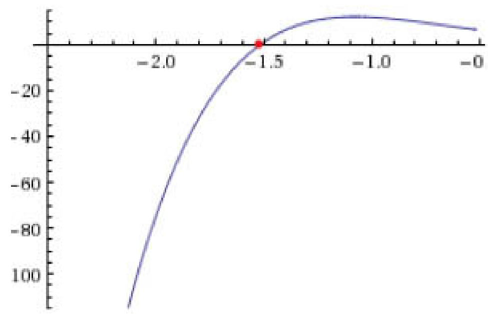


e)

Solución real
$x = -1.5$

Solución compleja:

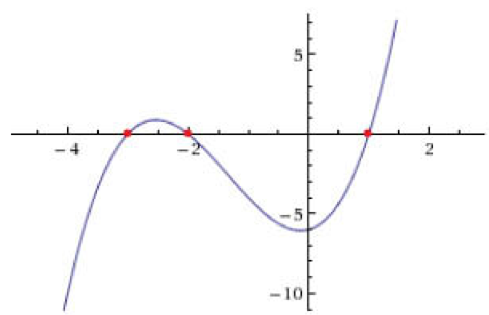
$x = 0.031 - 0.5i$
$x = 0.031 - 0.5i$
$x = 0.73 - 1.19i$
$x = 0.73 + 1.19i$



Actividad de aprendizaje 4

1.
Los ceros o raíces son
$x = -3$
$x = -2$
$x = +1$

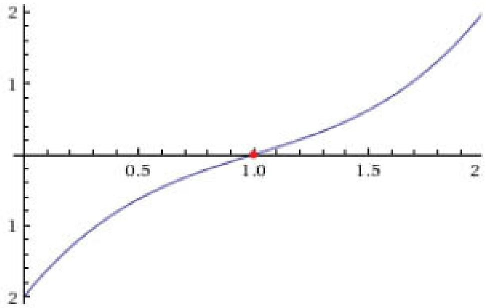
Tienen multiplicidad de 1.



2.
El cero real es
x = 1

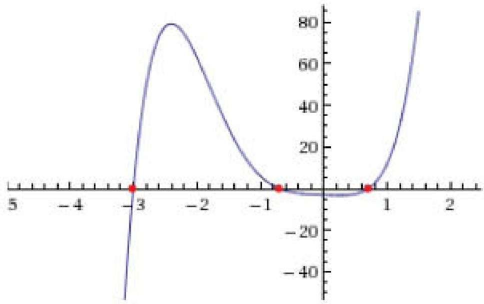
Tiene multiplicidad 1.

Los ceros complejos son:
x = 1 – i
x = 1 + i



3.
Factorización :
$$(x+3)\left(2x^2+1\right)\left(2x^2-1\right)=0$$

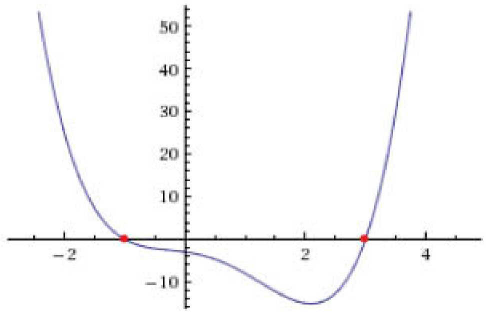
Soluciones reales:
$$x=-3\ ,x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



4.
Factorización :
$$(x-3)(x+1)\left(x^2+1\right)=0$$

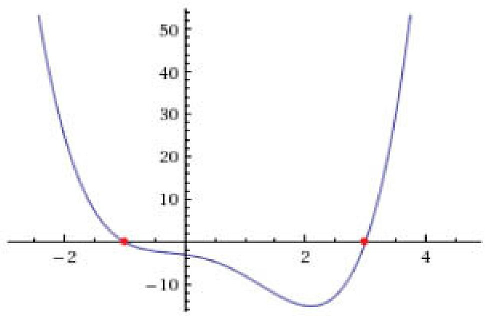
Soluciones reales:
x = −1; x = 3

Soluciones complejas :
x = −i; x = i



5.
Soluciones reales:
x = −0.93; x = 0.45

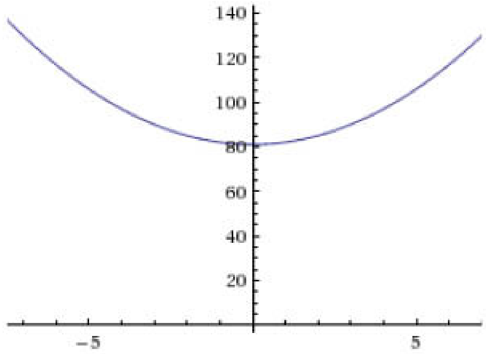
Soluciones complejas :
x = 0.74 – 0.5i
x = 0.74 – 0.5i



Actividad de aprendizaje 5

1.

Raíces complejas :
$x = -9i$
$x = 9i$

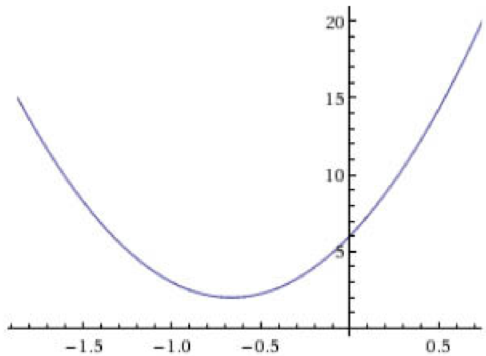


2.

Raíces complejas:

$$x = \frac{1}{3}\left(-2 + i\sqrt{2}\right)$$

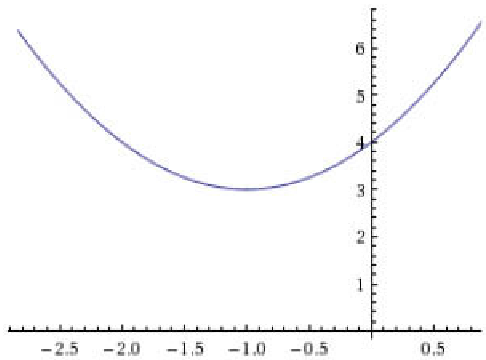
$$x = \frac{1}{3}\left(-2 + i\sqrt{2}\right)$$



3.

Raíces complejas:

$x = -1 - i\sqrt{3}$
$x = -1 + i\sqrt{3}$

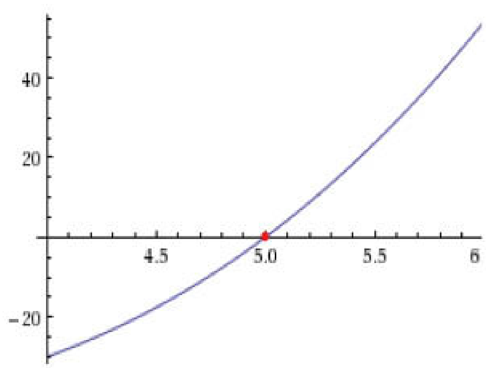


4.

Raíz real
$x = 5$

Solución compleja:

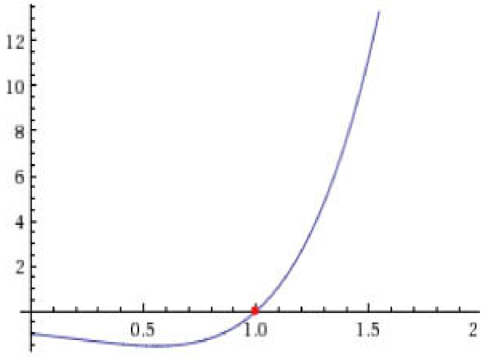
$x = -1 - i\sqrt{5}$
$x = -1 + i\sqrt{5}$



5.

Solución real:
$x = 1$

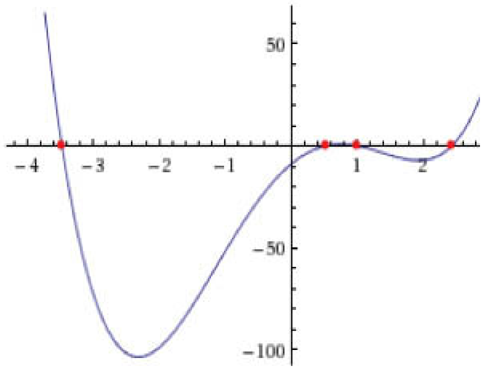
Solución compleja:
$x = -\sqrt[3]{-1}$
$x = (-1)^{\frac{2}{3}}$



Autoevaluación

1.

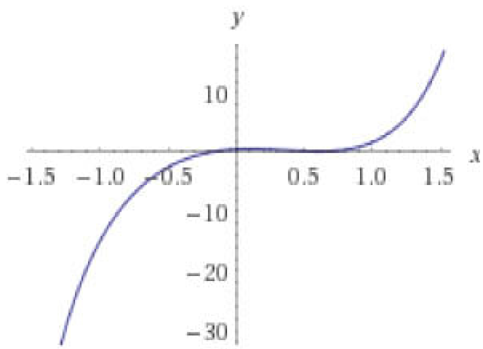
Solución real:
$x = 1$



2.

Cociente: $2x^3 - 3x^2 - 10x$

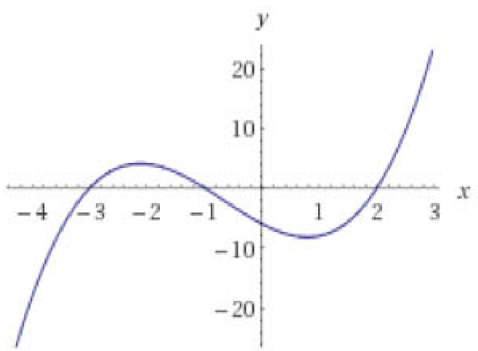
Residuo : $\dfrac{38x}{x+2}$



3.

Ceros:
$x = -3$
$x = -1$
$x = 2$

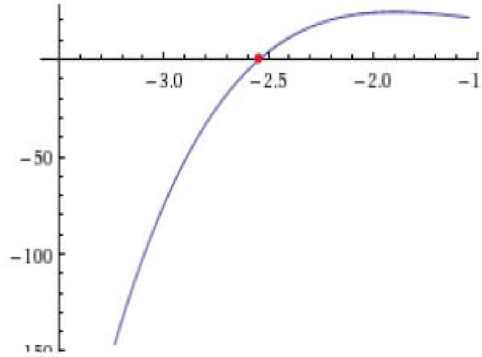
Dominio $\in \mathbb{R}$
Rango $\in \mathbb{R}$



4.

Raíz real
x=-2.54

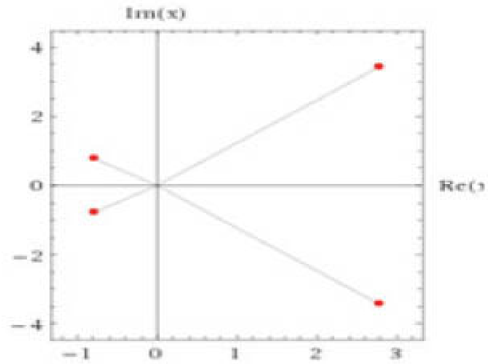
Raíces complejas:
$x = -0.75 - 0.85i$
$x = -0.75 + 0.85i$
$x = 2.02 - 1.78i$
$x = 2.02 + 1.78i$



5.

Todas las raíces son complejas:

$x = 2.78 - 3.4i$
$x = 2.78 + 3.43i$
$x = -0.78 - 0.77i$
$x = -0.78 + 0.77i$



Bloque VI

Actividad de aprendizaje 1

1.

a)

$$1-x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1\text{; } Dom: x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)\text{; asíntota vertical: } x = 1$$

$$y(1-x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + yx - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(3)(-y)}}{2(3)}$$

$$x = g(y) = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 12y}}{6} \quad y^2 + 12y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Rango: y \in (-\infty, -12] \cup [0, \infty)$$

Sin asíntotas horizontales.

$$x_1 = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 + 12(-12)}}{6} = 2 \qquad x_2 = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 + 12(0)}}{6} = 0$$

Mínimo: $(0, 0)$; Máximo: $(2, -12)$.

$$f(0) = \frac{3(0)^2}{1-0} = 0 \qquad g(0) = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 + 12(0)}}{6} = 0$$

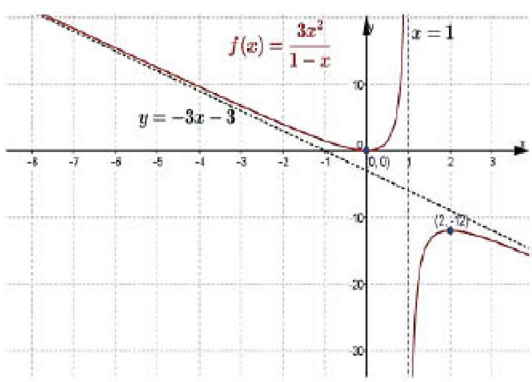
Intersecciones con los ejes: (0, 0). Dado que el grado del numerador es mayor que el denominador en una unidad, se tienen asíntotas oblicuas:

$$\begin{array}{r|l} & -3x-3 \\ \hline -x+1 & \cancel{3x^2} \\ & \underline{-\cancel{3x^2}+3x} \\ & \qquad \cancel{3x} \\ & \qquad \underline{-\cancel{3x}+3} \\ & \qquad\qquad 3 \end{array}$$

$$f(x) = -3x - 3 + \frac{3}{1-x}$$

asíntota oblicua: $y = -3x - 3$

Gráfica:



b)

$x^2-9\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq \pm 3$; $Dom: x\in(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$; *asíntotas verticales:* $x=-3$, $x=3$.

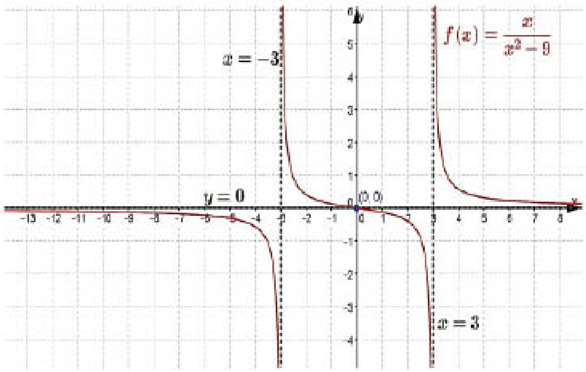
$$y\left(x^2-9\right)=x \quad \Rightarrow \quad yx^2-x-9y=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4y(-9y)}}{2y}$$

$$x=g(y)=\frac{1\pm\sqrt{1+36y^2}}{2y};\ 2y\neq 0 \quad \Rightarrow \quad y\neq 0$$ *; asíntota horizontal en* $y=0$ *(eje X)*

$$Rango: (-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

$$f(0)=\frac{0}{(0)^2-9}=0$$ *; intersecciones con los ejes (0, 0).*

Gráfica:



c)

$x^2-1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq \pm 1$; $Dom: x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$; *asíntotas verticales:* $x=-1$, $x=1$

$$y=\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad y(x+1)=x^2+x+1 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-yx+1-y=0$$

$$x^2+(1-y)x+(1-y)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-(1-y)\pm\sqrt{(1-y)^2-4(1)(1-y)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{y-1\pm\sqrt{1-2y+y^2-4+4y}}{2} \qquad x=g(y)=\frac{y-1\pm\sqrt{y^2+2y-3}}{2}$$

$y^2+2y-3\geq 0 \quad \Rightarrow \quad Rango: y\in(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$; *no hay asíntotas horizontales.*

$$g(-3)=\frac{-3-1\pm\sqrt{(-3)^2+2(-3)-3}}{2}=-2 \qquad g(1)=\frac{1-1\pm\sqrt{(1)^2+2(1)-3}}{2}=0$$

Máximo: (-2, -3); Mínimo: (0, 1);

$$f(0)=\frac{(0)^3-1}{(0)^2-1}=1,\ \ g(0)\ \textit{no existe;}$$

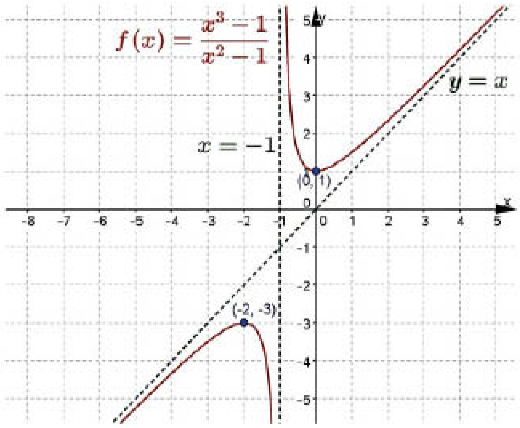
Intersecciones: (0, 1).

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ \hline x+1 & \cancel{x^2}+\cancel{x}+1 \\ & \underline{-\cancel{x^2}-\cancel{x}} \\ & \qquad\quad 1 \end{array}$$

$$f(x)=x+\frac{1}{x+1}$$

asíntota oblicua: $y=x$

Gráfica:



d)

$$4-x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x\neq\pm2\ ;\ \textit{asíntotas verticales:}\ x=-2\ \ y\ \ x=2$$

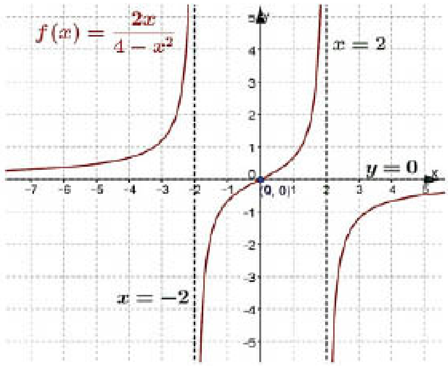
$$4y-yx^2=2x \quad\Rightarrow\quad yx^2+2x-4y=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4y(-4y)}}{2y}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4\left(1+4y^2\right)}}{2y}=\frac{-2\pm2\sqrt{1+4y^2}}{2y}$$

$$x=g(y)=\frac{-1\pm\sqrt{1+4y^2}}{y}\ ;\ \ y\neq0$$ *(asíntota horizontal en el eje X). No hay máximos, ni mínimos.*

$$f(0)=\frac{2(0)}{4-(0)^2}=0$$ *; intersecciones: (0, 0).*

Gráfica:



e)

$$x^2 - 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{3}\text{; } Dom: \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$$

$$\textit{asíntotas verticales: } x = -\sqrt{3} \text{ y } x = \sqrt{3}$$

Dada la alta dificultad para despejar la variable x, no es posible determinar rango, máximos, mínimos, ni asíntotas horizontales.

$$f(0) = -\frac{2(0)^3 - 5}{(0)^2 - 3} = \frac{5}{3} \qquad 0 = -\frac{2x^3 - 5}{x^2 - 3} \quad \Rightarrow \quad 2x^3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

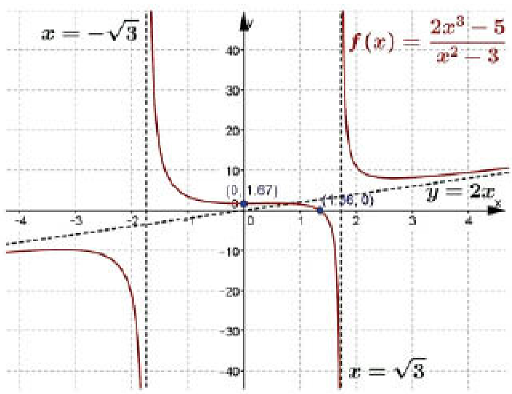
$$\textit{Intersecciones: } \left(0, \frac{5}{3}\right), \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, 0\right)$$

$$f(x) = 2x + \frac{6x - 5}{x^2 - 3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^2 - 3 & \cancel{2x^3} \quad -5 \\ & \underline{-\cancel{2x^3} + 6x} \\ & 6x - 5 \end{array}$$

$$\textit{asíntota oblicua: } y = 2x$$

Gráfica:



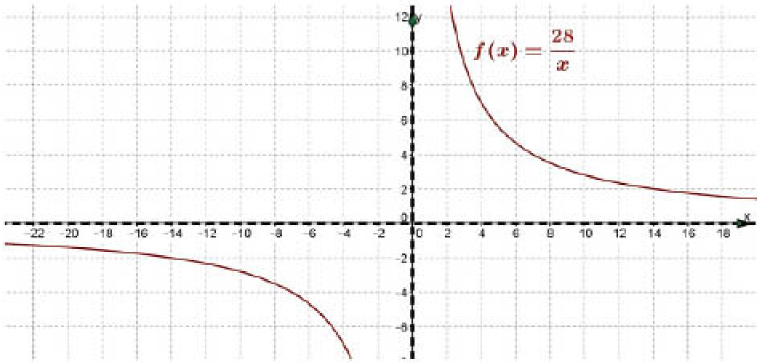
Actividad de aprendizaje 2

a) *Sean "y" los días necesarios para realizar la tarea y "x" la cantidad de obreros para realizarla, entonces:*

$$y=\frac{k}{x} \text{ por lo que } 7=\frac{k}{4} \quad \Rightarrow \quad k=28 \qquad \text{La función solicitada es: } f(x)=\frac{28}{x}$$

Asíntota en x = 0 (eje Y). Dado que al despejar x se obtiene $g(y)=\frac{28}{y}$

La gráfica tiene asíntota en y = 0 (eje X). No tiene intersecciones. Para valores negativos de x la función es negativa y para valores positivos es positiva. Gráfica:



$$f(15)=\frac{28}{15}\approx 1.87$$

15 obreros necesitarán 1.87 días cerca de 2 días, aproximadamente.

b)

$$110=IR \quad \Rightarrow \quad I(R)=\frac{110}{R}$$

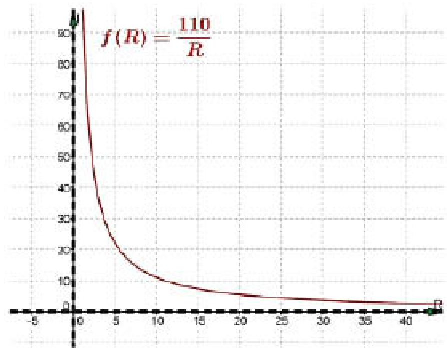
Asíntotas en los ejes coordenados. Sin intersecciones. La resistencia no puede ser negativa, por lo que el dominio es:

$$Dom: R\in(0,\infty)$$

La corriente siempre será positiva (pues R siempre es positiva):

$$Rango: (0,\infty)$$

Gráfica:



$$I(300)=\frac{110}{300}=\frac{11}{30}\approx 0.37$$

Para una resistencia de 300 ohm se tiene una corriente de 0.37 amperes.

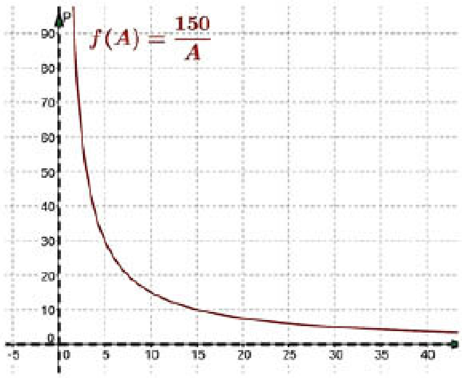
c)

$$\text{Función de variación: } P(A)=\frac{150}{A}$$

Asíntotas en los ejes coordenados. Sin intersecciones. El área no puede ser negativa, por lo que el dominio es $Dom: A\in(0,\infty)$

La presión siempre será positiva (pues A siempre es positiva): $Rango:(0,\infty)$.

Gráfica:



$$P(2\pi)=\frac{150}{2\pi}=\frac{75}{\pi}\approx 23.8732$$

150 N aplicados a una superficie de 2π m^2 *produce una presión de 23.87 Pa.*

Actividad de aprendizaje 3

La actividad corresponde a un producto de aprendizaje. Revisar instrucciones.

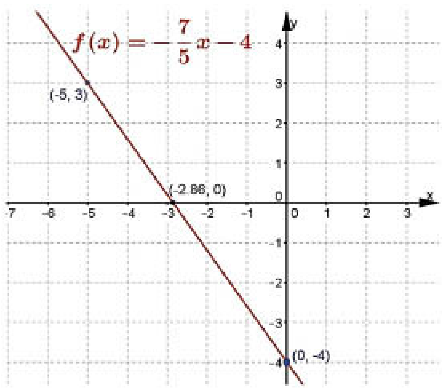
Autoevaluación

1.

$$m=\frac{-4-3}{0-(-5)}=-\frac{7}{5} \qquad b=-4$$

Modelo matemático: $f(x)=-\frac{7}{5}x-4$ *(recta decreciente)*

Gráfica:



2.

$$y=6\left(x^2-x-6\right)=6\left(x^2-x+\frac{1}{4}-6-\frac{1}{4}\right)=6\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right)$$

$$y=6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{75}{2}$$

$$y+\frac{75}{2}=6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\left(y+\frac{75}{2}\right)$$

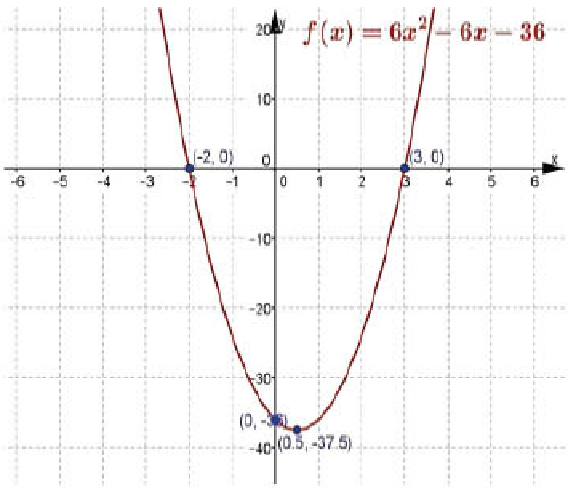
Parábola de eje vertical, abre hacia arriba. Vértice: $\left(\frac{1}{2},-\frac{75}{2}\right)$

$$6x^2-6x-36=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-x-6=0 \quad\Rightarrow\quad (x+2)(x-3)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-2,\ x_2=3$$

Intersecciones:

$$(-2,0)\ ,\ (3,0)\ y\ (0,-36)$$

Gráfica:

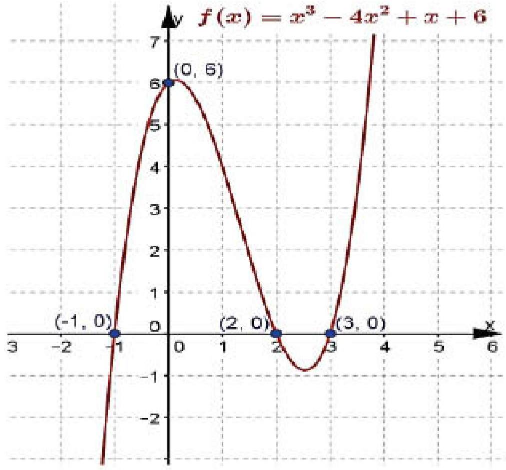


3.

Función polinomial cúbica, impar. Coeficiente principal positivo*:* $a_3=1$ *. Su gráfica se desplaza desde abajo del eje X hacia arriba de éste.*

Dado que el coeficiente independiente es 6, la gráfica corta al eje Y en (0, 6). Dominio y contradominio: Todos los reales.

La gráfica se muestra a continuación.



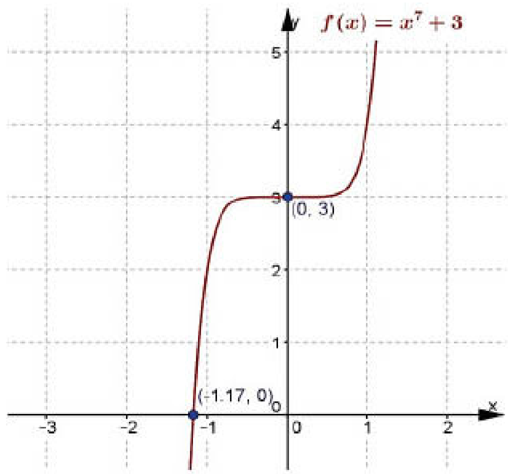
4.

Función polinomial impar de grado 7. Coeficiente principal positivo: $a_7 = 1$. *Su gráfica se desplaza desde abajo del eje X hacia arriba de éste.*

Dado que el coeficiente independiente es 3, la gráfica corta al eje Y en (0, 3). Dominio y contradominio: Todos los reales.

$x^7 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt[7]{3} \approx -1.17$ *de donde la única intersección con el eje X es* $\left(-\sqrt[7]{3}, 0\right)$.

Gráfica:



5.

Función racional.

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 2.$$

$$\textit{Asíntotas en } x = -2 \text{ y } x = 2.$$

$$\textit{Dominio: } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty).$$

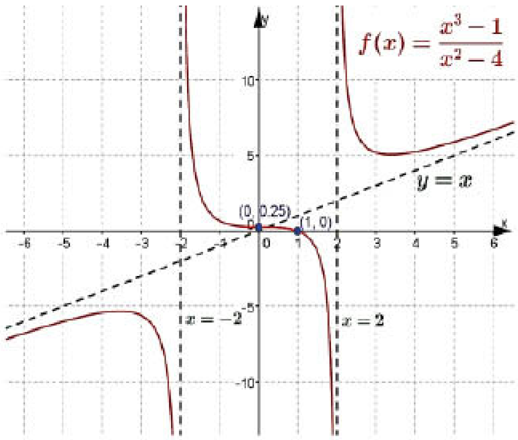
$$f(0)=\frac{(0)^3-1}{(0)^2-4}=\frac{1}{4};\ \textit{intersección con el eje X en}\ \left(0,\frac{1}{4}\right)$$

Dado que el grado del numerador es mayor en una unidad al grado del denominador:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2-4 & \cancel{x^3} \qquad -1 \\ & \underline{-\cancel{x^3}-4x} \\ & \qquad -4x-1 \end{array}$$

Asíntota oblicua: $y=x$

Gráfica:



6.

En el momento de la compra: $(0,b)$

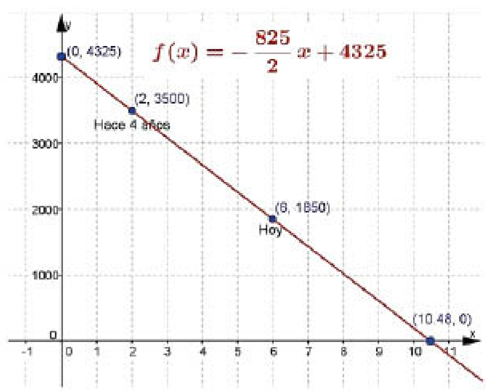
Ahora: $(6,1850)$

Hace 4 años: $(2,3500)$

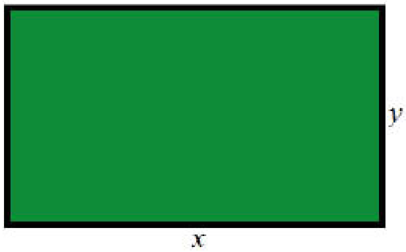
$$m=\frac{3500-1850}{2-6}=\frac{1650}{-4}=-\frac{825}{2};\ \frac{b-3500}{0-2}=-\frac{825}{2}\quad\Rightarrow\quad b-3500=825\quad\Rightarrow\quad b=4325$$

El modelo es: $y=-\frac{825}{2}x+4325$

Cuando era nueva, la computadora costó $4325 pesos. Observa la gráfica.



7.



$$2(x+y)=248$$
$$x+y=124$$
$$y=124-x$$
$$A=xy=x(124-x)=-x^2+124x=-\left(x^2-124x+3844-3844\right)=-\left((x-62)^2-3844\right)$$
$$A=-(x-62)^2+3844 \quad\Rightarrow\quad (x-62)^2=-A+3844 \quad\Rightarrow\quad (x-62)^2=-(A-3844)$$
$$(x-62)^2=-4\left(\frac{1}{4}\right)(A-3844)$$

Parábola de eje vertical que abre hacia abajo. El vértice (punto de mayor altura A) es V(62, 3844), de donde el área máxima de 3844 m² ocurre cuando x = y = 62 m; es decir cuando el terreno es de forma cuadrada.

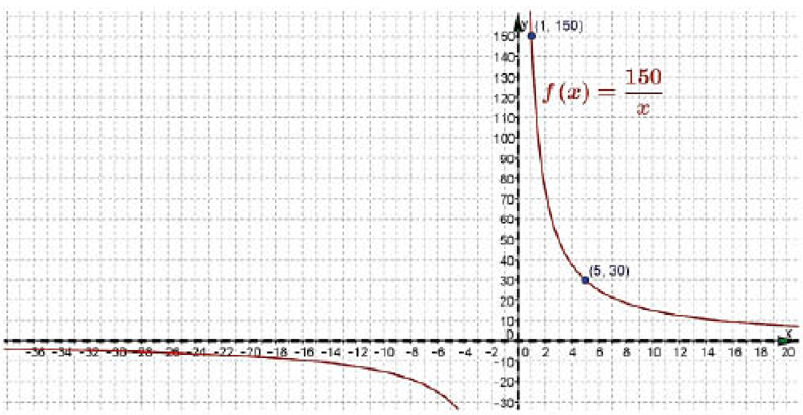
8. *Es una relación inversa dado que a mayor cantidad de alumnos se requiere menor tiempo para resolver el examen.*

$$y=\frac{k}{x} \qquad 30=\frac{k}{5} \quad\Rightarrow\quad k=150 \qquad \text{El modelo matemático es: } y=\frac{150}{x}$$

Asíntota en x = 0 (eje Y). Dado que al despejar x se obtiene $g(y)=\dfrac{150}{y}$

La gráfica tiene asíntota en y = 0 (eje X). No tiene intersecciones. Para valores negativos de x la función es negativa y para valores positivos es positiva. Un alumno resuelve el examen en150 minutos (2 horas y media) considerando el mismo desempeño en todos los alumnos.

Gráfica:

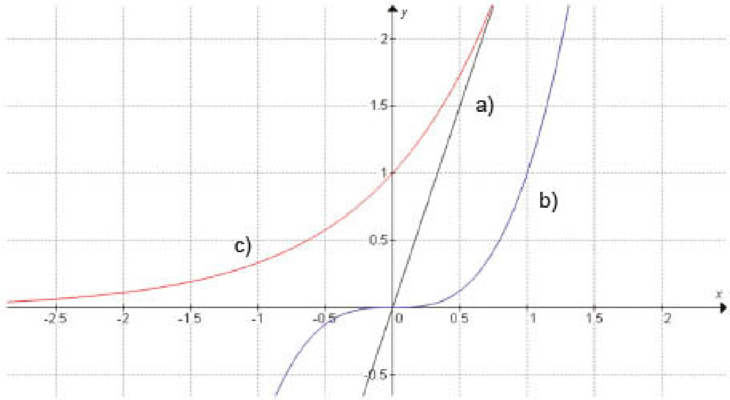


Bloque VII

Actividad de aprendizaje 1

1. *Ejercicios conceptuales. Se sugiere que el alumno investigue en el texto las respuesta.*

2. Las funciones graficadas son:



- *La gráfica que tiene mayor crecimiento cuando $x > 2$ es 4^x*
- *La gráfica que tiene mayor crecimiento cuando $2 \leq x < 4$ es 3^x*
- *La gráfica que tiene mayor crecimiento cuando $x \geq 4$ es x^3*
- *Los alumnos pueden manejar diferentes puntos de vista y llegar a una conclusión.*

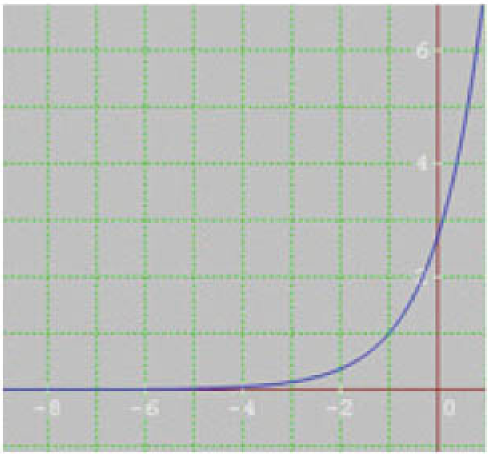
Actividad de aprendizaje 2

1.
Ecuación (ecuaciones): $y = e^{kx}$

x	y
-8.0	0.0003
-7.0	0.0009
-6.0	0.0025
-5.0	0.0067
-4.0	0.0183
-3.0	0.0498
-2.0	0.1353
-1.0	0.3679
0	1.0
1.0	2.7183
2.0	7.3891
3.0	20.0855
4.0	54.5982
5.0	148.4132
6.0	403.4288
7.0	1096.6332
8.0	2980.958
9.0	8103.0839

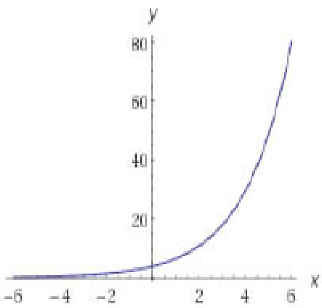
Ecuación (ecuaciones): $y = e^{k+x}$ {k: 1}

x	y
-5.0	0.0183
-4.0	0.0498
-3.0	0.1353
-2.0	0.3679
-1.0	1.0
0	2.7183
1.0	7.3891
2.0	20.0855
3.0	54.5982
4.0	148.4132
5.0	403.4288
6.0	1096.6332
7.0	2980.958
8.0	8103.0839

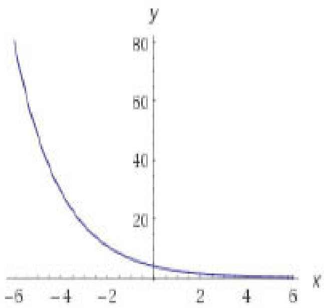


2. Las funciones se identifican como:

a) Crecimiento exponencial



b) Decaimiento exponencial



3.

a) *Mensualmente*

Fórmula $M = C(1+i)^n$ $\quad M = 17500\left(1+\dfrac{0.15}{12}\right)^{36} = 27369.016$ *este es el saldo a los 3 años*

b) *Semestralmente*

$$M = 17500\left(1+\frac{0.15}{2}\right)^{2} = \$20223.43 \text{ este es el saldo a los 3 años}$$

c) *Continuamente*

$$M = 17500\left(1+\frac{0.15}{360}\right)^2 = \$27541.82 \text{ este es el saldo a los 3 años}$$

4.

$$M = 1200\left(1+\frac{0.18}{4}\right)^2 = \$1431.02 \text{ este es el saldo a los 4 años}$$

Actividad de aprendizaje 3

1.

a) −0.0408
b) 3.7609
c) 0.4776
d) 5.4773
e) −0.5229
f) −3.4597

2.

a) $\log x = 3.1886$

$x = 10^{3.11886} = 1314.8009$

b) $\log x = 4.2351$

$x = 10^{4.2351} = 17183.0400$

c) $\log x = 3.8661$

$x = 10^{3.8661} = 7346.8302$

d) $\log x = 2.8464$

$x = 10^{2.8464} = 702.1017$

e) $\log x = 2.1679$

$x = 10^{2.1679} = 147.1974$

f) $\log x = 1.5736$

$x = 10^{1.5737} = 37.4714$

g) $\log x = 3.6297$

$x = 10^{3,6297} = 4262.8495$

h) $\log x = 2.8393$

$x = 10^{2.8393} = 690.7168$

i) $\log x = 2.6372$

$x = 10^{2.6372} = 433.7106$

j) $\log x = 4.5791$

$x = 10^{4.5791} = 37940.2336$

3.

a) $2^3 = 8$
$\log_2 8 = 3$

b) $8^{2/3} = 4$
$\log_8 4 = \dfrac{2}{3}$

c) $6^0 = 1$
$\log_6 1 = 0$

d) $4^{-2} = \dfrac{1}{16}$
$\log_6 \dfrac{1}{16} = -2$

e) $b^x = m$
$\log_b m = x$

f) $2^x = y$
$\log_2 y = x$

g) $5^3 = 125$
$\log_5 125 = 3$

h) $10^{-2} = 0.01$
$\log_{10} 0.01 = -2$

i) $4^3 = 64$
$\log_4 64 = 3$

j) $2^7 = 128$

$log_2 128 = 7$

4.

a) $log_3 81 = 4 \Rightarrow 3^4 = 81$

b) $log_9 1 = 0 \Rightarrow 9^0 = 1$

c) $log_x y = z \Rightarrow x^z = y$

d) $log_3 \frac{1}{243} = -5 \Rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$

e) $log\ 1000 = 3 \Rightarrow 10^3 = 1000$

f) $log_{36} 6 = \frac{1}{2} \Rightarrow 36^{\frac{1}{2}} = 6$

g) $log_2 \frac{1}{8} = -3 \Rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8}$

h) $log_3 x = y \Rightarrow 3^y = x$

i) $log_2 x = y \Rightarrow 2^y = x$

j) $log 100 = 2 \Rightarrow 10^2 = 100$

5.

a) $log_6 n = 3$

$n = 6^3 = 216$

b) $log_3 n = -5$

$n = 3^{-5} = \frac{1}{243}$

c) $log_b 27 = -3$

$b^{-3} = 27 \Rightarrow \left(b^{-3}\right)^{\frac{-1}{3}} = (27)^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

d) $log_b 3 = -\frac{1}{4}$

$b^{-\frac{1}{4}} = 3 \Rightarrow \left(b^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4} = (3)^{-4} \Rightarrow b = \frac{1}{(3)^4} = \frac{1}{81}$

e) $log_b 4 = -\frac{2}{3}$

$= \frac{log\ 496}{3} = 0.898494$

f) $log_b 1000 = 3$

$b^3 = 1000 \Rightarrow \left(b^3\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10$

g) $log_b 6 = -\frac{1}{3}$

$\left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

h) $log_b 27 = -\frac{1}{3}$

$\left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3} = (27)^{-3} \Rightarrow b = \frac{1}{27^3} = \frac{1}{19683}$

i) $log_2 n = 8$

$n = 2^8 = 256$

j) $log_b 125 = -3$

$b^{-3} = 125 \Rightarrow \left(b^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

6.

a) $\sqrt[3]{496} = \dfrac{\log 496}{3} = 0.898494$

b) $\sqrt[4]{.801} = \dfrac{\log 0.801}{4} = -0.024092$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{(77.6)(66.5)}{(44.3)(33.2)}} = \dfrac{\log 77.6 + \log 66.5 - \log 44.3 - \log 33.2}{3} = 0.181714$

d) $\sqrt{6.16}\sqrt[3]{81.2} = \dfrac{\log 6.16}{2} + \dfrac{\log 81.2}{3} = 1.03131$

e) $\sqrt{77.1}\sqrt[3]{1.41} = \dfrac{\log 77.1}{2} + \dfrac{\log 1.41}{3} = \mathbf{0.8938}$

f) $\dfrac{\sqrt{615}}{\sqrt[3]{401}} = \dfrac{\log 615}{2} - \dfrac{\log 401}{3} = \mathbf{0.5267}$

g) $\dfrac{(215)^{2/3}}{(16.2)\sqrt{41.1}} = \dfrac{2}{3}\log 215 - \log 16.2 - \dfrac{\log 41.1}{2} = \mathbf{-0.4615}$

h) $(10.66)^6 = 6\log 10.66 = \mathbf{6.1665}$

i) $\sqrt[4]{.1081} = \dfrac{\log 0.1081}{4} = \mathbf{-0.2415}$

j) $\dfrac{457}{\sqrt[3]{228}\sqrt{16.5}} = \log 457 - \dfrac{\log 228}{3} - \dfrac{\log 16.5}{2} = \mathbf{1.2652}$

7.

a) $\log 5 = \dfrac{\log 5}{\log 10}$

b) $\log 6 = \dfrac{\log 5}{\log 10}$

c) $\log 8 = \dfrac{\log 8}{\log 10}$

d) $\log 100 = \dfrac{\log 100}{\log 10}$

Actividad de aprendizaje 4

1.

a) *Logaritmo = 5* *base = 10*
b) *Logaritmo = 4* *base = 7*
c) *Logaritmo = 3* *base = 4*
d) *Logaritmo = 6* *base = 2*
e) *Logaritmo = 2* *base = 8*

2.

a) $4 = \log_5 625$

$5^4 = 625$

b) $25^2 = 625$

$\log_5 625 = 2$

c) $0.001 = 10^{-3}$

$\log_{10} 0.001 = -3$

d) $2 = \log_{\frac{1}{3}} 0.111$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.111$

e) $6^1 = 6$

$\log_6 6 = 1$

3.

a) $\log_4 16 = y$

$4^y = 16$
$y = 2$

b) $\log_2 x = 5$

$x = 2^5 = 32$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

d) $\log_5 125 = y$

$5^y = 125$
$y = 3$

e) $\log_3 x = 3$

$x = 3^3 = 27$

f) $\log_{\frac{1}{3}} x = 4$

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

g) $\log_b 81 = 4$

$b^4 = 81$
$b = 3$

h) $\log_b \frac{1}{27} = -3$

$b^{-3} = \frac{1}{27}$
$b = \frac{1}{3}$

i) $\log_b 25 = 2$

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

Actividad de aprendizaje 5

1.

- *¿Qué restricciones hay sobre b?*

La base "b" debe ser un número positivo y distinto de uno, igual que en la función exponencial.

La variable "x" nunca puede ser cero pues no existe un número "y" real tal que "b^y" sea cero.

La variable "x" sólo puede tomar valores positivos debido a que la base positiva "b" genera sólo potencias positivas.

Por ejemplo: $4^2 = 16$; $\quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = 0.04$

- *¿Cuál es el dominio de la función? Y, ¿cuál es su rango?*

El dominio de una función logarítmica es:

$$D = \{x : 0 < x < \infty\}$$

(se lee como conjunto de todos los números reales positivos)

Este dominio se puede verificar, ya que la gráfica nunca toma valores negativos sobre el eje x. El rango de una función logarítmica es:

$$R = \{x : -\infty < x < \infty\}$$

(que es el conjunto de todos los números reales)

- *Escribe la función $y = \log_b x$ en forma exponencial.*

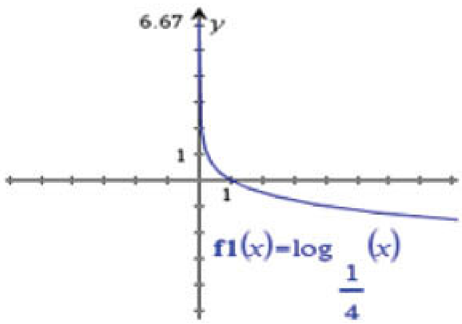
Sabes que $y = \log_b (x)$ sí y sólo si $x = b^y$ es la forma exponencial

- *¿Cuál es el concepto de función exponencial?*

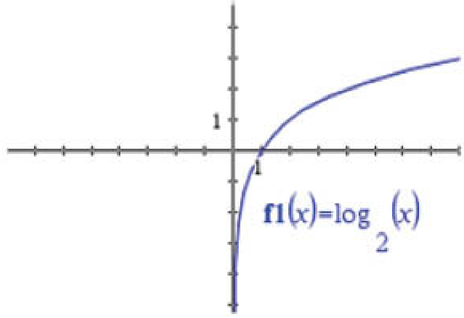
Se denomina función exponencial a toda función de la forma: $y = a \cdot b^x$ o $f(x) = a \cdot b^x$ donde "x" acepta cualquier valor real, "b" es un número positivo y distinto de 1 y $a \neq 0$ y $k \neq 0$. En la definición anterior "b" se conoce como base y la variable independiente "x" se conoce como exponente.

2.

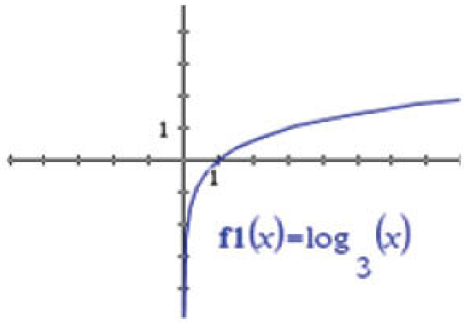
a)



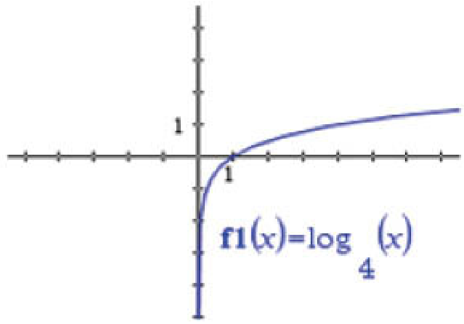
b)



c)

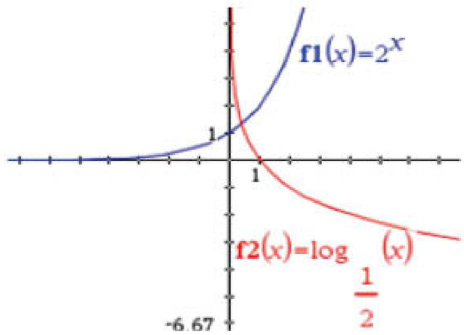


d)

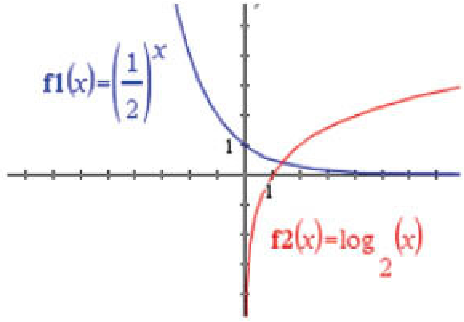


3.

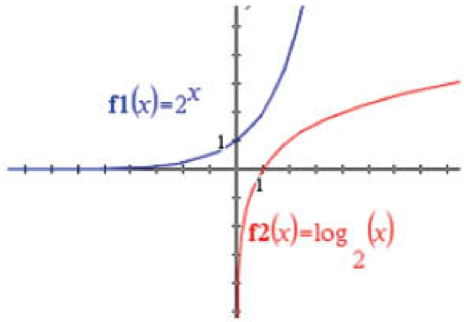
a)



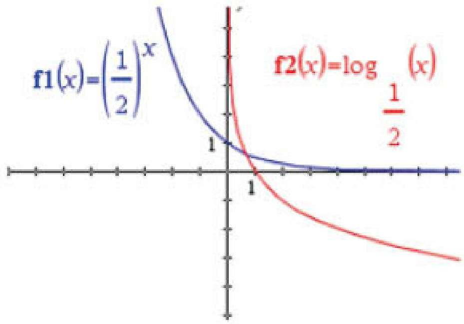
b)


$f1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
1
1
$f2(x) = \log_2(x)$

c)


$f1(x) = 2^x$
1
1
$f2(x) = \log_2(x)$

d)


$f1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$f2(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$
1
1

Actividad de aprendizaje 6

1.

$$-4.1605t = ln\frac{30-20}{40-20}$$

$$t = \frac{ln\,0.5}{-4.1605} = 0.1666\ horas$$

2.

a)

$$k(3) = ln\frac{-4-21}{18-21}$$

$$k = 0.3069$$

b)

$$t(0.3069) = ln\frac{6-21}{18-21}$$

$$t = 5.2442$$

3.

a)

$$y = 41.3 + e^{0.1527(1)}$$

$$y = 42.4650\ millones\ de\ personas$$

b)

$$42.4650 = 41.3 + e^{0.1527t}$$

$$t = \left[\frac{log\,1.1650}{log\,2.7183}\right] \div (0.1527)$$

$$t = 1$$

En un año la población activa será de 44 millones

4.

$$kt = ln\frac{T_f - T_m}{T_i - T_m}$$

$$3(0.3069) = ln\frac{T_f - 15}{18-15}$$

$$T_f = 3.6288$$

5.

$$y = 4 + ln\,0.5^{(-8)}$$

$$y = 4 - (8\,ln\,0.5)$$

$$y = 9.5452$$

6.

$$p = p_0 e^{kt}$$

p_o es el valor inicial y k es la tasa de aumento o disminución

7.

a)

$$f(log\,E)^{-1} = \ \ log\,E = 11.8 + 1.5m_s,$$

$$f(log\,E)^{-1} = \mathbf{11.8{+}1.5(6) = 6.31x10^{20}}$$

b)

$$f(log\,E)^{-1} = \mathbf{11.8{+}1.5(1.2x10^{15}) = 2.19}$$

8.

a)

$$s_p = 20\,log\frac{0.0036\ dinas / cm^2}{0.0002} = 25.1055$$

b)

$$s_p = 20\,log\frac{10}{0.0002} = 93.9794$$

9.

$$M = \frac{log(1.259 \times 10^{21}) - 11.8}{1.5} = 6.2$$

10.

$$log_3 45 = \frac{log\,45}{log\,3} = 3.4650$$

11.

$log(3x-5)-log(5x)=1.23$

$log\dfrac{3x-5}{5x}=1.23$

Se debe calcular antilogaritmo en ambos extremos de la ecuación

$anti\,log\left(log\dfrac{3x-5}{5x}=1.23\right)$

$\dfrac{3x-5}{5x}=17$

$82x=-5$

$x=-0.061$

12.

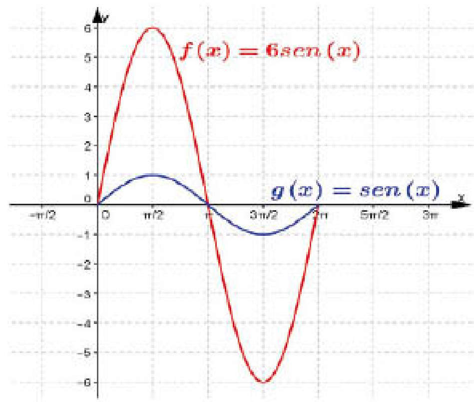
$x=(64)^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[2]{64}\right)^{3}=512$

Bloque VIII

Actividad de aprendizaje 1

a)

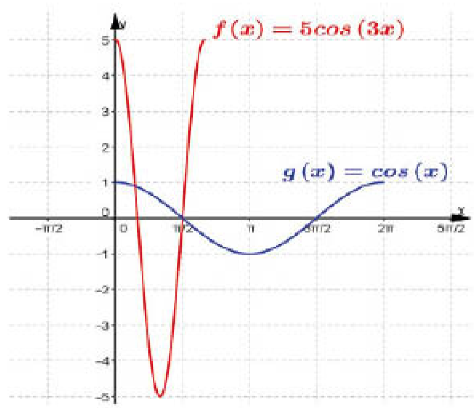
Amplitud: 6
Periodo: 2π



b)

Amplitud: 5

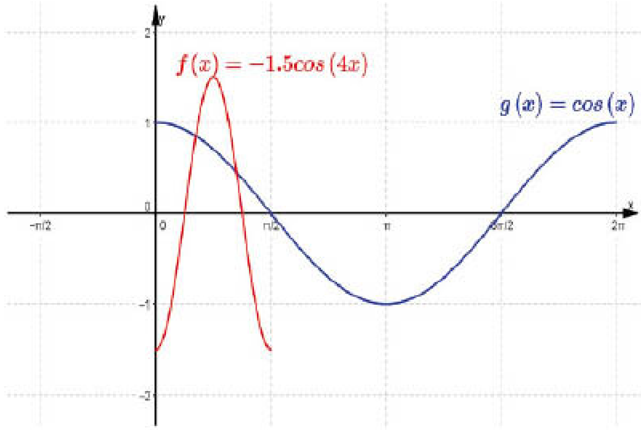
Periodo: $\dfrac{2\pi}{3}$



c)

Amplitud: 1.5

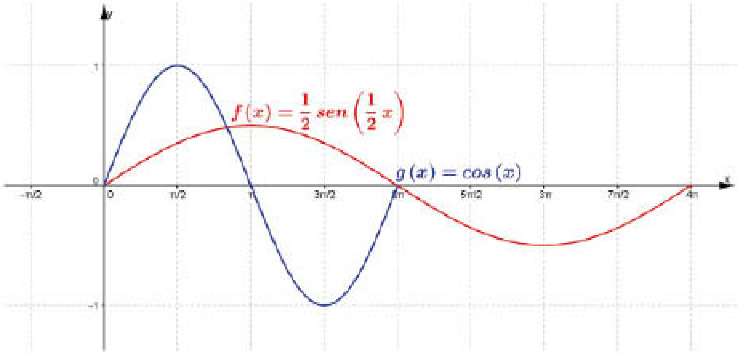
Periodo: $\frac{\pi}{2}$



d)

Amplitud: $\frac{1}{2}$

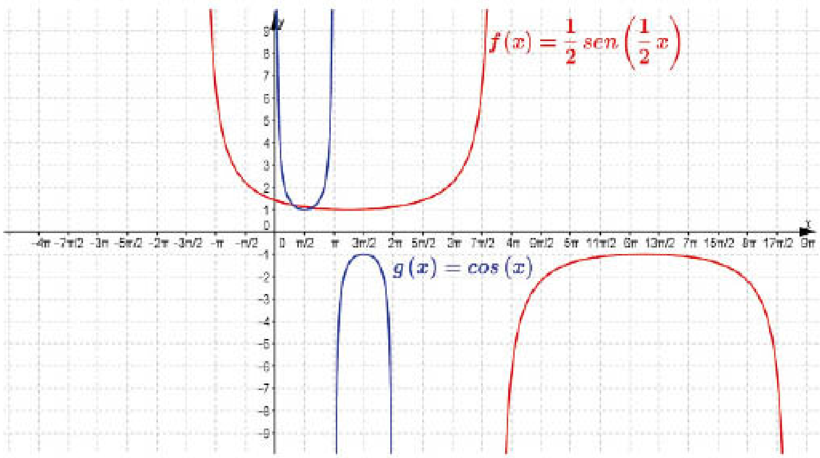
Periodo: 4π



e)

Amplitud: No tiene.

Periodo: 10π



Actividad de aprendizaje 2

1.

a)

Cosecante:

$$\textit{Dominio: } \mathbb{R}-\{\ldots,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\ldots\}\text{, } \textit{Rango: } (-\infty.-1]\cup[1,\infty)$$

Secante:

$$\textit{Dominio: } \mathbb{R}-\left\{\ldots,-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots\right\}\text{, } \textit{Rango: } (-\infty.-1]\cup[1,\infty)$$

Cotangente:

$$\textit{Dominio: } \mathbb{R}-\{\ldots,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\ldots\}\text{, } \textit{Rango: } \mathbb{R}$$

b)

Secante:

$$\textit{Continua en } x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\textit{Creciente en } \ldots\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\ldots$$

$$\textit{Decreciente en } \ldots\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\cup\ldots$$

$$\textit{Máximos en } (2k\pi,-1),\ k\in\mathbb{Z}\text{; } \textit{mínimos en } ((2k+1)\pi,-1),\ k\in\mathbb{Z}$$

Cosecante:

$$\textit{Continua en } x\in\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

$$\textit{Creciente en } \ldots\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\ldots\text{; } \textit{decreciente en } \ldots\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\cup\ldots$$

$$\textit{Máximos en } \left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,-1\right),\ k\in\mathbb{Z}\text{; } \textit{mínimos en } \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,-1\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

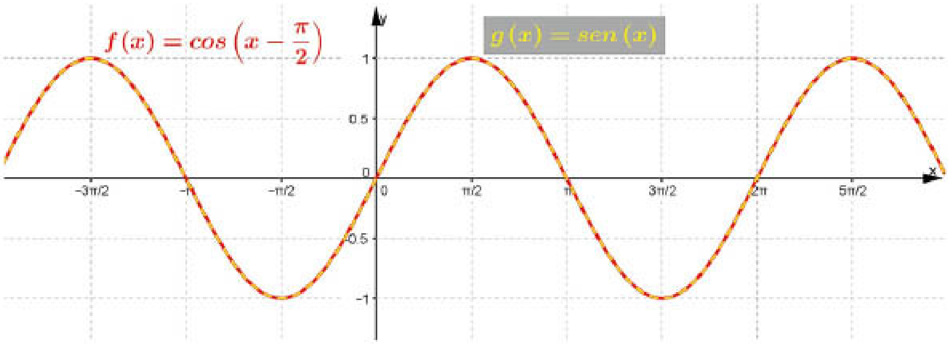
Cotangente:

Continua en $x\in\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ *; decreciente en* $\mathbb{R}$ *; no tiene máximos, ni mínimos.*

c) *Se recomienda usar alguna aplicación de software como Geogebra. En el CD del material complementario se explican ejemplos acerca del trazado de estas funciones.*

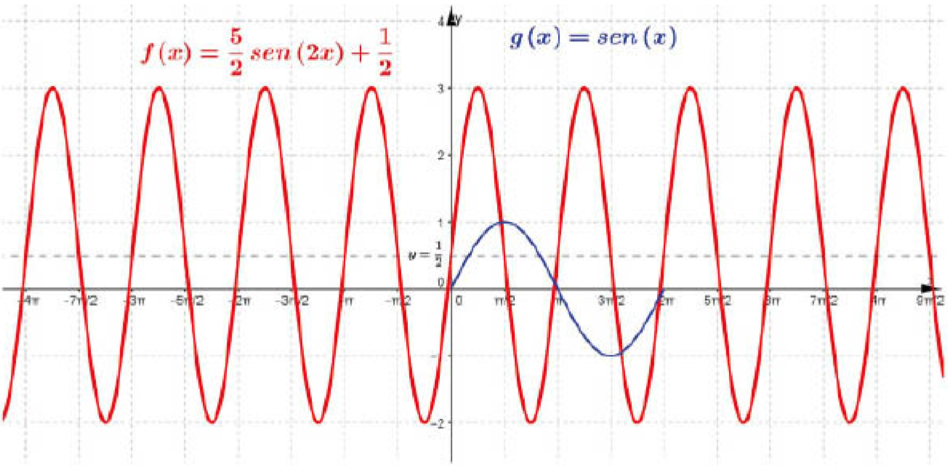
2.

a)

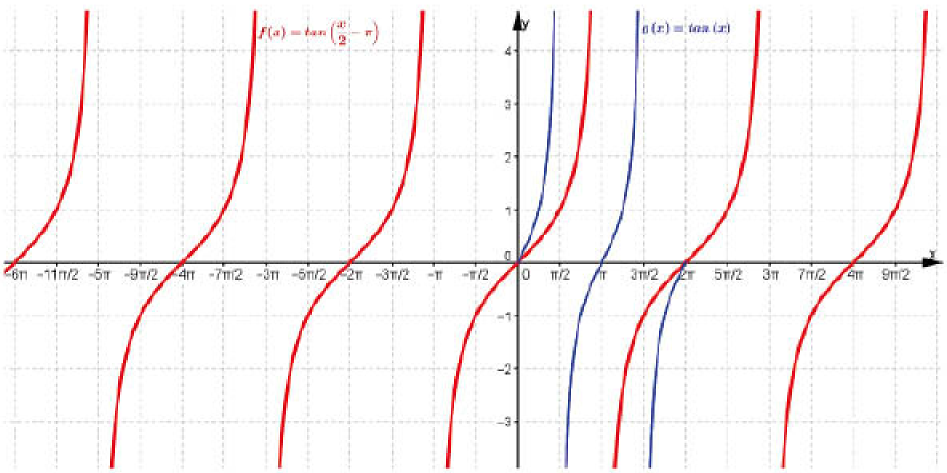


Conclusión: Ambas funciones corresponden al mismo lugar geométrico.

b)



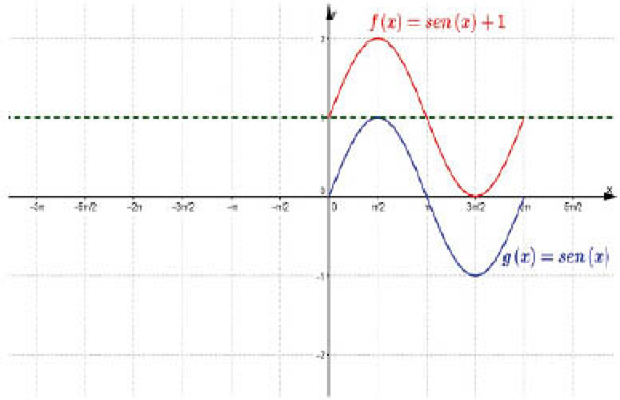
c)



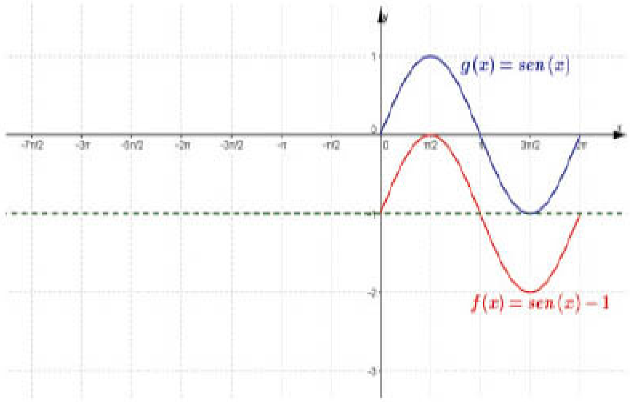
Actividad de aprendizaje 3

1.

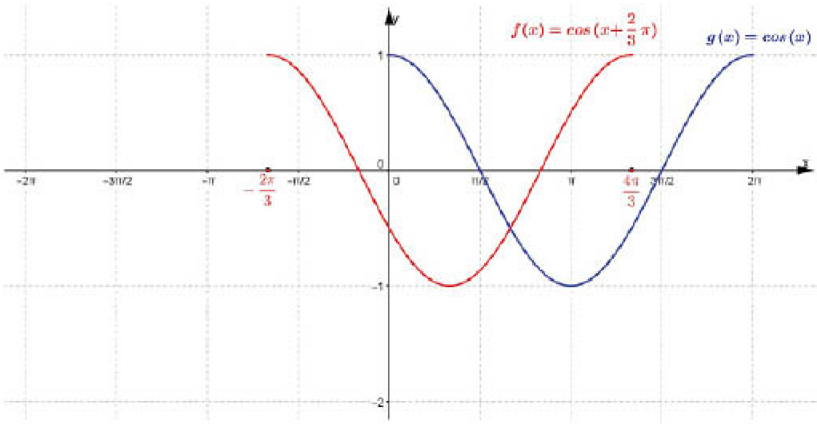
a) *Mueve la gráfica hacia arriba una unidad.*



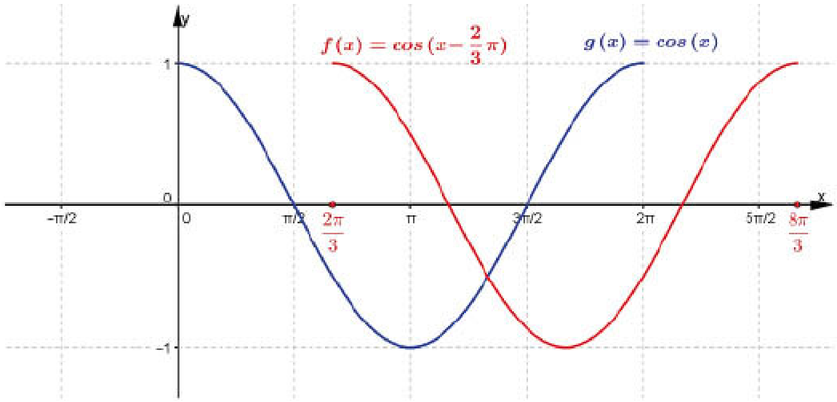
b) *Mueve la gráfica hacia abajo una unidad.*



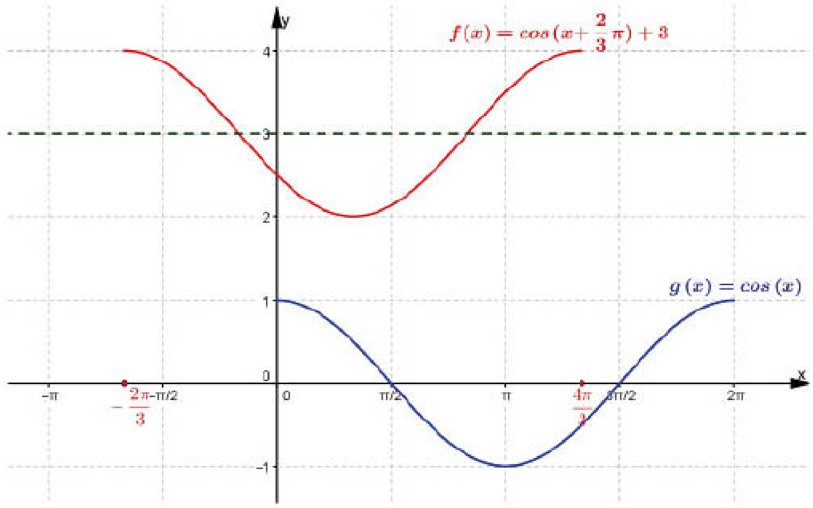
c) *Corre la gráfica horizontalmente hacia la izquierda* $\frac{2\pi}{3}$



d) *Corre la gráfica horizontalmente hacia la derecha* $\frac{2\pi}{3}$



e) *Desplazamiento hacia la izquierda* $\frac{2\pi}{3}$ *y hacia arriba 3 unidades.*



2. *La respuesta correcta es b)*

3. *La respuesta correcta es a)*

Autoevaluación

1.

a)

Dominio: $Domf : x \in (-\infty, \infty)$
La gráfica se extiende horizontalmente continuamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Rango: $Rangof : y \in [-1, 1]$
La gráfica varía verticalmente desde -1 hasta 1.

Intersección con el eje Y: el origen del plano cartesiano, que es el punto (0, 0).

Intersecciones con el eje X: todos los puntos ($n\pi$, 0) donde n = ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...

Puntos máximos: $\frac{4n+1}{2}\pi$ *, para n = ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...*

Puntos mínimos: $\frac{4n+3}{2}\pi$ *, para n = ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...*

Periodo (T): 2π, que es la longitud de la onda que se reproduce periódicamente: $T = 2\pi$.
La función seno repite sus valores cada 2π unidades del eje X.

Frecuencia (f): es el inverso del periodo: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$

Representa el número de ondas seno base que se tienen cada 2π unidades; es decir, hay una onda seno base cada 2π unidades sobre el eje X.

Amplitud (A): es la máxima distancia del eje X a la gráfica de la función, sin importar la dirección; es decir, hacia arriba del eje X, el máximo se encuentra en 1 (distancia de una unidad) y hacia abajo del eje X la máxima distancia se presenta en -1 (distancia de una unidad): A = 1.

b)

Dominio: $Domf = (-\infty, \infty)$

Rango: $Rangof = [d - |a|, d + |a|]$

Intersección con el eje Y: $x = 0, \quad y = a \cdot cos(c) + d, \quad (0, a \cdot cos(c) + d)$

Intersecciones con el eje X: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos máximos: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Puntos mínimos: pueden determinarse después de trazar la gráfica.

Periodo (T): $T = \frac{2\pi}{b}$

Frecuencia (f): $f = \frac{b}{2\pi}$

Amplitud (A): $A = |a|$

Si a = 1, b = 1, c = 0 y d = 0, se tiene la función base f(x) = cos x, que se acaba de analizar.

Los parámetros de la función cosenoide afectan la gráfica de la función coseno base de la misma manera que en la función senoide.

El procedimiento para graficar las funciones cosenoides es semejante al del trazado de la gráfica de la función senoide.

2.

Algunas situaciones donde se pueden observar las gráficas de funciones trigonométricas seno y coseno.

- *Los aparatos utilizados en un hospital como el electroencefalograma y el electrocardiograma.*
- *Las olas del mar.*
- *Cuando observamos las montañas.*
- *El ecualizador de la radio al escuchar música.*

Referencias bibliográficas

Antonyan, N., Cendejas, L. y Aguilar, G. (2007). *Matemáticas 2 Funciones*. México: Thomson.

Arriaga, A., Benítez, M., Ramírez, L. y Villamil, P. (2009). *Matemáticas 4*. México: Progreso.

Cuéllar, J. A. (2006). *Matemáticas IV – Relaciones y funciones*. México: McGraw-Hill.

Cuevas, C. A., Mejía, H. R. (2003). *Cálculo visual*. México: Oxford.

Escalante, L., Pérez, Davy A. (2010). Matemáticas IV, México: Book Mart.

García, M., Páez, R., Barkovich, M. y Murillo, J. (2007). Matemáticas 4 para preuniversitarios. México: Esfinge.

Jiménez, R. (2006). Funciones. México: Pearson.

Navarro, M. E., Preciado, A. P. (2011). Matemáticas 4. México: Fernández Editores (Bachillerato).

Ortiz, F. (2006). Matemáticas IV: Funciones. México: Publicaciones Cultural.

Pimienta, J. e Iglesias, R. (2007). Matemáticas IV: Un enfoque constructivista. México: Pearson.

Ruiz, J. (2006). Matemáticas IV: Precálculo: Funciones y aplicaciones. México: Patria.

Silva, J. y Lazo, A. (2007). Fundamentos de Matemáticas, Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo. México: Limusa.

Créditos

Bloque VI

Página 159
Functions in real life
© N.Grazziano
Tomado de: Funciones
Disponible en: http://funcionesmatematicas.weebly.com/curiosidades.html

Notas

AGREGAR DATOS DE

COLOFÓN PÁGINA 312

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Dirección General del Bachillerato

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Telebachillerato Comunitario