Matemáticas I

Primer semestre

Matemáticas I

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEBACHILLERATO
COMUNITARIO

Telebachillerato Comunitario. Primer semestre

Matemáticas I

Autores
Misael Garrido Méndez
Luz del Carmen Llamas Casoluengo
Israel Sánchez Linares

Asesoría académica
Marcos Jesús Núñez Linares
Martha Huerta Cruz

Asesoría técnico-pedagógica
Subdirección Académica de Modalidades
no Escolarizada y Mixta DGB

Diseño y diagramación
María del Pilar Castro Rodríguez
Saúl Ríos Bernáldez

D.R. Secretaría de Educación Pública, 2015
Argentina 28, Centro, 06020, Ciudad de México.
ISBN: 978-607-8229-96-3
Séptima reimpresión
Impreso en México

Prefacio

Estimado estudiante, el libro que tienes en tus manos fue elaborado pensando en ti, en tus necesidades e inquietudes, como un instrumento que te apoye ahora que estudias el bachillerato. En sus páginas encontrarás contenidos y actividades que son fundamentales para que paso a paso, puedas alcanzar las metas que esta asignatura te propone para este semestre.

A ti te toca, ahora, sacarle el mayor provecho a este libro, que es fruto del esfuerzo de un grupo de profesores y especialistas. Si lo haces tu amigo, lo aprovechas al máximo y lo combinas con el apoyo de tu maestro y de los demás recursos didácticos que están a tu alcance, seguramente ampliarás tus competencias y habilidades para construir un mejor futuro para ti y contribuir al desarrollo de tu comunidad, de tu estado y de nuestro México.

Te deseamos éxito en esta importante etapa de tu formación: el bachillerato.

Tabla de contenido

Matemáticas I

Bloque I. Resuelves problemas aritméticos y algebraicos

Bloque II. Utilizas magnitudes y números reales

Bloque III. Realizas sumas y sucesiones de números

Tabla de contenido

Bloque IV. Realizas transformaciones algebraicas I

Bloque V. Realizas transformaciones algebraicas II

Bloque VI. Resuelves ecuaciones lineales I

Bloque VII. Resuelves ecuaciones lineales II

Bloque VIII. Resuelves ecuaciones lineales III

Tabla de contenido

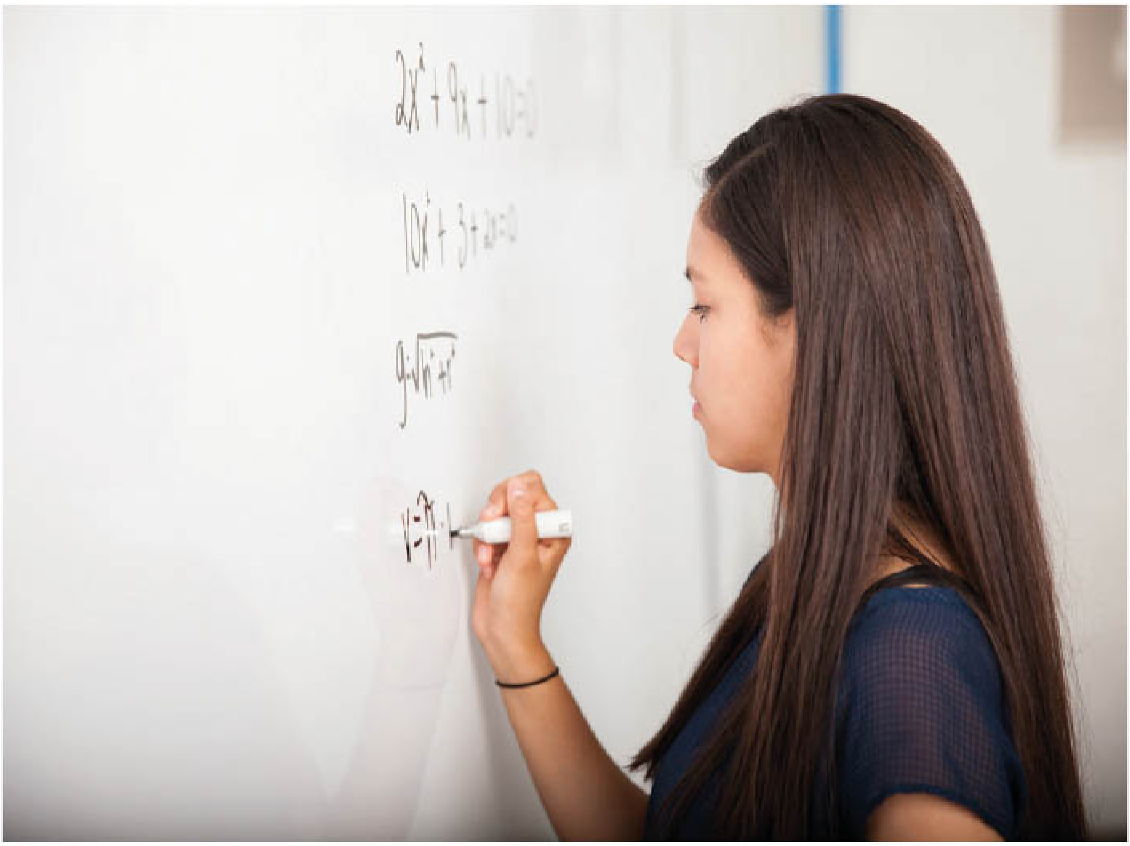
Bloque IX. Resuelves ecuaciones cuadráticas I

Bloque X. Resuelves ecuaciones cuadráticas II

Presentación general

Como parte de la formación básica, se presenta la asignatura de **Matemáticas I**. Ésta pertenece al campo disciplinar de las matemáticas, que conforme al Marco Curricular Común, tiene la finalidad de propiciar el desarrollo de tu pensamiento lógico y crítico, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que faciliten tu formación como ciudadano reflexivo y participativo, enfatizando una perspectiva plural y democrática.

Su desarrollo implica que podrás interpretar el entorno social y cultural con sentido crítico, a la vez que podrás valorar prácticas distintas a las tuyas, y de este modo, asumir una actitud responsable hacia los demás.



¿Qué es una *competencia*?

En el contexto educativo, una competencia se define como "la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico" (Acuerdo 442, Secretaría de Educación Pública, 2008).

El Bachillerato General busca consolidar y diversificar los aprendizajes y desempeños, ampliando y profundizando el desarrollo de competencias relacionadas con el campo disciplinar que promueve la asignatura de **Matemáticas I**. Es por ello que se busca el desarrollo de las **11 competencias genéricas**.

1. **Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.**
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. **Elige y practica estilos de vida saludables.**
4. **Sustenta una postura personal y toma decisiones sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.**
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. **Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.**
7. **Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.**
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9. **Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.**
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. **Contribuye al desarrollo sostenible de manera crítica, con acciones responsables.**

Las **competencias disciplinares**, que son las habilidades que debes desarrollar y lo que tienes que aprender dentro del campo del conocimiento y la asignatura, se enunciarán al principio de cada bloque, y te servirán para identificar tu aprendizaje.

¿Cómo está estructurado este libro?

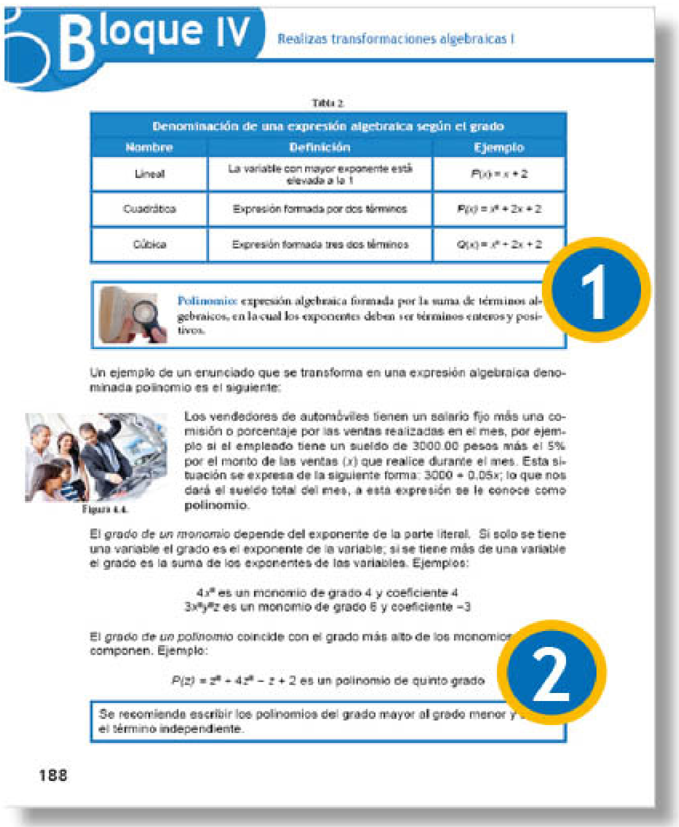
Inicio del bloque

Al inicio de cada bloque encontrarás una breve introducción para sensibilizarte sobre el contenido, las competencias genéricas con sus atributos, las competencias disciplinares y los desempeños que se obtendrán a partir de los objetos de aprendizaje.

Desarrollo del bloque

Esta parte es fundamental, aquí encontrarás el contenido general y disciplinar que necesitas para acercarte intelectualmente al tema de las matemáticas.

A lo largo del bloque se intercalan estrategias didácticas de aprendizaje, actividades acompañadas de imágenes, ejemplos, preguntas detonadoras y evaluaciones. Todo esto estará relacionado con los contenidos y las competencias a desarrollar. También encontrarás algunos apoyos de estudio como cápsulas con datos interesantes y cuadros al margen del texto para reforzar tu aprendizaje, por ejemplo:



Bloque IV Realizas transformaciones algebraicas I

Tabla 2.

Denominación de una expresión algebraica según el grado		
Nombre	Definición	Ejemplo
Lineal	La variable con mayor exponente está elevada a la 1	$F(x) = x + 2$
Cuadrática	Expresión formada por dos términos	$F(x) = x^2 + 2x + 2$
Cúbica	Expresión formada tres dos términos	$Q(x) = x^3 + 2x + 2$

1

Polinomio: expresión algebraica formada por la suma de términos algebraicos, en la cual los exponentes deben ser términos enteros y positivos.

Un ejemplo de un enunciado que se transforma en una expresión algebraica denominada polinomio es el siguiente:

Los vendedores de automóviles tienen un salario fijo más una comisión o porcentaje por las ventas realizadas en el mes, por ejemplo si el empleado tiene un sueldo de 3000.00 pesos más el 5% por el monto de las ventas (x) que realice durante el mes. Esta situación se expresa de la siguiente forma: $3000 + 0.05x$; lo que nos dará el sueldo total del mes, a esta expresión se le conoce como **polinomio**.

Figura 4.4.

El *grado de un monomio* depende del exponente de la parte literal. Si solo se tiene una variable el grado es el exponente de la variable; si se tiene más de una variable el grado es la suma de los exponentes de las variables. Ejemplos:

$4x^4$ es un monomio de grado 4 y coeficiente 4
$3x^3y^2z$ es un monomio de grado 6 y coeficiente −3

El *grado de un polinomio* coincide con el grado más alto de los monomios … componen. Ejemplo:

$P(z) = z^5 + 4z^3 - z + 2$ es un polinomio de quinto grado

2

Se recomienda escribir los polinomios del grado mayor al grado menor y … el término independiente.

188

1. **Glosario**, definiciones y términos para apoyar la comprensión.

2. **Modelos matemáticos**, que te permitirán representar problemas para llegar a la solución.

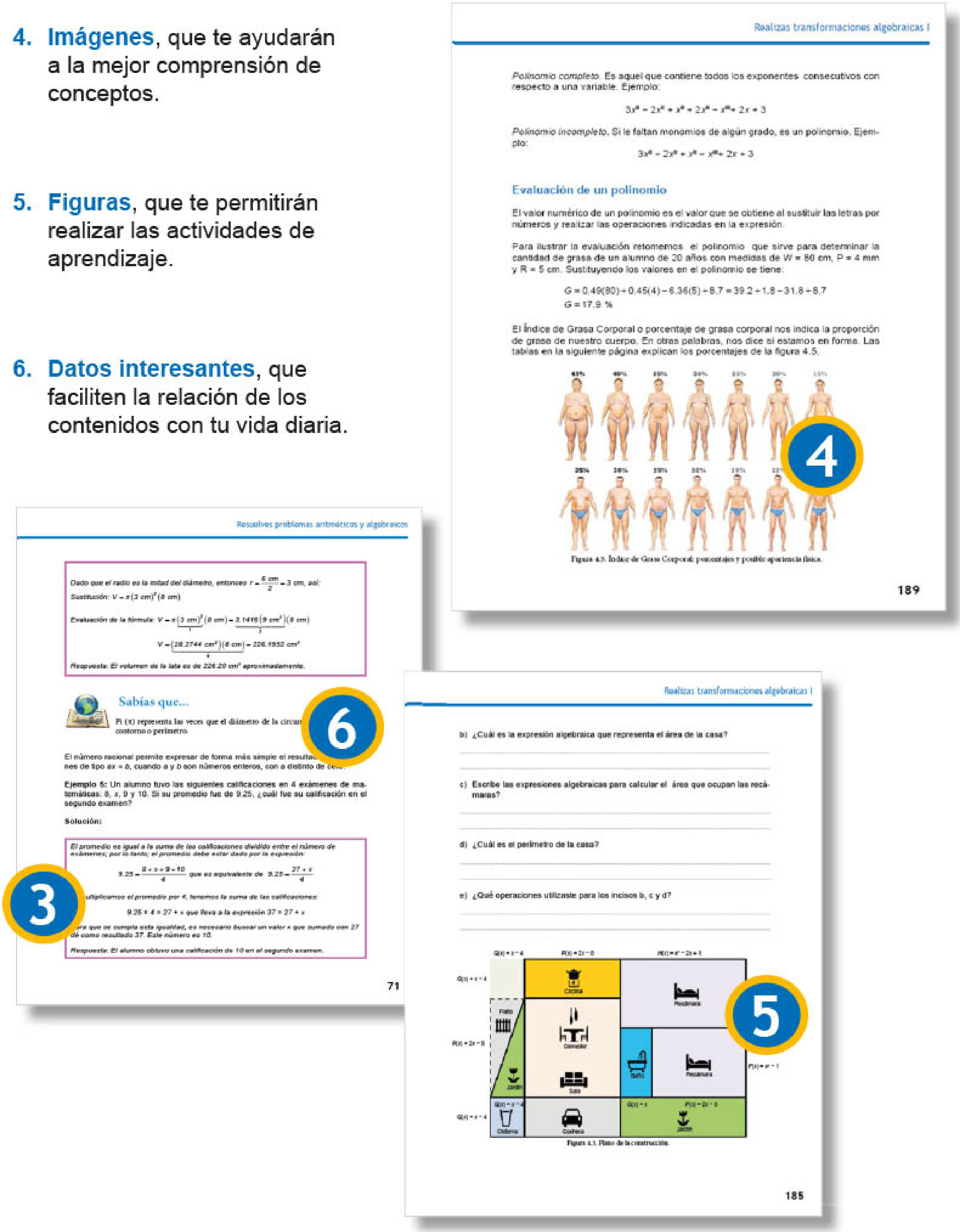
3. **Procedimientos**, que muestran la secuencia lógica para llegar a soluciones.

¿Cómo está estructurado este libro?

4. **Imágenes**, que te ayudarán a la mejor comprensión de conceptos.

5. **Figuras**, que te permitirán realizar las actividades de aprendizaje.

6. **Datos interesantes**, que faciliten la relación de los contenidos con tu vida diaria.



Simbología que facilitará tu proceso de aprendizaje

Diseño instruccional

 Para iniciar, reflexiona

 ¿Con qué conocimientos cuentas?

 Aprende más

 Aplica lo aprendido

 Actividad

Apoyos para reforzar el aprendizaje

 Glosario

 Reflexionemos sobre la actividad

 Sabías que...

 Verifica tus logros

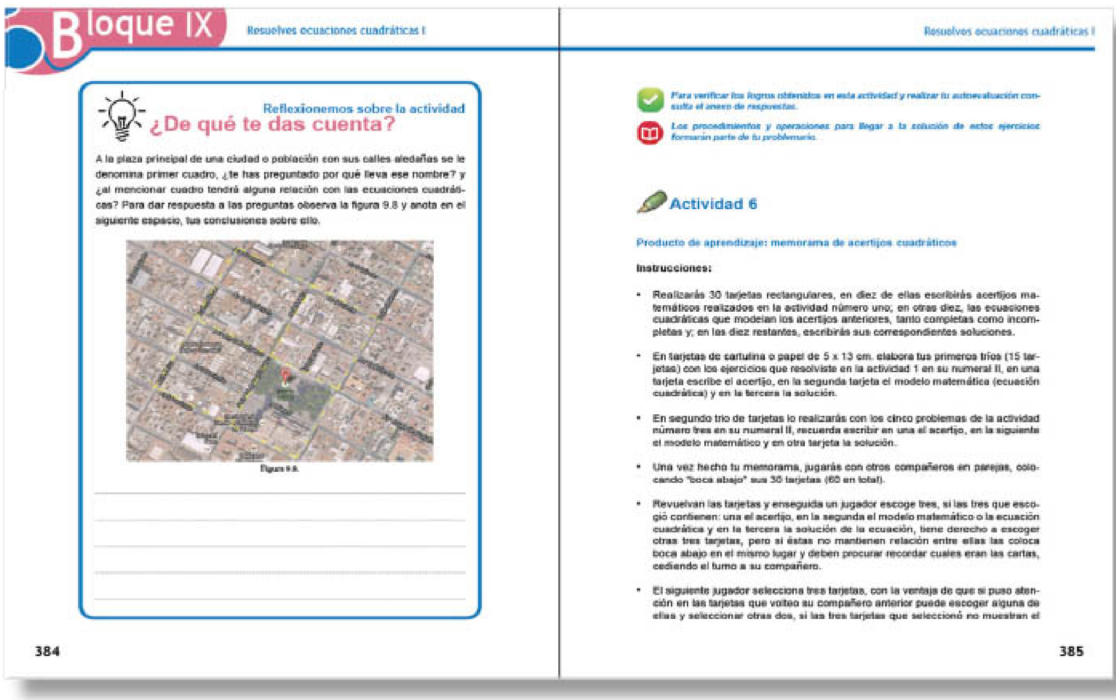
 Portafolio de evidencias

 Problemario

Cierre del bloque

Al terminar cada tema se te pedirá una actividad y producto final para que puedas evaluar qué tanto has avanzado y qué áreas de oportunidad tienes; se te pedirá analizar, investigar, reflexionar y argumentar.

El libro incluye actividades de aprendizaje para que puedas autoevaluar tu desempeño en el logro de las competencias, por lo que al finalizar cada actividad puedes consultar la retroalimentación de la misma. Ten presente que cada actividad debe concretarse en una evidencia que irás recopilando en tu cuaderno y concentrando para la evaluación del curso.



Bloque IX

Resuelves ecuaciones cuadráticas I

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

A la plaza principal de una ciudad o población con sus calles aledañas se le denomina primer cuadro, ¿te has preguntado por qué lleva ese nombre? y ¿al mencionar cuadro tendrá alguna relación con las ecuaciones cuadráticas? Para dar respuesta a las preguntas observa la figura 9.8 y anota en el siguiente espacio, tus conclusiones sobre ello.

Figura 9.8.

384

Resuelves ecuaciones cuadráticas I

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Actividad 6

Producto de aprendizaje: memorama de acertijos cuadráticos

Instrucciones:

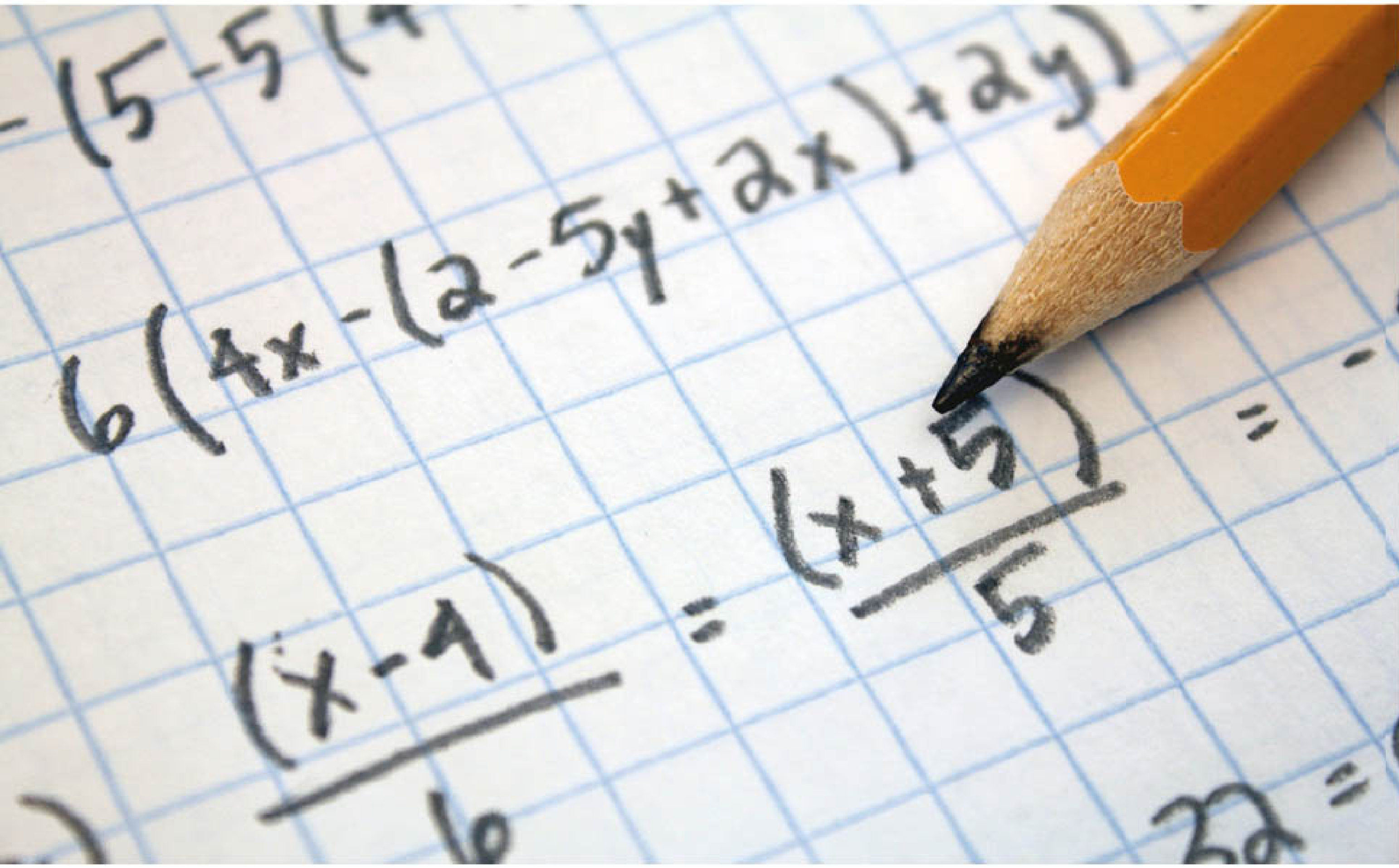
- Realizarás 30 tarjetas rectangulares, en diez de ellas escribirás acertijos matemáticos realizados en la actividad número uno; en otras diez, las ecuaciones cuadráticas que modelan los acertijos anteriores, tanto completas como incompletas y; en las diez restantes, escribirás sus correspondientes soluciones.
- En tarjetas de cartulina o papel de 5 x 13 cm. elabora tus primeros tríos (15 tarjetas) con los ejercicios que resolviste en la actividad 1 en su numeral II, en una tarjeta escribe el acertijo, en la segunda tarjeta el modelo matemática (ecuación cuadrática) y en la tercera la solución.
- En segundo trio de tarjetas lo realizarás con los cinco problemas de la actividad número tres en su numeral II, recuerda escribir en una el acertijo, en la siguiente el modelo matemático y en otra tarjeta la solución.
- Una vez hecho tu memorama, jugarás con otros compañeros en parejas, colocando "boca abajo" sus 30 tarjetas (60 en total).
- Revuelvan las tarjetas y enseguida un jugador escoge tres, si las tres que escogió contienen: una el acertijo, en la segunda el modelo matemático o la ecuación cuadrática y en la tercera la solución de la ecuación, tiene derecho a escoger otras tres tarjetas, pero si éstas no mantienen relación entre ellas las coloca boca abajo en el mismo lugar y deben procurar recordar cuales eran las cartas, cediendo el turno a su compañero.
- El siguiente jugador selecciona tres tarjetas, con la ventaja de que si puso atención en las tarjetas que volteo su compañero anterior puede escoger alguna de ellas y seleccionar otras dos, si las tres tarjetas que seleccionó no muestran el

385

Los contenidos y las actividades se presentan de una manera atractiva. Aprovecha cada pregunta, el contenido, las actividades, ya que cada una incidirá en tu crecimiento personal, familiar y social. Trabaja con tu profesor y con tus compañeros, acércate a ellos, resuelvan dudas y aprendan juntos; date la oportunidad de construir con ellos este viaje. Esperamos que el curso sea interesante y fructífero.

¿Cuál es el propósito de esta asignatura?

Construyes modelos algebraicos que representen situaciones problemáticas de su entorno y para obtener las soluciones, utilizarás el lenguaje algebraico y sus operaciones; las ecuaciones y sistemas; así como funciones lineales y cuadráticas que te permitirán analizar relaciones entre las magnitudes físicas involucradas en un problema y generar los suficientes argumentos para fundamentar tus respuestas e interpretaciones de los fenómenos que te rodean.



Bloque I

Resuelves problemas aritméticos y algebraicos

Introducción

Para dar inicio a nuestro curso de matemáticas, empezaremos comentando uno de los conceptos que rodean nuestra vida y que más utilizamos, este concepto es el número.

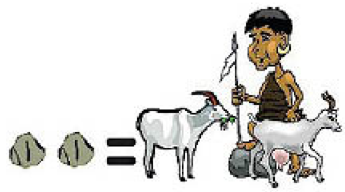


Figura 1.1.

Te imaginas, ¿cómo decirle la hora a alguien pero sin usar números? ¿Cómo pedir en la tienda una cantidad de algo sin tener la idea de número? De hecho la necesidad de representar la cantidad de algún objeto no es nueva y se inició en la era de las cavernas cuando nuestros antepasados tuvieron que representar el número de ovejas, perros, vacas o hijos que tenían.

Los números son una representación abstracta de una cantidad física; que tienen ciertas propiedades, reglas o normas que se han convenido para usarlos, como se muestra, en el desarrollo de este primer bloque.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e Interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Aprendes la solución de problemas aritméticos y algebraicos en el contexto de los números reales.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Representación de relaciones entre magnitudes. • Modelos aritméticos o algebraicos.	• Efectúas observaciones de objetos y gráficos. • Analizas y comprendes textos y Fórmulas • Relacionas Información de relaciones entre magnitudes. • Analizas la resolución de problemas mediante la interpretación de modelos aritméticos o algebraicos.

Continúa...

Procedimentales	• Identifica formas diferentes de representar números positivos, decimales en distintas formas. • Jerarquiza operaciones numéricas al realizarlas. • Calcula porcentajes, descuentos e intereses en diversas situaciones. • Representa relaciones numéricas y algebraicas entre los elementos de diversas situaciones.	• Realizas ejercicios y aplicando las propiedades de las relaciones entre ángulos.
Actitudinales	• Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje. Compartir ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.	• Realizas la exposición de trabajos con criterios de orden y limpieza. • Escuchas con respeto y atención las opiniones y/o argumentos de otras personas. • Interpretas y das seguimiento a las instrucciones.

¿Qué tiempo vas emplear?

Considera ocho horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices cuatro horas para revisar los contenidos temáticos y cuatro horas para llevar acabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu Dominó.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque obtendrás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Problemario
- Dominó con modelos matemáticos: aritméticos y algebraicos.

Problemario. Lo elaborarás trabajando tanto en tu libro como en tu libreta con la resolución de problemas y ejercicios de manera individual y grupal. Al termino del bloque, integrarás tu problemario con las cinco actividades que hallas realizado a lo largo del bloque, consulta la lista de cotejo que está ubicada al final del bloque, para tener idea clara de los criterios de evaluación que debes cubrir para entregarlo a tu profesor.

Dominó con modelos matemáticos: aritméticos y algebraicos. Elaborarás fichas de dominó basadas en la aplicación de los contenidos abordados en este bloque I, de modo que jugando y divirtiéndote puedas combinar la práctica con la teoría de los contenidos.

Este juego lo realizarás utilizando problemas aritméticos y algebraicos similares a los realizados en el bloque. El material producido por tu equipo deberá presentar diseños creativos, económicos y fáciles de manipular; preferentemente, empleando materiales reciclados (madera, papel cascarón, cartulinas, etc.).

Para iniciar, reflexiona

1. Si no existieran sistemas de numeración, ¿cómo representarías tu edad?

....

2. ¿Cómo expresarías la cantidad de páginas de este libro?

....

3. ¿Cómo le dirías a un conductor el domicilio al que te tiene que llevar?

....

4. ¿Conoces representaciones numéricas con símbolos?, ¿cuáles?

....

5. ¿Qué es un número positivo?

....

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones (1): Escribe las palabras que complementan los siguientes enunciados.

1. Dependiendo de los grupos culturales, en el desarrollo de las matemáticas existieron diversos sistemas de numeración. Menciona al menos dos que conozcas:

   .... y ....

2. De las antiguas culturas europeas, ¿qué numeración se sigue utilizando hoy en

día para numerar aniversarios o hacer referencia a algún siglo? ____________.

3. De las culturas mesoamericanas, ¿quiénes emplearon un sistema de numeración posicional?

____

4. ¿Qué civilización utilizó por primera vez en la historia el cálculo de áreas?

____

5. ¿Qué sistema de numeración utilizamos cotidianamente?

____

Instrucciones (2): Realiza las razones o justificaciones necesarias para resolver lo que se solicita, realizando los procedimientos y operaciones en tu libreta.

6. Juan compró un balón de futbol soccer en \$337.25, una playera de \$188.57, un pants de su equipo favorito de \$280.60 pesos y una calcomanía de \$23.48. Si pagó con un billete de \$1,000 pesos, ¿cuánto le regresarán de cambio?

____

7. La calcomanía que compró Juan mide 13.6 cm de largo y 7.45 cm de ancho.

   ¿Cuánto mide su perímetro? ____________ ¿Cuánto mide su área? ____________

8. De la siguiente lista de números, tacha los que son primos: 3, 9, 18, 19, 25, 39

9. ¿De qué otra forma es posible representar la fracción $\frac{3}{4}$? ____________

10. Al desarrollar la expresión $5 + 3 \times 4$, Juan obtuvo como resultado 32; Pedro por su parte 17. ¿Quién está en lo correcto? Explica por qué.

____

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 8 a 10 respuestas considera tu resultado como **Bien**, de 6 a 7 como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades. Refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: Sistemas de numeración, áreas, numeración posicional, operaciones aritméticas, números primos.

Aprende más

Representación de relaciones entre magnitudes

Las matemáticas rodean nuestra vida. Uno de los conceptos que más utilizamos es el de sentido del **número**, el cual describe, de manera abstracta, una cantidad determinada de objetos. Las necesidades numéricas de los primeros humanos se limitaban al conteo de elementos. Para ello usaban sus dedos o piedras o nudos en cuerdas, etcétera. Con el tiempo, estas manifestaciones y conocimientos del número se fueron estructurando a partir del uso de **numerales** para representar a los números, hasta llegar a establecer las bases para desarrollar sistemas numéricos que permitieron la expresión de cantidades finitas e infinitas más el desarrollo de las operaciones aritméticas.

Número: concepto que expresa la medida de una magnitud o cantidad en relación a una unidad.

Numerales: símbolo con el que se representa a un número.

Ángulo: es la unidad de medida que nos permite conocer la amplitud con la que dos rectas se interceptan entre sí.

Sistema de numeración posicional decimal

El sistema que usamos para representar cantidades se llama indo-arábigo o decimal, éste se originó en la India y su difusión estuvo a cargo de los árabes en toda Europa, de ahí viene el nombre de números arábigos.

Los símbolos que empleamos en nuestro sistema de numeración tienen como elemento geométrico de base el **ángulo**. La cantidad de ángulos que tienen los símbolos permitió asociarlos con cantidades específicas. Las siguientes figuras explican el origen de los símbolos que usamos para representar números actualmente:

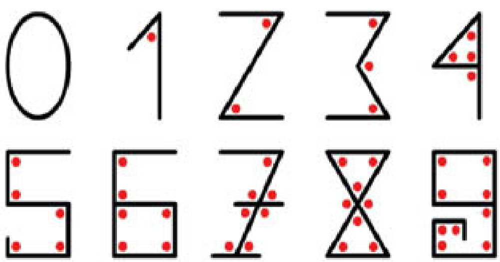


Figura 1.2. Origen de los símbolos numéricos.

Un *sistema de numeración posicional*, es un conjunto ordenado de símbolos, denominados dígitos, cuyas reglas permiten representar datos numéricos. La norma principal de los *sistemas de numeración*, es que un mismo símbolo tiene distinto valor según la posición que ocupe dentro de una cantidad.

El sistema decimal que manejamos se llama posicional ya que de acuerdo con la posición de un dígito es el valor que tiene. El primer número de derecha a izquierda indica las unidades, el siguiente número indica las decenas, el tercer número indica las centenas el cuarto número indica los millares

Ejemplo: La cantidad 1204 está conformada por tres números y cada uno representa un valor diferente, los valores se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1.

Millares	Centenas	Decenas	Unidades
1	2	0	4

Los sistemas de uso común en el diseño de sistemas digitales son: el decimal, el binario, el octal y el hexadecimal, estos son los sistemas de numeración más usados en la actualidad. El sistema que nosotros usamos para contar es de base 10, es decir, (10_{10}), y sus símbolos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Para expresar un número se debe colocar en una determinada posición, que denota la potencia de la base (X^n) y para entenderlo desarrollemos cantidades de nuestro sistema decimal.

Si los colocamos en una tabla de valores posicionales, de menor a mayor valor, que expresan potencias de 10 tendremos: 10^0 son unidades, 10^1 son decenas, 10^2 centenas, 10^3 unidades de millar, y así, sucesivamente.

Tabla 2.

...	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	...
...	100000	10000	1000	100	10	1	.	1/10	1/100	1/1000	1/10000	...
...	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades	Punto decimal	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diez milésimas	...

La tabla de valores posicionales es un arreglo de potencias positivas y negativas de la base.

Si representamos las potencias de 10 en fracción, con valores posicionales de mayor a menor, tendremos:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = \text{décimas},\ 10^{-2} = \frac{1}{100} = \text{centésimas},\ 10^{-3} = \frac{1}{1000}\ \text{milésimas, etc.}$$

Los sistemas numéricos posicionales tienen: base (X^n), dígitos y valor posicional. De acuerdo con lo anterior, un número como 28.735 se compone de:

Parte entera:

$$2\times10^1+8\times10^0=2\times10+8\times1$$

Parte fraccionaria:

$$7\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{100}+5\times\frac{1}{1000}$$

Es decir $28.735=2\times10+8\times1+\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{5}{1000}$, que se lee como:

2 decenas 8 unidades 7 décimas 3 centésimas y 5 milésimas.

Ejemplo 1: Expresa en notación desarrollada al número 320.25.

Solución:

$$320.25=3\times10^2+2\times10^1+0\times10^0+2\times10^{-1}+5\times10^{-2}$$

$$=3\times100+2\times10+0\times1+2\times\frac{1}{10}+5\times\frac{1}{100}$$

Es decir: $320.25=300+20+0+\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$

Que se lee como: 3 centenas 2 decenas 0 unidades 2 décimas y 5 centésimas o simplemente 3 centenas 2 decenas 2 décimas y 5 centésimas.

Ejemplo 2: Expresa en notación desarrollada al número 107.03.

Solución:

$$107.03=1\times10^2+0\times10^1+7\times10^0+0\times10^{-1}+3\times10^{-2}$$

$$=1\times100+0\times10+7\times1+0\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{100}$$

Es decir: $107.03=100+0+7+\frac{0}{10}+\frac{3}{100}$

Que se lee como: 1 centena 0 decenas 7 unidades 0 décimas y 3 centésimas o simplemente 1 centena 7 unidades y 3 centésimas.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, anotando en tu libreta los procedimientos que te permitan llegar a la respuestas y sean evidencia de la aplicación de reglas y conceptos estudiados.

1. ¿Por qué decimos que un sistema es posicional?

2. Si en un sistema numérico, el dígito más grande es 9, ¿cuál es la base?

3. El número 5555 está representado por un solo símbolo, pero ¿qué valor representa cada uno de los cinco?

4. Representa con notación desarrollada el número 345666.432

5. Convierte cada uno de los siguientes números escritos en notación desarrollada.

a) 327.45 en base 10 =

b) 678.120 en base 10 =

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Números positivos

Si colocamos al cero como un punto de una recta numérica, entonces los números positivos son los que quedan representados como puntos a la derecha del cero y los negativos se representan a la izquierda. Al conjunto de números positivos se les conoce como números naturales (N).

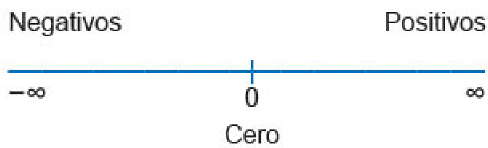


Figura 1.3. Recta numérica.

> Los *números naturales nos permiten contar los elementos de un conjunto*: dado un número natural, es posible saber cuál es su antecesor y cuál su sucesor.

Una forma de distinguir a los números positivos es anteponiéndoles el signo +, por ejemplo:

Positivo tres se puede escribir: +3 o simplemente 3

Positivo cinco sextos se puede escribir: $+\frac{5}{6}$ o simplemente $\frac{5}{6}$

Positivo tres enteros doce centésimos se puede escribir: +3.12 o simplemente 3.12

En este curso consideraremos al número uno (1) como primer número y, se llaman naturales debido a que surgieron de contar naturalmente por nuestros antepasados, así tenemos que el conjunto de los números naturales es:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$$

Si disponemos de dos o más números positivos podemos relacionarlos de modo que se produzca un tercero de esa relación. Las relaciones entre números se conocen como operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división, potencia, radicación, entre otras. Estas operaciones nos facilitan la solución de problemas que involucren cantidades.

Reglas de los signos para las operaciones aritméticas

Suma

a) Cantidades con signos iguales se suman y al resultado se le antepone el signo que tiene cada cantidad.

$$(+8) + (+5) = +13$$

$$(-8) + (-5) = -13$$

b) Cantidades con signo diferente se restan y al resultado se le antepone el signo de la cantidad con mayor valor absoluto.

$$(+8) + (-5) = +3$$

$$(-8) + (+5) = -3$$

Resta

El minuendo se suma con el inverso aditivo del sustraendo y al resultado se le antepone el signo de la cantidad con mayor valor absoluto.

$$(+8) - (-5) = (+8) + (+5) = +13$$

$$(-8) - (+5) = (-8) + (-5) = -13$$

Multiplicación y división

a) El producto o cociente de dos cantidades con signos iguales es positivo.

$$(+) \ \times/\div \ (+) = (+)$$

$$(-) \ \times/\div \ (-) = (+)$$

b) El producto o cociente de dos cantidades con signos diferentes es negativa.

$$(+) \ \times/\div \ (-) = (-)$$

$$(-) \ \times/\div \ (+) = (-)$$

Ejemplo 1: Restar

$$\underbrace{(+14-1)}_{\text{minuendo}} - \underbrace{(7-3)}_{\text{sustraendo}} = \underbrace{(+13)-(+4)=(+13)+(-4)}_{\text{El minuendo se suma con el inverso aditivo del sustraendo}} = +9$$

Ejemplo 2: Resolver

a) $(+3) \times (-4) = -12$ b) $(-12) \div (-4) = +3$

Factorización aritmética

Escribe el número 60 como la multiplicación de otros números. Anota todas las soluciones encontradas y compáralas. Escribe una conclusión al respecto.

....

....

....

Como pudiste analizar la solución anterior, existen muchas formas de escribir una cantidad como multiplicación de otras cantidades. Así, para el 60, tenemos las siguientes opciones:

$$60 = 6 \times 10,\ 60 = 2 \times 30,\ 60 = 4 \times 15,\ 60 = 2 \times 3 \times 10. \text{ Etcétera.}$$

Factorizar una cantidad significa escribirla como la multiplicación de otras cantidades, diferentes de ella, de modo que ninguna de estas cantidades se pueda factorizar más. Las cantidades que participan de una multiplicación se denominan factores y las cantidades que solo pueden expresarse como el producto de ellas por la unidad se denominan números primos, por lo que factorizar una cantidad es expresarla como el producto de sus factores primos.

El conjunto de números primos inicia con el 2. La cuestión que provoca revuelo es ¿por qué el 1 no es considerado número primo? El 2 se puede escribir como 2×1, el 3 como 3×1, el 5 como 5×1, de modo que nos damos cuenta que los números primos tienen dos factores, lo que no ocurre con el 1, motivo por el que se excluye de este conjunto. Los números mayores que 1 que no son primos se denominan números compuestos.

Ejemplo: La factorización completa de 60 es: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, abreviando la multiplicación de 2 por 2 con una potencia, tenemos: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. 60 es un número compuesto porque se expresa como producto de más de dos factores.

Del ejemplo anterior, podemos decir que factorizar un número *n* consiste en expresarlo como el producto de números primos. Si esto solo es posible usando a *n* y a 1, se dice que *n* es número primo.

Para factorizar números, utilizamos el proceso siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

del cual podemos escribir $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Máximo común divisor aritmético (m.c.d.)

De un conjunto de números enteros, el máximo común divisor aritmético es el producto de todos los divisores comunes a todos los números de ese conjunto.

De este modo, para el conjunto A = {48, 60, 72, 90} buscamos el mayor divisor de todos los números en A.

Podemos darnos cuenta que todos los números son pares, de modo que un divisor común es 2, pero hay divisores mayores que 2, como 4. Por tanto, 2 no puede ser considerado el máximo común divisor. Buscar divisores comunes a todos los números en A que sean mayores que 4 puede resultar difícil de este modo. Existe un método para encontrar el máximo común divisor aritmético basado en la factorización de un número, que utilizaste en cursos anteriores de Matemáticas y que ahora recordamos con los siguientes ejemplos:

Se desea conocer el mcd para los números 6, 12 y 24:

$$\begin{array}{rrr|l} 6 & 12 & 18 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \end{array} \qquad \text{mcd } (6, 12, 18) = 2 \times 3 = 6$$

El mcd para los números 48, 80 y 96 es:

$$\begin{array}{rrr|l} 48 & 80 & 96 & 2 \\ 24 & 40 & 48 & 2 \\ 12 & 20 & 24 & 2 \\ 6 & 10 & 12 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & \end{array} \qquad \text{mcd } (48, 80, 96) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

El mcd para los números 84, 126 y 154 es:

$$\begin{array}{rrr|l} 84 & 126 & 154 & 2 \\ 42 & 63 & 77 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & \end{array} \qquad \text{m.c.d. } (84, 126, 154) = 2 \times 7 = 14$$

Siguiendo los procedimientos anteriores, si:

1. 18 y 24 son divisibles por 2, por 3 y por 6. ¿Hay algún número mayor que 6 que dividida a 18 y 24? No, entonces 6 es el m.c.d. de 18 y 24.

2. 60, 100 y 120 son divisibles por 2, 4, 5, 10 y 20. No hay ningún número mayor que 20 que los divida a los tres. Entonces 20 es el m.c.d . de 60, 100 y 120.

Mínimo común múltiplo aritmético (m.c.m.)

Se descomponen los números en sus factores primos y el m.c.m. se forma con el producto de sus factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente.

Se desea conocer el m.c.m. de 50, 80, 120 y 300.

Se factoriza cada número:

$$50 = 2 \times 5^2$$

$$80 = 2^4 \times 5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

El m.c.m. estará formado por el factor 2 elevado a su mayor exponente que es 4, multiplicado por el factor primo 5 elevado a su mayor exponente que es 2, multiplicado por el factor primo 3, elevado a su mayor exponente que es 1. Luego el m.c.m. (50, 80, 120, 300) = $2^4 \times 5^2 \times 3 = 1200$, este concepto también se conoce como común denominador para las operaciones con los números racionales (fracciones).

Por ejemplo, si tenemos las fracciones:

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{5}{12}$$

Podemos hacerlas homogéneas haciendo que ambas tengan el mismo denominador: 12 en este caso. Este denominador común es el mínimo común múltiplo de 4 y de 12. Para obtener el m.c.m de números basta con factorizarlos simultáneamente hasta obtener 1 en cada denominador como se ilustra en el siguiente proceso:

$$\begin{array}{r|l} 4 - 12 & 2 \\ 2 - 6 & 2 \\ 1 - 3 & 3 \\ 1 - 1 & \end{array} \qquad (2)(2)(3) = 12$$

Así, la primera fracción $\frac{3}{4}$ se puede escribir con denominador 12 si multiplicamos por 3 su numerador y denominador: $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$

Este factor se obtuvo dividiendo el m.c.m. = 12 entre el denominador 4 dando como resultado 3.

Aplicando este proceso para calcular m.c.m. (4, 12), tenemos que:

$$4 = 2^2 \text{ y } 12 = 2^2 \cdot 3, \text{ por lo que m.c.m. } (4, 12) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

Dado que el m.c.m. se calcula para obtener el denominador que hace homogéneas todas las fracciones de una suma o resta, también se conoce como *común denominador*. Para sumar o restar fracciones heterogéneas se emplea el proceso indicado por la siguiente expresión:

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n} \pm \ldots = \frac{f_1 \cdot a \pm f_2 \cdot b \pm \ldots}{M}, \text{ donde } M = mcm\ (m, n, \ldots) \text{ y } f_1 = \frac{M}{m},\ f_2 = \frac{M}{n}, \ldots$$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Resuelve las siguientes tablas. Registra y reflexiona tus respuestas respecto a los signos, para que después en plenaria las comentes con tus compañeros de clase.

1. Actividad para el desarrollo de habilidades, la suma aritmética:

Tabla 3.

+	−1	2	−3	4	−5
5	5 + (−1) = +4				
−8					
4					
−11					
6					
−9					
−12					

2. Actividad para el desarrollo de habilidades, la resta aritmética:

Tabla 4.

−	−1	2	−3	4	−5
7		7 − (+2) = 7 + (−2) = +5			
−12					
4					
−9			(−9) − (−3) = (−9) + (+3) = −6		
−14					
2					
−1					

3. Actividad para el desarrollo de habilidades de la multiplicación:

Tabla 5.

×	−1	2	−3	4	−5
5	$5 \times (-1) = -5$				
−8			$(-8) \times (-3) = +24$		
4					
−11					
6					

4. Actividad para el desarrollo de habilidades de la división:

Tabla 6.

÷	−1	2	−7	8	−9
5	$5 \div (-1) = -5$				
−8					
4					
−11					
6					
−9					
−12					

5. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes arreglos de cantidades:

a) 18, 24, 40

b) 5, 7, 10, 14
c) 2, 3, 6, 12, 50
d) 14, 38, 56, 114
e) 14, 28, 30, 120
f) 24, 48, 56, 168

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Qué criterios utilizarías para identificar a los números compuestos? ¿Cuántos números primos menores que 100 existen? ¿Por qué razón el número 1 no es primo? Escribe de manera concreta tu solucion:

Aprende más

Números racionales

No todos los números positivos que procesamos son enteros: el precio de un producto, el promedio de las calificaciones de un alumno que termina la secundaria son ejemplos que muestran cantidades de naturaleza no entera.

Con el propósito de resolver algunas situaciones en las que existe la necesidad de expresar resultados no enteros, la numeración (N = números naturales) se extendió hacia los números racionales (Q^+).

En diferentes contextos, los números racionales se expresan en forma de cociente:

$$\frac{a}{b}$$

En donde *a* es el numerador o dividendo y *b* es el denominador o divisor, con la condición de que *b* sea diferente de cero. A esta forma de representar a los números racionales se le conoce como fracción común.

Una fracción de la forma $\frac{a}{b}$ es:

Propia, cuando $a < b$ (*a* menor que *b*); *impropia* cuando $a > b$ (*a* mayor que *b*) o *aparente* cuando *a* es divisible entre *b*.

Algunas veces las fracciones impropias se expresan como números mixtos o viceversa, es decir:

$$a\frac{b}{c} = \frac{(a \times c) + b}{c}$$

$$\text{Ejemplo: } 2\frac{3}{4} = \frac{(2 \times 4) + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

Los números racionales están incluidos en los *números reales*, que son todos aquellos que se pueden representar como puntos en la recta numérica, de modo que, si la recta numérica está conformada por un número infinito de puntos, entonces el conjunto de números reales también es infinito. Los números positivos, negativos, enteros y decimales son ejemplos de números reales.

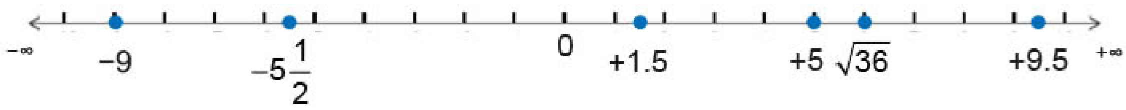


Figura 1.4.

Los números que para expresarse requieren de una parte entera y otra fraccionaria se denominan números fraccionarios y si la base empleada como base es el número diez, se denominan números decimales.

Los números en una recta numérica están ordenados. De dos números representados gráficamente, es mayor el que está situado más a la derecha, y menor el situado más a la izquierda.

Ejemplo: $5 > 3 \rightarrow 5$ es mayor que 3
$-10 < -7 \rightarrow -10$ es menor que -7

Figura 1.5.

Criterios para ordenar los números en la recta numérica

- Todo número negativo es menor que cero, $-7 < 0$
- Todo número positivo es mayor que cero, $7 > 0$
- De dos enteros negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto, $-7 > -10$; $|-7| > |-10|$

Números decimales

Estos surgen por diversas razones, por ejemplo, si usamos una unidad de medida como el metro, encontraremos objetos cuya longitud no sea un múltiplo exacto de este modelo de unidad y tendremos que usar fracciones del metro para expresar la medida más precisa de la longitud de este objeto: los decímetros, centímetros, milímetros, etc. Tu estatura es un buen ejemplo; los números decimales pueden interpretarse de tres maneras diferentes:

Como división

La expresión decimal de un número racional se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador. Pueden obtenerse dos tipos de cocientes: uno con un número finito de cifras (número decimal) y otro con un número infinito (fracción infinita o periódica).

Ejemplo de número decimal con cociente finito: Juan compro en la tienda 3 kilos de arroz, si tiene que dividirlo entre su mamá y su hermana podrá darles un 1 kilo a cada una y lo que sobra dividirlo en dos partes iguales y dar una parte a su mamá y otra a su hermana, quedándole a cada quien $1\frac{1}{2}$ ó 1.5 kilos de arroz.

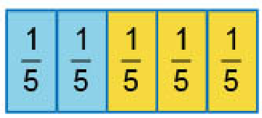
Ejemplo de fracción infinita o periódica:

$$\frac{5}{33} = 0.151515\ldots \quad \text{ó} \quad \begin{array}{r} 0.151515 \\ 33\overline{)5.000000} \\ 170 \\ 050 \\ 150 \\ 05\ldots \end{array}$$

Como fracciones comunes

Las partes iguales en que dividimos un entero se denominan fracciones $\left(\frac{a}{b}\right)$ y se aprovechan para expresar cuántas partes (a) se están tomando de un entero dividido (en b partes). Por ejemplo, $\frac{2}{5}$ equivale a tomar dos partes de un entero dividido en cinco partes iguales.

Gráficamente:



Una forma usual de utilizar las fracciones comunes en diversos cálculos es el *tanto por ciento* (%) todos los días, por ejemplo: los intereses que generan los créditos bancarios, el porcentaje de mujeres en un salón, el precio de oferta de un artículo con descuento en un centro comercial, etc.

El % nos indica el número que se toma de un entero dividido en cien partes. Por ejemplo:

- 30% representa $\frac{30}{100}$

- 3.2% representa:

$$\frac{3.2}{100}=\underbrace{\frac{32}{1000}}_{\text{Fracción común}}=\underbrace{0.032}_{\text{Número decimal}}$$

- 0.42% representa :

$$\frac{0.42}{100}=\frac{42}{10000}=0.0042$$

Aunque más adelante estudiaremos los porcentajes, mostramos en este espacio algunos ejemplos de su uso.

Ejemplo 1: Calcula el descuento de un perfume en una tienda sabiendo que su precio normal es de 350 pesos y la etiqueta de oferta indica un descuento de 25%. ¿Cuál es el precio de oferta?

Solución:

Descuento = 25% del precio normal = $\frac{25}{100}\times 350 = 0.25\times 350 = 87.50$ *pesos*

Precio de oferta = Precio normal − Descuento = 350 − 87.50 = 262.50 pesos

Respuesta: el descuento será de 87.50 pesos (87 pesos y 50 centavos) y el precio de oferta del perfume es de 262.50 pesos (262 pesos con 50 centavos).

Ejemplo 2: Si se solicita un préstamo de 2500 pesos por un plazo de un mes con un interés mensual del 5%, ¿Cuánto se tendrá que pagar al final del mes?

Solución:

Interés = 5% del monto del préstamo = $\frac{5}{100}\times 2500 = 0.05\times 2500 = 125$ *pesos*

Total a pagar al final del mes: 2500 + 125 = 2625 pesos.

Como razón geométrica

La razón geométrica es el número que resulta de comparar por cociente dos magnitudes de la misma especie.

Ejemplo 1: Si las edades de un joven y de su padre son 14 y 42 años respectivamente; en el orden dado es $\frac{14}{42}$ que al simplificarse resulta $\frac{1}{3}$. Esto significa que el hijo tiene la tercera parte de la edad del padre.

Ejemplo 2: En el teatro del pueblo las localidades de luneta cuestan \$100, en tanto que las de galería cuestan \$80. Si hacemos una comparación por cociente (razón geométrica), tenemos que:

La localidad de luneta representa $\frac{100}{80}$, implificando: $\frac{5}{4} = 1.25 \Rightarrow 125\%$ del costo de la de galería. La localidad de galería representa $\frac{80}{100}$, simplificando: $\frac{4}{5} = 0.8 \Rightarrow 80\%$ del costo de la de luneta. El orden en que se comparan las cantidades es importante.

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

1. Forma equipo con tus compañeros y, redacten 5 ejemplos de datos de tu vida cotidiana o de su entorno en los que identifiquen números enteros, fraccionarios, positivos y negativos. Después, expliquen la forma de usarlos de modo que las operaciones con ellos produzcan nuevos datos. Por último, elijan a uno de los integrantes del equipo para exponer sus ejemplos y conclusiones ante el grupo.

   Instrumento de evaluación: Esta actividad será evaluada por el profesor mediante un registro de la participación en la actividad de los alumnos del grupo en su lista de control.

2. Identifica cada una de las siguientes fracciones, anotando dentro del paréntesis (p) si es propia; (i) si es impropia y (a) si es aparente.

a) $\frac{2}{4}$ ( )   b) $\frac{1}{3}$ ( )   c) $\frac{10}{5}$ ( )   d) $\frac{6}{3}$ ( )   e) $\frac{2}{2}$ ( )

f) $\frac{7}{21}$ ( )   g) $\frac{3}{3}$ ( )   h) $\frac{9}{6}$ ( )   i) $\frac{7}{1}$ ( )   j) $\frac{6}{7}$ ( )

3. Contesta las preguntas y escribe 3 ejemplos al respecto.

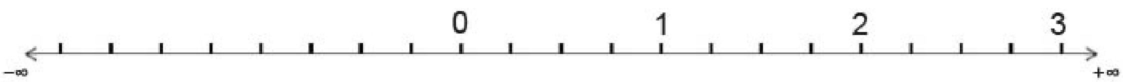
a) ¿Se puede expresar cualquier número natural como el cociente de dos números enteros? ________, por ejemplo: ________________________________.

b) ¿Los números naturales se pueden considerar un subgrupo de los racionales? ________, por ejemplo: ________________________________.

4. Al analizar las fracciones comunes se puede observar que el denominador nos indica en ________________________ y el numerador nos indica ________________________________.

5. Ubica en la recta numérica las siguientes fracciones comunes.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{18}{6}$



Utiliza el espacio bajo la recta para indicar la posición de cada fracción. →

6. Investiga:

a) ¿Cómo se representa una fracción periódica?
b) ¿Cuál es el procedimiento que se utiliza para convertir una fracción periódica en una fracción común?

7. En una tienda departamental se encuentra el departamento de música con un 30% de descuento. Si un disco en particular cuesta 250 pesos, ¿cuál es su precio de oferta?

8. Escribe la razón en cada caso. Simplifica

a) Un auto con 8 litros de gasolina recorre 112 km.
b) Una llave gotea 100 cm^3 en 5 horas.
c) Un autobús recorre en 60 minutos los 80 km que separan dos poblados.

9. En un torneo de futbol, Omar anotó el 30% de goles de su equipo. Si en total obtuvieron 36 goles, ¿cuántos fueron de este jugador?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Propiedades de los números reales

Cuando realizamos operaciones con los números reales, debemos tener claro que sólo podemos realizar una operación a la vez, de modo que es necesario saber cuál es el orden y qué propiedad correcta se aplica; para realizar todas las operaciones que aparezcan en una misma expresión. Estas propiedades para los números reales positivos son:

Propiedad conmutativa. La palabra viene del verbo conmutar que significa cambiar, en este caso, se refiere a cambiar de lugar. Esta ley dice que se puede cambiar el orden de los números en una suma o multiplicación y obtener la misma respuesta, es decir que $a + b = b + a$ y que $a \cdot b = b \cdot a$.

Ejemplo: $3 + 5 = 5 + 3$ y $(3)(5) = (5)(3)$

Propiedad asociativa. La palabra viene del verbo asociar, que significa juntar o agrupar, no importa de qué manera se junten o agrupen, la respuesta siempre será la misma. La expresión general de ésta propiedad es:

Suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$ Multiplicación: $(ab)c = a(bc)$

De este modo, $(5 + 7) + 3$ es lo mismo que $5 + (7 + 3)$ porque ambas expresiones dan como resultado 15.

$$(5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15 \text{ y } 5 + (7 + 3) = 5 + 10 = 15$$

Asimismo, $3 \cdot (4 \cdot 5)$ es lo mismo que $(3 \cdot 4) \cdot 5$ cuyo resultado es 60.

$$3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 20 = 60 \text{ y } (3 \cdot 4) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60.$$

Esta propiedad sólo se puede aplicar en sumas y multiplicaciones, nunca en restas y divisiones; porque $(2 - 4) - 5$ no es igual a $2 - (4 - 5)$ ó bien $(3 \div 5) \div 6$ no es igual a $3 \div (5 \div 6)$.

Propiedad distributiva. Esta palabra se deriva del verbo distribuir, que significa repartir, esta propiedad dice que si están multiplicando un número por la suma de dos o más números puedes multiplicar el primer número por cada uno de los otros y luego sumar para obtener la respuesta, se distribuye el producto en la suma. La expresión general de esta propiedad es $a(b + c) = ab + ac$.

Ejemplo: $5(4 + 3) = 5(4) + 5(3) = 20 + 15 = 35$

Números neutros. Dentro de las matemáticas existen 5 números que son muy importantes, en este bloque únicamente analizaremos, el cero (0) y el uno (1), ¿por qué son especiales estos números? Porque son neutrales ante algunas operaciones, al operar con ellas, no las cambian. El cero es el elemento neutro para la suma y la resta, el número uno es neutral ante la multiplicación y la división. Esta propiedad generalizada se define como:

$$\left.\begin{matrix} a+0=a \\ a-0=a \end{matrix}\right\}\text{suma y resta} \qquad \left.\begin{matrix} a\times 1=a \\ a\div 1=a \end{matrix}\right\}\text{multiplicación y división}$$

Inverso y los recíprocos. En la recta numérica se puede observar que, indicando al cero como origen existen en uno y otro lado, cantidades numéricas que están a la misma distancia pero, con signo contrario, a estas cantidades se les llama *inversos aditivos* y sumados siempre dan como resultado cero.

¿Qué número multiplicado por $\frac{1}{2}$ es igual a 1? Expresando en símbolos la pregunta se define por $(x)\left(\frac{1}{2}\right)=1$, el número buscado en la expresión se llama inverso multiplicativo o recíproco. A continuación se resaltan algunos casos.

1. Si la cantidad es fraccionaria, el recíproco también es una fracción, donde el numerador de una es el denominador de otra y viceversa, no importa si es positivo o negativo.

   Ejemplo: El inverso multiplicativo de $\frac{3}{7}$ es $\frac{7}{3}$; porque el producto de estos valores es igual a $\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{7}{3}\right)=1$.

2. El recíproco de un número entero, se escribe la unidad como numerador.

   Ejemplo: el inverso multiplicativo de 45 es $\frac{1}{45}$, porque $(45)\left(\frac{1}{45}\right)=1$.

> Una *igualdad* (=) es una relación de equivalencia entre dos expresiones numéricas o algebraicas que se cumple para alguno o todos los valores. Cada una de las expresiones recibe el nombre de miembro. Ejemplo de una igualdad aritmética:
>
> Primer miembro = segundo miembro
>
> 7+ 3 + 6 = 16 (se cumple por el algoritmo aritmético)

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones (1): Analiza las siguientes expresiones y escribe en el espacio correspondiente la(s) propiedad(es) que se aplica(n) en ellas.

Expresión	Propiedades que se aplican
1. $(3x + 2y) + 5z = 3x + (2y + 5z)$	

2. $4x - 5y = -5y + 4x$	
3. $\frac{2}{3} \times (5x) + \frac{2}{3} \times (6x) = (5x + 6x) \times \frac{2}{3}$	
4. $4(36) - 3(36) = (36)(4 - 3)$	
5. $6m + 15n = 15n + 6m$	
6. $2b\,(7a + 8c + 9d) = 14ab + 16bc + 18bd$	
7. $9 + 6 = 6 + 9$	
8. $6n \times 4n \times 7n = 4n \times 7n \times 6n$	
9. $a(b + c) = ab + ac$	
10. $y(x + z + w + t) = yx + yz + yw + yt$	

Instrucciones (2): Realiza las siguientes operaciones en tu cuaderno y analiza cada caso del elemento neutro, si la expresión es correcta escribe a continuación en el paréntesis la letra "V" (verdadero) y si es incorrecta coloca "F" (falso) y escribe la respuesta de manera correcta:

Expresión	V o F	Expresión correcta
1. $(3 + 1) \times 0 = 0$	( )	
2. $(4 \times 1) + 0 = 4$	( )	

3. $\left(\frac{1}{3}+5\right)\times 1=\left(\frac{1}{3}\times 1\right)+(5\times 1)$	( )	
4. $\left(\sqrt{\frac{3}{5}+\frac{5}{3}}\right)\times 1=\left(\sqrt{\frac{3}{5}+\frac{5}{3}}\right)$	( )	
5. $(3\times 1)+5=3+5$	( )	

Instrucciones (3): Escribe cuál es el inverso aditivo de las siguientes expresiones.

Expresión	Inverso aditivo
1. $-3x$	
2. $\frac{3}{4}ab$	
3. $\frac{m+n}{p-r}$	
4. $\left(\frac{3}{4}m+\frac{2}{5}n\right)$	
5. mx^2+nz+b	

Instrucciones (4): De las siguientes operaciones analizar cada caso del inverso multiplicativo, califícalas de falso o verdadero. Si la expresión es incorrecta, escribe la respuesta de manera correcta:

Expresión	V o F	Expresión correcta
1. $\left(\frac{m}{n}\right)\left(-\frac{n}{m}\right)=1$	( )	

2. $\left(+\frac{2}{1}\right)(2)=1$	( )	
3. $\left(\frac{m+n}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{m+n}\right)=1$	( )	

Instrucciones (5): Escribe el inverso multiplicativo de cada cantidad.

Expresión	Inverso multiplicativo
1. $-2ab$	
2. $\frac{4x}{3y}$	
3. $\frac{m+n}{3-m}$	

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Jerarquización de operaciones

Al efectuar operaciones con dos o más operaciones distintas es indispensable saber en qué orden se deben realizar, esto significa que hay operaciones con distinta jerarquía y propiedades para poder realizar estas operaciones.

Cuando realizamos operaciones con los números debemos tener claro que solo podemos realizar una operación a la vez, de modo que es necesario saber cuál es el orden correcto para realizar todas las operaciones que aparezcan en una misma expresión. Este orden se denomina *jerarquía de las operaciones* o *regla de prioridad*. Esta regla o jerarquía establece un orden de importancia para ejecutar las operaciones.

La regla o jerarquía indica que:

> *Primero.* Se deben realizar las operaciones que aparezcan encerradas entre símbolos de agrupamiento como paréntesis (), llaves { } o corchetes [ ]. Si dentro de un agrupamiento hay otro, se debe evaluar el agrupamiento más interno.
>
> *Segundo.* Si no hay operaciones agrupadas, se realizarán todas las potencias o raíces en la expresión.
>
> *Tercero.* Si no hay operaciones agrupadas, ni potencias o raíces, se evaluarán todas las multiplicaciones o divisiones de la expresión.
>
> *Cuarto.* Las últimas operaciones que se deben evaluar, a falta de las anteriores, son las sumas o restas que haya en la expresión.

Ejemplo: Se desea evaluar la expresión: $5+2^3+3(5-3)-1$.

Evaluar una expresión significa "hallar el valor" que produce. De modo que, aplicando la regla de prioridad tenemos: $5+2^3+3\underbrace{(5-3)}_{1}-1$ porque es operación agrupada, después $5+\underbrace{2^3}_{2}+3(2)-1$ porque la potencia tiene la mayor importancia cuando no hay operaciones agrupadas. Nota que los paréntesis no encierran una operación, sino un número: el 2, para indicar que éste debe multiplicarse por el tres que le

precede. Enseguida $5+8+\underbrace{3(2)}_{3}-1$, porque la multiplicación es de mayor prioridad

que la suma o la resta. Se obtiene como resultado, hasta este momento, la expresión: $5+8+6-1$. En esta expresión quedan únicamente sumas y restas. Todas ellas son de la misma jerarquía o importancia. ¿Cuál de ellas debe realizarse primero?

Para resolver este dilema se aplica una regla denominada *regla de asociatividad*, que expresa que cuando en una expresión existan varias operaciones del mismo nivel de importancia éstas deberán evaluarse en el orden de aparición en la expresión, es decir, se irán evaluando de izquierda a derecha, como se ilustra en la continuación del ejemplo:

$$\underbrace{5+8}_{4}+6-1$$

Luego $13+6-1=\underbrace{13+6}_{5}-1=\underbrace{19-1}_{6}=18$

Usando una calculadora científica para comprobar se tiene el siguiente proceso:

$$5\,\boxed{+}\,2\,\boxed{\wedge}\,3+3\,\boxed{(}\,5\,\boxed{-}\,3\,\boxed{)}\,\boxed{-}\,1\,\boxed{=}$$

Se mostrará en la pantalla: $\boxed{18}$

Nota: Las teclas pueden variar de un modelo y marca de calculadora a otro. Algunas veces puede no ser evidente el orden de las operaciones en una expresión.

Ejemplo 1: Evaluar la expresión $10-2^2+\dfrac{15-3^2}{5+1}+(4-1)(3+2)$

Utilizar las reglas de prioridad y asociatividad correctamente. Escribir el proceso completo para llegar al resultado.

Solución:

$$=10-2^2+\underbrace{\left(15-\underbrace{3^2}_{\text{1: por prioridad}}\right)}_{\text{operación agrupada}}\div\underbrace{(5+1)}_{\text{2: op. agrupada}}+\underbrace{(4-1)}_{\text{3: op. agrupada}}\underbrace{(3+2)}_{\text{4: op. agrupada}}$$

Continúa...

$$=10-2^2+\underbrace{(15-9)}_{5:\ op.\ agrupada}\div 6+(3)(5)=10-\underbrace{2^2}_{6:\ prioridad}+6\div 6+(3)(5)$$

$$=10-4+\underbrace{6\div 6}_{7:asociatividad}+(3)(5)=10-4+1+\underbrace{(3)(5)}_{8:\ prioridad}=\underbrace{10-4}_{9:\ asociatividad}+1+15$$

$$=\underbrace{6+1}_{10:\ asociatividad}+15=\underbrace{7+15}_{11}=22$$

Comprobación con calculadora:

$10 \boxed{-} 2 \boxed{\wedge} 2 \boxed{+} \boxed{(} 15 \boxed{-} 3 \boxed{\wedge} 2 \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{(} 5 \boxed{+} 1 \boxed{)} \boxed{+} \boxed{(} 4 \boxed{-} 1 \boxed{)} \boxed{(} 3 \boxed{+} 2 \boxed{)} \boxed{=}$

Se mostrará en la pantalla: $\boxed{22}$

Nota: Las teclas pueden variar de un modelo y marca de calculadora a otro.

Ejemplo 2: Evaluar la expresión $\dfrac{7^2-5(7)}{2^3+6}+\sqrt{16}-1$

Utilizar las reglas de prioridad y asociatividad correctamente. Debes escribir el proceso completo para llegar al resultado.

Solución:

$$\frac{7^2-5(7)}{2^3+6}+\sqrt{16}-1=\left[\underbrace{7^2}_{1}-\underbrace{5(7)}_{2}\right]\div\left(\underbrace{2^3}_{3}+6\right)+\sqrt{16}-1=\left(\underbrace{49-35}_{4}\right)\div\left(\underbrace{8+6}_{5}\right)+\sqrt{16}-1$$

$$=14\div 14+\underbrace{\sqrt{16}}_{6}-1=\underbrace{14\div 14}_{7}+4-1=\underbrace{1+4}_{8}-1=\underbrace{5-1}_{9}=4$$

Comprobación con calculadora:

$\boxed{(} 7 \boxed{\wedge} 2 \boxed{-} 5 \boxed{\times} 7 \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{(} 2 \boxed{\wedge} 3 \boxed{+} 6 \boxed{)} \boxed{+} \boxed{\sqrt{\ }} 16 \boxed{-} 1 \boxed{=}$

Se mostrará en la pantalla: $\boxed{4}$

Nota: Las teclas pueden variar de un modelo y marca de calculadora a otro.

Aplica lo aprendido

Actividad 5

Instrucciones: Reúnete en binas y resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

1. Resuelve los siguientes ejercicios, desarrollando procedimientos completos en tu libreta, que evidencien el uso de las reglas de prioridad y asociatividad, así como el uso de operadores relacionales adecuadamente. Emplea la calculadora para estimar la solución numérica para verificar los resultados obtenidos.

   a) $7-\sqrt{25}+\dfrac{1+\sqrt{9}}{2}+4^2-\left(\sqrt{36}-4\right)\left(\sqrt{9}-1\right)$

   b) $\dfrac{82.75}{5}+4.3(9.1-6.9)$

   c) $30\div 15\div 3+7\left(\sqrt{64}-6\right)^2+\dfrac{1}{2}$

2. Con calculadora evalúa la expresión $(2.8)^{2.8}+\sqrt{5.7}-\dfrac{3+4.5^2}{2}$

3. Coloca el símbolo ">", "<" o "=" según corresponda.

   a) $\dfrac{17}{5}$ .... $\sqrt{12}$

   b) 3.5^3 .... $\dfrac{214}{5}$

   c) $\dfrac{4+\sqrt{9}}{3}+6-2^2+\left(4+\sqrt{1}\right)\left(4-\sqrt{1}\right)$ .... $\dfrac{58}{3}$

   d) $\underbrace{3+3+\ldots+3}_{\text{50 veces}}$ .... $3(50)$

Sabías que...

Dos fracciones son equivalentes si sus productos cruzados son iguales:

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, si $a\times d=b\times c$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Modelos aritméticos y algebraicos

El hombre tratando de explicar fenómenos de la naturaleza, como la forma, medida y diámetro de la tierra, la velocidad del aire, la temperatura de un cuerpo, la fuerza del agua, la epidemia que ocasiona una enfermedad mortal, la simulación de eventos físicos y químicos por mencionar algunos, ha diseñado expresiones matemáticas que han servido como base para modelar dichos fenómenos, a través de la simplificación de cálculos que deben realizarse frecuentemente a los que denominamos fórmulas.

Una fórmula es una expresión matemática que contiene operaciones entre varias cantidades que describe un cálculo específico para resolver un problema. Existen fórmulas matemáticas para resolver problemas diversos. En una fórmula matemática encontramos símbolos, letras y números que representan cantidades numéricas y operaciones que lleven al resultado buscado, las letras se llaman variables y los números constantes.

El álgebra es la rama de la matemática que considera el uso de símbolos, como las letras y números, para representar cantidades y realizar operaciones con ellas. Por esto las variables se denominan “variables algebraicas”.

Por ejemplo, para determinar la temperatura Celsius de una habitación conociendo su temperatura Fahrenheit usamos la fórmula:

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ (Donde usamos letras, en lugar de palabras)

Si la temperatura Celsius es de 25 ºC, aproximadamente, sabrías que el clima en esa ciudad es agradable.

Pero la fórmula te permite descubrir la realidad del clima de esa ciudad:

$$C = \tfrac{5}{9}(25 - 32) = \tfrac{5}{9}(-7) = -\frac{35}{9}$$

Que es aproximadamente de −4 ºC . Si el punto de congelación del agua es 0 ºC, entonces en esa ciudad hace mucho frío porque su temperatura está por debajo de la temperatura de congelación del agua. Por cierto, el congelador de un refrigerador común tiene esta temperatura aproximadamente todo el tiempo.


Figura 1.6. El punto de congelación del agua es 0°.

Pasado algún tiempo, otra noticia anuncia que la temperatura en una ciudad de Asia tiene una temperatura de 40 ºF. El problema es el mismo, la temperatura es diferente. La fórmula que resuelve el problema es la misma, lo que cambia es el valor de las variables. Esto ocurre todo el tiempo.

Calcular el valor numérico de una expresión algebraica

Las reglas de prioridad (jerarquía de las operaciones) y de asociatividad nos facilitan evaluar expresiones aritméticas. Estas reglas son la base para calcular el valor de expresiones algebraicas o fórmulas.

Si queremos evaluar una fórmula es necesario disponer de los datos numéricos que serán usados para dar valor a las variables de esa fórmula. Estos datos generalmente son expresados en los enunciados de los problemas, o bien, pueden ser obtenidos mediante procesos de conteo o medición. Una vez que contamos con los datos numéricos se realiza la sustitución de ellos en la fórmula para continuar con la ejecución de operaciones sin olvidar aplicar las reglas de prioridad y asociatividad que lleven a la obtención del resultado buscado.


Figura 1.7. Diseñar circuitos eléctricos requiere de cálculos algebraicos.

Se muestran a continuación ejemplos de la aplicación del procedimiento de evaluación de fórmulas.

Ejemplo 1: Evalúa la expresión algebraica $E = mc^2$ para los valores $m = 5$ y $c = 2$.

Solución:

Continúa...

$E = mc^2$

Sustitución de $m = 5$ y $c = 2$:

$E = 5(2)^2$

Evaluación, aplicando reglas de prioridad y asociatividad:

$$E = 5\underbrace{(2)^2}_{1} = \underbrace{5(4)}_{2} = 20$$

Respuesta: El valor de la expresión dada para los datos proporcionados es 20.

Ejemplo 2: Evalúa la expresión $x^2 + 5x + 6$ para $x = 2$

Solución:

$x^2 + 5x + 6$

Sustitución de $x = 2$

$$\underbrace{(2)^2}_{1} + 5(2) + 6 = 4 + \underbrace{5(2)}_{2} + 6 = \underbrace{4 + 10}_{3} + 6 = \underbrace{14 + 6}_{4} = 20$$

Ejemplo 3: Encuentra el valor numérico de la expresión $\dfrac{2x+y}{3} + x - y^2$ para $x = 7$ y $y = 1$

Solución:

$$\frac{2x+y}{3} + x - y^2 = \frac{2(7)+1}{3} + 7 - (1)^2 = \left[\underbrace{2(7)}_{1} + 1\right] \div 3 + 7 - (1)^2 = \underbrace{[14+1]}_{2} \div 3 + 7 - (1)^2$$

$$= 15 \div 3 + 7 - \underbrace{(1)^2}_{3} = \underbrace{15 \div 3}_{4} + 7 - 1 = \underbrace{5 + 7}_{5} - 1 = \underbrace{12 - 1}_{6} = 11$$

Ejemplo 4: Calcula el volumen de una lata cilíndrica con base circular de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura.

Solución:

Fórmula: $V = \pi r^2 h$

Dado que el radio es la mitad del diámetro, entonces $r = \frac{6\ cm}{2} = 3\ cm$*, así:*

Sustitución: $V = \pi(3\ cm)^2(8\ cm)$

Evaluación de la fórmula: $V = \pi\underbrace{(3\ cm)^2}_{1}(8\ cm) = \underbrace{3.1416(9\ cm^2)}_{2}(8\ cm)$

$$V = \underbrace{(28.2744\ cm^2)(8\ cm)}_{4} = 226.1952\ cm^3$$

Respuesta: El volumen de la lata es de 226.20 cm^3 *aproximadamente.*

Sabías que...

Pi (π) representa las veces que el diámetro de la circunferencia cabe en su contorno o perímetro.

El número racional permite expresar de forma más simple el resultado de ecuaciones de tipo $ax = b$, cuando a y b son números enteros, con a distinto de cero.

Ejemplo 5: Un alumno tuvo las siguientes calificaciones en 4 exámenes de matemáticas: 8, x, 9 y 10. Si su promedio fue de 9.25, ¿cuál fue su calificación en el segundo examen?

Solución:

El promedio es igual a la suma de las calificaciones dividido entre el número de exámenes; por lo tanto; el promedio debe estar dado por la expresión:

$$9.25 = \frac{8 + x + 9 + 10}{4} \text{ que es equivalente de } 9.25 = \frac{27 + x}{4}$$

Si multiplicamos el promedio por 4, tenemos la suma de las calificaciones:

$$9.25 \times 4 = 27 + x \text{ que lleva a la expresión } 37 = 27 + x$$

Para que se cumpla esta igualdad, es necesario buscar un valor x que sumado con 27 dé como resultado 37. Este número es 10.

Respuesta: El alumno obtuvo una calificación de 10 en el segundo examen.

Aplica lo aprendido

Actividad 6

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, anotando en tu libreta los procedimientos completos que sean evidencia de la aplicación de reglas y conceptos estudiados.

a) ¿Qué representa el símbolo π en la fórmula para calcular el área de un círculo: $A = \pi r^2$?

b) ¿Qué diferencia hay entre la Aritmética y el Álgebra?

c) ¿Cómo representarían la cantidad de limones que hay en un costal cerrado y al cual no tienen acceso para contarlos?

d) ¿Qué operación se indica cuando dos variables literales se encuentran juntas?

e) ¿Qué significado tiene para ti la expresión $A = \frac{bh}{2}$?

f) ¿Cómo pueden representar su edad dentro de cinco años?

g) Al realizar una investigación sobre la preferencia que los estudiantes tienen del estudio con música ambiental. ¿Cuál sería una variable importante en la investigación? ¿Cómo la representarías? ¿Por qué?

h) ¿Qué son los números reales? ¿Es número real el cero? ¿Por qué?

i) ¿Qué es una fórmula?

j) La fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$ se usa para calcular el área de un trapecio, donde B es la medida de su base mayor, b es la medida de su base menor y h es su altura. Calcula el área de un trapecio con base mayor de 10 cm, base menor de 5 cm y altura de 2 cm.

k) Se tiene un terreno rectangular de x metros de largo y y metros de ancho. Se desea construir una alberca al centro de este terreno cuyas dimensiones serán: a metros de largo por b metros de ancho. Una vez construida la alberca, se desea colocar pasto en el resto del terreno, como se muestra en la siguiente figura. Expresa una fórmula para calcular el área de la zona con pasto.

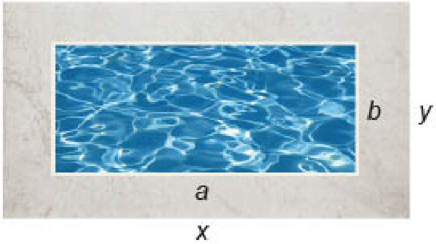


Figura 1.8. Esquema del terreno y la alberca proyectada.

l) La fórmula $P = \rho gh$ se usa para determinar la presión, en Pascales, que ejerce un líquido sobre las paredes de un recipiente que contiene un líquido de densidad ρ, en kg/m^3, a una profundidad h, en metros. g es la aceleración de la gravedad, g = 9.81 m/s^2. Calcula la presión en una alberca a una profundidad de 3 m, sabiendo que la densidad del agua es de 1000 kg/m^3.

m) Para calcular el pago que debe realizarse por un préstamo de p pesos, al final de un plazo de n años, con una tasa de interés del % anual se usa la fórmula:

$$F = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Calcula el pago que se debe realizar por un préstamo de 20,000 pesos, a una tasa de interés del 7% anual al final de 2 años.

n) Expresa una fórmula para calcular el importe total de la compra de x artículos cuyo precio por unidad es de 50 pesos.

o) La siguiente fórmula se usa para calcular la velocidad de un móvil cuando éste ha recorrido una distancia d, en km, durante un tiempo de t horas:

$$v = \frac{d}{t}$$

Calcula la velocidad de un autobús que ha recorrido una distancia de 300 km en 2 horas.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Elabora o plantea una hipótesis sobre la importancia de las fórmulas en la vida diaria, ¿qué pasaría si no existieran las fórmulas? ¿Cómo obtendríamos los resultados que ellas nos permiten calcular? Escribe de manera concreta tu solucion:

....

....

....

....

....

Actividad 7

Producto de aprendizaje: dominó con modelos aritméticos y algebraicos

Instrucciones: Integrados en equipos, elabora fichas de dominó basadas en la aplicación de los contenidos abordados en este bloque I, de modo que jugando y divirtiéndose puedan combinar la práctica con la teoría de los contenidos.

Este juego lo realizarás utilizando problemas aritméticos y algebraicos. El material producido por los equipos debe presentar diseños creativos, económicos y fáciles de manipular; preferentemente, empleando materiales reciclados (madera, papel cascarón, cartulinas, etc.).

Recomendaciones:

1. Formar equipos de trabajo de 3 o 4 participantes.
2. Elaboración del plan de trabajo y reunir los materiales para construir sus fichas

de dominó. Cada equipo decidirá en el tamaño de sus fichas, colores, formas, diseño, etcétera. Recomendamos las dimensiones de 13 x 6.5 cm, debido a la facilidad del manejo.

3. Para la elaboración de las fichas deben seleccionar 6 cantidades base y 6 diferentes equivalencias de éstas, construidas a partir de las propiedades algebraicas que deben considerar el dominó.

   Un ejemplo propuesto es:

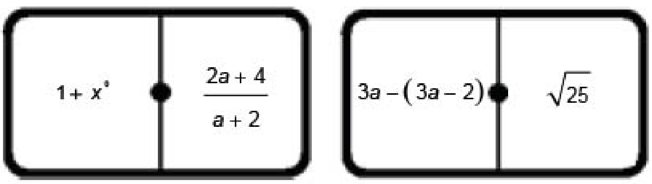
   Cantidad base: 2

   Cantidades equivalentes:

   (1) $1+x^0$ (2) $\sqrt[m]{\dfrac{2^{3m}}{2^{2m}}}$ (3) $3a-(3a-2)$

   (4) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$ (5) $\sqrt[5]{32}$ (6) $\dfrac{2a+4}{a+2}$

   Ejemplos de las fichas "mula" de 2 y 2-5:



1. Las reglas para jugar son las mismas que las del dominó tradicional.

2. Al final de la unidad, conforme lo estipule el docente, los equipos presentarán sus juegos y un reporte del trabajo realizado que incluya los contenidos algebraicos y sus cálculos para demostrar las equivalencias correspondientes.

¡Manos a la obra!

Actividad 8

Producto de aprendizaje: elaboración de tu problemario

Esta actividad consiste en conformar tu problemario con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las seis actividades presentadas a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del problemario, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para presentar tu problemario a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre, de la escuela, asignatura, del estudiante, bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha de entrega) y un índice.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: dominó con modelos aritméticos y algebraicos

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Contenidos	Modelos aritméticos y algebraicos sin errores.			
Presentación y medición de las fichas	Trazo alineado de las fichas en el material elegido.			
	Trazos congruentes de las divisiones de las fichas con las medidas recomendadas.			
	Los lados de las fichas que sean semejantes.			
	Creatividad en la construcción de las fichas.			
	Funcionamiento adecuado (se finaliza un juego sin problemas).			
Relatoría	Descripción de procedimientos congruentes para agilizar el juego.			
	Presenta un reporte en una máximo de tres cuartillas, sin errores ortográficos.			
Actitudes	Trabaja de forma colaborativa.			
	Escucha las opiniones de los demás y comparte ideas.			
Total de puntos		**10**		

Si en la lista de cotejo lograste los **10 puntos**, considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **8 a 9 puntos** es **Bien**, de **6 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	Actividades: orden y limpieza. El planteamiento de la actividad a tinta. Proceso de solución a lápiz.			
	Presenta índice.			
Representación de relaciones	Relaciona información de relaciones entre magnitudes.			
	Realiza la factorización.			
	Máximo común divisor.			
	Mínimo común múltiplo aritmético.			
	Propiedades de números reales.			
	Jerarquización de operaciones.			
Modelos aritméticos o algebraicos	Resuelve problemas mediante la interpretación de modelos aritméticos o algebraicos.			
Procedimientos	Utiliza el método solicitado.			
	Escribe todos los pasos.			
Solución	Comprueba las soluciones obtenidas.			
	Las interpreta de acuerdo al contexto.			

Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Respeta las opiniones de otros.			
	Sigue con atención instrucciones y las interpreta.			
Total de puntos		**17**		

Si en la lista de cotejo lograste los **17 puntos** considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **12 a 16 puntos** es **Bien**, de **8 a 11** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 8** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque I

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque II

Utilizas magnitudes y números reales

Introducción

El hombre ha tratado de interpretar, modelar y medir los fenómenos que suceden a su alrededor, en ese afán de medir sus propiedades, ha utilizado diferentes patrones de medida, buscando representar la cantidad a través de un número, como por ejemplo: la cantidad de litros de agua que cae en una tormenta, el número de cosechas perdidas por una helada o plaga, la temperatura en diferentes días por mencionar algunas **magnitudes** de cantidades. Al manejar números en tu vida cotidiana no todos ellos son del mismo tipo ni se manejan de la misma forma. Este bloque nos ayudará y ofrecerá la base para desarrollar un estudio formal de los números reales en diferentes contextos.

Magnitud: distancia del cero a cualquier número en una recta numérica y se denomina valor absoluto.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e Interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Construye e interpreta modelos aritméticos, algebraicos y geométricos aplicando las propiedades de los números reales y expresiones aritméticas y algebraicas, relacionando magnitudes constantes y variables concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le ayudan a explicar y describir su realidad.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Números reales: representación y operaciones. • Tasas • Razones • Proporciones y variaciones.	• Observación de objetos y gráficos. • Analiza y comprende textos y Fórmulas • Representa relaciones entre magnitudes. • Resolución de problemas mediante la interpretación de modelos aritméticos o algebraicos.
Procedimentales	• Ubica en la recta numérica números reales y sus respectivos simétricos. • Combina cálculos de Tasas, Razones, Proporciones y Variaciones en diversas situaciones. • Construye modelos aritméticos, algebraicos o gráficos aplicando las propiedades de los números reales.	• Realizando ejercicios en los que aplica las propiedades de las relaciones entre los números reales.
Actitudinales	• Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje. Compartir ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.	• Exposición de trabajos con criterios de orden y limpieza. • Respeta y escucha las opiniones y/o argumentos de otras personas. • Seguimiento e interpretación de instrucciones.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera seis horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices tres horas para revisar los contenidos temáticos y tres horas para llevar acabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Problemario
- Investigación sobre ¿qué deporte prefieren los estudiantes?

Problemario. Lo elaborarás trabajando tanto en tu libro como en tu libreta con la resolución de problemas y ejercicios de manera individual y grupal. Al termino del bloque, integrarás tu problemario con las seis actividades que hallas realizado a lo largo del bloque, consulta la lista de cotejo al final del bloque, para tener idea clara de los criterios de evaluación que debes cubrir para entregarlo a tu profesor.

Investigación sobre ¿qué deporte prefieren los estudiantes? Este trabajo lo realizarás en equipo de cinco participantes, para ello será necesario que diseñes una encuesta en donde preguntes sobre la preferencia de deportes individuales ((atletismo, ajedrez, ciclismo, natación, etcétera) y deportes de conjunto (futbol, basquetbol, voleibol, etcétera)). Los resultados deberán ser representados en gráficas. En este trabajo deberás incluir números reales, su representación y uso en forma de razones, proporciones, tasas, porcentajes y/o variaciones.

Para iniciar, reflexiona

Con el objetivo de construir e interpretar las partes de un todo mediante modelos aritméticos, algebraicos y gráficos.

A partir de una hoja de papel rectangular o cuadrada de preferencia reciclada, construir un triángulo equilátero.

Paso 1. Dobla la hoja a la mitad de su anchura de modo que se marque la línea que la divide en dos secciones iguales, como se muestra en la figura 1.1.

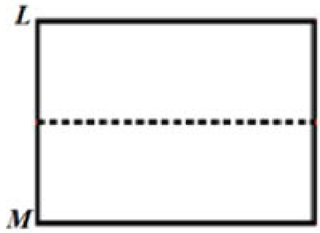


Figura 2.1.

Paso 2. Dobla, desde la esquina *L* hacia el centro de modo que *L* se localice sobre la marca obtenida en el paso 1, como se ilustra en la figura 1.2. Llamemos al punto de intersección *O*.

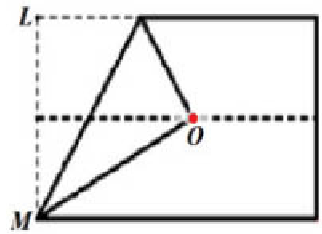


Figura 2.2.

Paso 3. Desdobla la hoja y traza líneas desde *O* hasta *L* y *M*, respectivamente para obtener el triángulo equilátero *LOM*, como se muestra en la figura 1.3.

Paso 4. Recorta el triángulo.

Paso 5. Repite los pasos del 1 al 4 para construir otro triángulo en una hoja rectangular o cuadrada de diferente anchura.

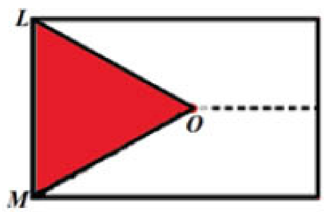


Figura 2.3.

Elige el triángulo pequeño y mide sus lados. Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Es éste un triángulo equilátero? Sí o No ¿Por qué?

....

2. ¿Es posible determinar su altura? En caso de que tu respuesta sea Sí, ¿cómo se realiza el cálculo de la altura? Si tu respuesta es No, ¿por qué no es posible?

....

Haz lo mismo con el triángulo grande.

Con base en las respuestas anteriores aclara las siguientes preguntas:

1. ¿Es posible determinar las veces que el triángulo menor cabe en el triángulo mayor? En caso afirmativo, ¿cómo se realizaría el cálculo?

2. ¿Existe alguna proporción entre los lados de ambos triángulos? Explica tu respuesta.

3. ¿Puedes extender este razonamiento a las áreas de ambos triángulos? Explica brevemente.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Con el propósito de reactivar conocimientos previos para lograr realizar los productos de aprendizaje que se presentan en las actividades propuestas. Resuelve lo que se solicita, escribiendo los procedimientos completos en la libreta.

1. Si dividimos una pizza en cuatro partes iguales y dividimos una de estas partes en dos partes iguales, ¿cuál es la fracción que representa una de estas partes más pequeñas?

2. ¿Qué características comunes tienen los números 7, 14, 21 y 28? Explica tu respuesta.

3. Se tiene un cuadrado de 5 cm de lado y un triángulo de 4 cm de altura y 8 cm de base. ¿Cuál de las dos figuras ocupa mayor superficie? Explica tu respuesta.

4. Una persona ha distribuido su salario de la siguiente manera: la mitad para gastos del hogar, la cuarta parte para transporte y el resto para ahorro. Si gana 6 mil pesos, ¿qué cantidad destina al ahorro? Explica tu respuesta.

5. El 70% de los alumnos de una escuela prefiere estudiar escuchando música. Si en la escuela hay 850 alumnos, ¿cuántos no prefieren la música para estudiar? Explica tu respuesta.

6. Tres ciclistas le dan vuelta a un circuito; uno de ellos hace una vuelta en 30 minutos; el segundo, en 36, y el tercero, en 40. Si salen al mismo tiempo, ¿cuántos minutos tardarán en volver a coincidir en el mismo punto? Explica tu respuesta.

7. Si $x = \frac{1}{4}$, ¿cuál es el valor de $3\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2x^2$?

8. Dos números están en razón $\frac{3}{7}$. Si el menor de ellos es 189, ¿cuál es el otro?

9. Con \$500 Juan abrió una cuenta de ahorros; al paso de un año tenía \$510. ¿Qué tanto por ciento aumentó su capital en un año? Explica tu respuesta.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 8 a 9 preguntas considera tu resultado como **Bien**, de 6 a 7 como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades. Refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: valor numérico, operaciones con fracciones y porcentajes.

Aprende más

Números reales: representación y operaciones

Con las aportaciones de los antiguos griegos y los avances hechos por Descartes, Newton, Leibnitz, Euler y Gauss, entre los más destacados, en el siglo XIX, Georg Cantor y Richard Dedekind sistematizaron los números reales.

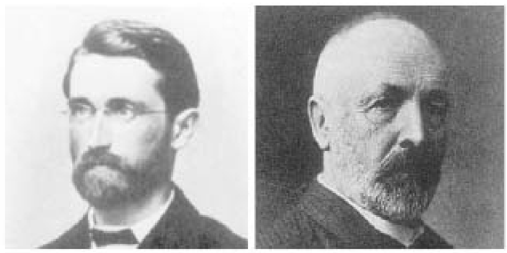


Figura 2.4. Para sistematizar los números reales, Richard Dedekind (izquierda) basó sus estudios en el análisis matemático y Georg Cantor (derecha) en la Teoría de Conjuntos.

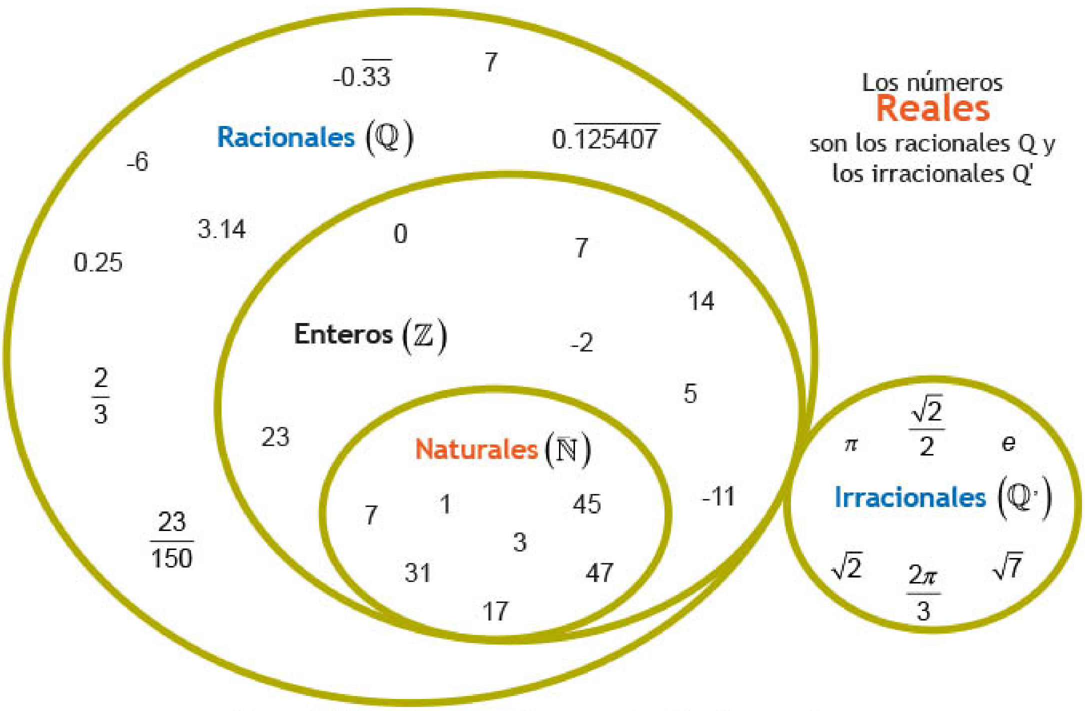


Figura 2.5. El conjunto de números racionales e irracionales.

De manera general, se define a los números reales $(\mathbb{R})$ como el conjunto formado por la unión del conjunto de los números racionales $(\mathbb{Q})$ con el conjunto de los números irracionales $(\mathbb{Q}')$.

$$\mathbb{Q}' \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

No debemos olvidar que el conjunto de los números racionales $(\mathbb{Q})$ contiene a los números enteros $(\mathbb{Z})$ y éste, a su vez, a los números naturales $(\mathbb{N})$. Es decir:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Todos los días aparecen datos reales en medios de comunicación como periódicos, radio, televisión, murales escolares, informes bancarios, o cuando en una reunión escolar compartimos las rebanadas de una pizza, un pastel. La interpretación de los números reales es diversa, los encontramos en gráficas, en tablas, en pictogramas, etcétera. Por todo esto debemos conocer con más profundidad este conjunto de números, mismos que se esquematizan en el siguiente diagrama:

$$\underbrace{\text{Números Reales}}_{\text{Positivos y Negativos}} (\mathbb{R}) \begin{cases} \text{Racionales } (\mathbb{Q}) \begin{cases} \text{Enteros } (\mathbb{Z}) \begin{cases} \text{Negativos } (\mathbb{Z}^-) = \{\ldots, -3, -2, -1\} \\ \text{Cero: } \{0\} \\ \text{Positivos o Naturales } (\mathbb{N}) = \{1, 2, 3, \ldots\} \\ \text{No negativos: } W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ \text{Pares: } \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \\ \text{Primos: } \{\pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \ldots\} \\ \text{Otros enteros...} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales } (\mathbb{Q}') \end{cases}$$

A continuación se dan ejemplos de cada clase de número real con la intención de formalizar conceptos importantes para la aplicación de estos números en la solución de problemas.

Números racionales

Son todos los números que se pueden escribir como fracción de dos enteros; es decir, si *a* y *b* son números enteros, entonces un número que se puede expresar en la forma $\frac{a}{b}$ es racional, se representa por el símbolo $\mathbb{Q}$ como sigue:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ donde\ b \neq 0 \right\}$$

El número *a* se denomina numerador mientras que *b* recibe el nombre de denominador y, significa *a* partes de *b* partes iguales.

Figura 2.6. Una rebanada representa un octavo de una pizza dividida en ocho partes iguales.

Ejemplo:

$\frac{1}{8}$ significa una parte de ocho partes iguales, se lee un octavo.

> Todos los números enteros se pueden expresar como la fracción de ellos entre 1, que también es entero, por lo que todos los enteros son números racionales:
>
> $$-4 = -\frac{4}{1} \qquad 17 = \frac{17}{1} \qquad 3 = \frac{3}{1}$$

Estas son las formas racionales más simples para demostrar que un entero es número racional; sin embargo, podemos usar *fracciones equivalentes*; por ejemplo, para el número 3 tenemos diferentes formas racionales:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \ldots = \frac{nk}{k} \text{ donde } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican por un mismo número entero diferente de cero, se obtiene otra fracción equivalente a ella.

Fracciones equivalentes

Decimos que las fracciones:

$$\frac{m}{n}\ y\ \frac{a}{b} \text{ con } b \text{ y } n \text{ diferentes de cero,}$$

son equivalentes cuando representan un mismo número. Esta propiedad se cumple si y solo si:

$$mb = an$$

Ejemplo 1: Determina si las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{16}{24}$ son equivalentes.

Solución:

$$2(24) = 48$$
$$3(16) = 48$$

Las fracciones son equivalentes.

Ejemplo 2: Determina si las fracciones $\frac{7}{4}$ y $\frac{34}{20}$ son equivalentes.

Solución:

$$7(20) = 140$$
$$4(34) = 136$$

Las fracciones no son equivalentes.

Ejemplo 3: Escribe tres fracciones equivalentes a $\frac{4}{5}$.

Solución:

Primera fracción equivalente: $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{8}{10}$

Segunda fracción equivalente: $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{12}{15}$

Tercera fracción equivalente: $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{16}{20}$

Fracción propia

Cuando el numerador de una fracción es menor que el denominador, decimos que se trata de una fracción propia.

Ejemplo: $\frac{3}{5}$

Fracción impropias

Es toda fracción en la que el numerador es mayor o igual que el denominador.

Ejemplo: $\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{12}{5}$, etc.

Número mixto

Es aquel que se compone de un entero y una fracción.

Ejemplo: $2\frac{3}{5}, 4\frac{2}{3}$, el número $4\frac{2}{3}$ se lee *cuatro enteros, dos tercios* y significa lo siguiente $4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$.

Expresión de un número mixto en forma de fracción. Todo número mixto puede expresarse en forma de fracción impropia aplicando la siguiente regla:

$$k\frac{m}{n} = \frac{kn+m}{n}, \text{ donde } n, m \text{ y } k \text{ son enteros y } n \neq 0$$

Ejemplo 1: Expresa el número mixto $2\frac{5}{3}$ en forma de fracción.

Solución:

$$2\frac{5}{3} = \frac{2(3)+5}{3} = \frac{6+5}{3} = \frac{11}{3}$$

Expresión de una fracción impropia a un número mixto. Al aplicar la siguiente regla:

$\frac{m}{n} = C\frac{r}{n}$ C es el cociente que resulta de dividir m entre n y r es el residuo.

Ejemplo 2: Expresa la fracción impropia $\frac{26}{3}$ como un número mixto

Solución:

$$\begin{array}{r} 8 \rightarrow C \\ n \leftarrow 3\overline{)26} \rightarrow m \\ 2 \rightarrow r \end{array} \quad \text{es decir} \quad \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

Fracciones homogeneas

Dos o más fracciones son homogéneas si tienen el mismo denominador.

Ejemplos: $\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}$ ó $\frac{6}{x}, \frac{2}{x}, \frac{y}{x}$

Fracciones heterogéneas

Si todas tienen diferentes denominadores.

Ejemplos: $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{x}, \frac{2}{2x}$

Simplificación de fracciones

La simplificación (o reducción) de fracciones es una de las operaciones matemáticas más importantes, el método consiste en descomponer en sus factores primos el numerador y el denominador de la fracción a simplificar y después cancelar los factores comunes a ambos utilizando la siguiente ley de los exponentes.

$$\begin{cases} \dfrac{a^x}{a^y} = a^0 \ si \ x = y \\ \dfrac{a^x}{a^y} = \dfrac{1}{a^{y-x}} \ si \ x < y \\ \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \ si \ x > y \end{cases}$$

Ejemplo 1: Simplifica la fracción $\frac{50}{80}$

Solución:

Descomponer 50 y 80 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{50}{80} = \frac{2 \times 5^2}{2^4 \times 5} = \frac{5^{2-1}}{2^{4-1}} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

Divisón de un número racional

La expresión decimal de un número racional se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador. Pueden obtenerse dos tipos de cocientes: uno con un número finito de cifras (número decimal) y otro con un número infinito (fracción periódica).

Ejemplo de número decimal: si tratamos de dividir 5 galletas entre dos niños, podremos dar 2 galletas enteras a cada uno y la que sobra partirla en dos partes iguales y dar una parte a cada niño, que podemos considerar como ó galletas para cada uno.

Ejemplo de fracción infinita o periódica:

$$\frac{5}{33} = 0.151515... \quad ó \quad \begin{array}{r} 0.151515 \\ 33\overline{)5.000000} \\ 170 \\ 050 \\ 150 \\ 05... \end{array}$$

Los números con parte decimal finita también son números racionales. Por ejemplo, los números 7.5, 19.25 y 9.287 son números que podemos escribir como las fracciones:

$$\frac{75}{10} = \frac{15}{2}, \ \frac{1925}{100} = \frac{77}{4} \ y \ \frac{9287}{1000}$$

Expresión de un número decimal finito en forma de fracción

1. Se cuentan las cifras de la parte decimal del número n para obtener como resultado el número k. Por ejemplo, si $n = 7.5$, se tiene que $k = 1$.

2. Dependiendo del valor k obtenido en el paso anterior, se deberá multiplicar al número n por 10^k. Si $k = 1$, n se multiplica por 10; si $k = 2$, por 100; si $k = 3$, por 1000, y así, sucesivamente. Esto dará como resultado un entero m sin parte decimal:

$$m = n \times 10^k$$

Para el ejemplo, $m = 7.5 \times 10^1 = 7.5 \times 10 = 75$.

3. Se expresa n como la fracción de m entre 10^k: $n = \dfrac{m}{10^k}$

En el ejemplo: $7.5 = \frac{75}{10}$

4. En caso de ser posible, se recomienda simplificar la fracción. Para el ejemplo:

$$7.5 = \frac{75}{10} = \frac{3 \times 5 \times \cancel{5}}{2 \times \cancel{5}} = \frac{15}{2}$$

Los *números con parte decimal infinita* o periódica también son racionales. Por ejemplo, el número 15.333..., que se puede escribir como $15.\overline{3}$, es racional. Observamos que la parte decimal es infinita (que es lo que indican los puntos suspensivos) y que una cifra es la que se repite periódicamente hasta el infinito. Esta cifra es el número 3, por lo que indicamos mediante una testa para esta cifra que se repite periódicamente hasta el infinito.

Expresión de un número decimal periódico en forma de fracción

1. Sea n el número que deseamos probar que es racional, entonces, si la parte periódica comienza desde el punto decimal (como en este caso) y el número de cifras periódicas es k, se debe obtener el producto: $10^k n$.

2. Se realiza la resta de este resultado menos el número original: $10^k n - n$, que en forma factorizada es: $(10^k - 1)n$.

   En este paso, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rl} 10^k n = & \text{número mayor} \\ - \qquad n = & \text{número menor} \\ \hline \left(10^k - 1\right)n = & \text{número } m \end{array}$$

3. Despejamos n, moviendo el valor $10^k - 1$ de la izquierda del signo de igualdad a la derecha. Dado que en el lado izquierdo se halla multiplicando, pasará al otro lado dividiendo al número m, es decir:

$$n = \frac{\text{número } m}{\left(10^k - 1\right)}$$

4. Se simplifica, si es posible, la fracción para presentar el resultado más sencillo.

Ejemplo: Demostrar que el número $15.\overline{3}$ es racional.

Solución:

$$\begin{array}{r} 10n = 153.\cancel{\overline{3}} \\ -\ n = \ \ 15.\cancel{\overline{3}} \\ \hline 9n = 138 \end{array}$$

$$n = \frac{138}{9} = \frac{\cancel{3}(46)}{\cancel{3}(3)} = \frac{46}{3}$$

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Lee con atención los tres planteamientos y responde a lo que se te solicita, en tu libreta realiza los procedimientos, con orden y limpieza. Al concluir comparte con tus compañeros las soluciones obtenidas y escucha las opiniones de ellos.

1. Escribe los siguientes números mixtos como fracciones impropias.

a) $4\frac{3}{5}$ b) $7\frac{4}{5}$ c) $5\frac{2}{7}$ d) $8\frac{3}{4}$

2. Escribe las siguientes fracciones impropias como un número mixto.

a) $\frac{24}{5}$ b) $\frac{21}{4}$ c) $\frac{23}{7}$ d) $\frac{39}{6}$

3. Escribe cinco fracciones equivalentes a cada una de las que se indican.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{7}{6}$

4. Simplifica las siguientes fracciones.

a) $\frac{20}{30}$ b) $\frac{144}{96}$ c) $\frac{125}{750}$ d) $\frac{270}{150}$ e) $\frac{648}{144}$

5. Escribe las siguientes fracciones en forma decimal.

a) $\frac{9}{15}$ b) $\frac{40}{12}$ c) $\frac{11}{12}$ d) $\frac{12}{15}$

6. Escribe en forma de fracciones los siguientes números decimales

a) 0.42 b) $0.\overline{2}$ c) 0.264 d) $0.\overline{81}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Operaciones con números racionales

Dado que el m.c.m. se calcula para obtener el denominador que hace homogéneas todas las fracciones de una suma o resta, también se conoce como *común denominador*. Para sumar o restar fracciones heterogéneas se emplea el proceso indicado por la siguiente expresión:

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n} \pm \ldots = \frac{f_1 \cdot a \pm f_2 \cdot b \pm \ldots}{M}, \text{ donde } M = mcm\ (m, n, \ldots) \text{ y } f_1 = \frac{M}{m},\ f_2 = \frac{M}{n},\ \ldots$$

Ejemplo: si tenemos las fracciones:

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{5}{12}$$

Podemos hacerlas homogéneas haciendo que ambas tengan el mismo denominador: 12 en este caso. Este denominador común es el *mínimo común múltiplo* de 4 y de 12. Para obtener el mcm de números basta con factorizarlos simultáneamente hasta obtener 1 en cada denominador como se ilustra en el siguiente proceso:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 4 & - & 12 & 2 \\ 2 & - & 6 & 2 \\ 1 & - & 3 & 3 \\ 1 & - & 1 & \end{array}\right\} (2)(2)(3) = 12$$

Aplicando este proceso para calcular m.c.m. (4, 12), tenemos que:

$4 = 2^2$ y $12 = 2^2 \times 3$, por lo que m.c.m. $(4, 12) = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$.

Así, la primera fracción se puede escribir con denominador 12 si multiplicamos por 3 su numerador y denominador:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$$

Este factor se obtuvo dividiendo el m.c.m. = 12 entre el denominador 4 dando como resultado 3.

Ejemplo 1: Sumar $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{4}{20}$

Solución:

Aplicando el proceso para calcular, el mínimo común denominador de (4,8,20), tenemos que: $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$; $20 = 2^2 \times 5$, por lo que el m.c.d es $2^3 \times 5 = 40$.

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{4}{20}=\frac{\left(\frac{40}{4}\right)\times 3+\left(\frac{40}{8}\right)\times 7+\left(\frac{40}{20}\right)\times 4}{40}=\frac{30+35+8}{40}=\frac{73}{40}$$

Ejemplo 2: Restar $3\frac{4}{9}-12\frac{2}{3}$

Solución:

$$3\frac{4}{9}-12\frac{2}{3}=\frac{31}{9}-\frac{38}{3}=\frac{\left(\frac{9}{9}\right)\times 31+\left(\frac{9}{3}\right)\times 38}{9}=\frac{31-114}{9}=-\frac{83}{9}=-9\frac{2}{9}$$

Sabías que...

El mínimo común denominador de dos o más denominadores es el mínimo común múltiplo de todos ellos.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Realiza en tu libreta las operaciones necesarias para resolver los que se solicita en los ejercicios del 1 al 5. Finalmente en una plenaria, presenta las respuestas al grupo y escucha sus opiniones.

1. $\frac{5}{8}+\frac{7}{10}+\frac{11}{15}$ 2. $\frac{6}{9}+\frac{6}{15}-\frac{5}{3}$ 3. $9\frac{5}{6}+3\frac{4}{9}-12\frac{2}{3}$

4. Calcula el perímetro del rectángulo de la figura 2.7.

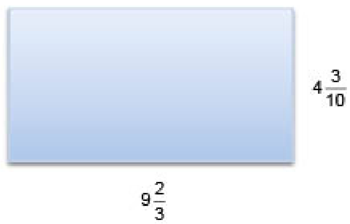


Figura 2.7.

5. Determina la distancia que recorre una persona en tres días si camina $4\frac{1}{2}$ km en el primer día, $3\frac{5}{8}$ km en el segundo y $3\frac{3}{4}$ km en el tercero.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Multiplicación de fracciones

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus respectivos numeradores, y cuyo denominador es también el producto de sus respectivos denominadores. El resultado debe escribirse en forma simplificada:

En forma general $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, donde b y $d \neq 0$

Ejemplo: Realiza la siguiente multiplicación de fracciones y simplifica.

$$\frac{7}{12}\times\frac{8}{14}=\frac{7\times 8}{12\times 14}=\underbrace{\frac{56}{168}=\frac{28}{84}=\frac{14}{42}}_{\textit{mitad a cada fracción}}$$

$$=\frac{7}{\underbrace{21}_{\textit{tercera}}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

Inverso multiplicativo: también conocido como recíproco, es todo número multiplicado por su reciproco es igual a la unidad.

Número $\frac{3}{4}$, recíproco $\frac{4}{3}$

Producto $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{12}{12}=1$

División de fracciones

Para dividir una fracción entre otra, la fracción dividendo se multiplica por el inverso multiplicativo de la fracción divisor. Esto quiere decir:

$$\frac{m}{n}\div\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\times\frac{b}{a}=\frac{mb}{an}\text{, donde } n, b \text{ y } a\neq 0$$

Ejemplo: Realiza las siguientes divisiones de fracciones y simplifica el resultado.

$$\frac{4}{9}\div\frac{5}{6}=\frac{4}{9}\times\frac{6}{5}=\underbrace{\frac{(2\times 2)\times(2\times \cancel{3})}{(3\times\cancel{3})\times 5}}_{\textit{factorizando}}=\frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{3}\div 4=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{(\cancel{4}\times 2)\times(1)}{(3\times\cancel{4})}=\frac{2}{3}$$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Observa detenidamente cada uno de los ejercicios siguientes y reflexiona sobre las operaciones que debes realizar. A continuación desarrolla en tu libreta todos los los procedimientos que te permitan llegar a la solución.

I. Realiza las siguientes multiplicaciones de fracciones.

1. $\frac{12}{16}\times\frac{30}{18}$ 2. $\frac{5}{18}\times 12$ 3. $\frac{7}{10}\times\frac{8}{21}$ 4. $\frac{16}{20}\times\frac{6}{8}$

5. En un grupo de 40 alumnos, $\frac{3}{5}$ reprobaron educación física. ¿Cuántos pasaron dicha materia?

6. Calcula el área del rectángulo de la figura.

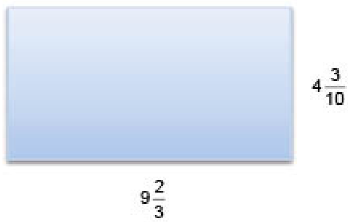


Figura 2.8.

II. Efectúa las siguientes divisiones de fracciones.

7. $\frac{8}{9}\div\frac{15}{12}$ 8. $5\frac{1}{3}\div\frac{8}{3}$ 9. $6\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{4}$

10. Se dispone de 60 litros de agua purificada. ¿Cuántas botellas se pueden llenar si la capacidad de cada una de ellas es de $\frac{3}{5}$ litro?

11. El costo unitario de una cerradura es de $60 y se desea que la ganancia sea $\frac{2}{5}$ de su precio de compra, ¿Cuál debe ser su precio de venta?

12. José gana $12000 mensuales. Si el monto de sus gastos mensuales es de $\frac{4}{5}$ de su salario, ¿Cuánto ahorra en un año?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Ubica en la recta numérica: números reales y sus simétricos, su valor absoluto y relaciones de orden

Los números reales pueden representarse gráficamente como puntos en la recta numérica y ello permite definir sus propiedades, hacer comparaciones y operaciones con ellos.

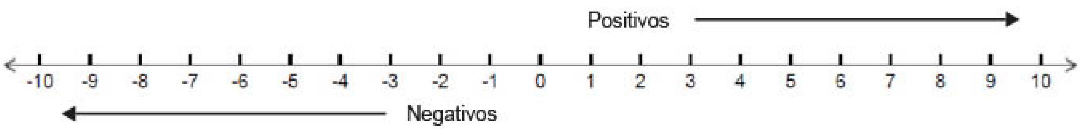


Figura 2.9. Recta numérica.

Como se muestra en la figura, el número cero es importante porque a partir de él se definen dos conjuntos de números: los positivos y los negativos. Por esta razón se le denomina origen de la recta numérica.

Los números *positivos* son todos los números mayores que cero y se localizan a la derecha de éste. En la gráfica se muestra el número positivo 3 como un punto a la derecha del cero. Así, los números positivos cumplen la condición $x > 0$.

Los números *negativos* son todos los números menores que cero y se localizan a la izquierda de él. La condición que satisfacen los números negativos es $x < 0$.

Densidad de los números racionales

Entre cualesquiera de dos números enteros hay un conjunto infinito de puntos que representan números no enteros entre ellos, por ejemplo: entre el 3 y el 4 existen números no enteros mayores que 3, pero menores que 4 como, por ejemplo, 3.1, 3.21, 3.205, 3.75, 3.1416, etcétera.

De aquí que la representación de números reales no siempre es fácil. Por ejemplo, si deseamos representar el número 3.5 en la recta numérica debemos localizar el punto en el punto medio del segmento de la recta numérica entre el 3 y el 4, pero si deseamos representar al número $\frac{11}{3} \approx 3.\overline{6}$ resulta más difícil dada la naturaleza infinita de su parte decimal.

Ejemplo: Localiza en la recta numérica los números: $-4.5, \frac{3}{4}, 3\frac{1}{2}, \frac{13}{3}$

Solución:

Sean $A=-4.5$, $B=\frac{3}{4}=0.75$, $C=3\frac{1}{2}=3.5$ *y* $D=\frac{13}{3}\approx 4.3\overline{3}$, *entonces la gráfica es:*

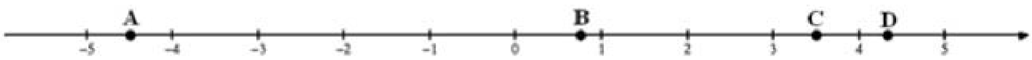


Figura 2.10. Localización de números en la recta numérica.

El ejemplo anterior puede servir para explicar alguna estrategia para localizar fracciones en la recta numérica.

Si debemos localizar, por ejemplo, el número $\frac{3}{4}$, podemos dividir el segmento entre el cero y el uno en 4 partes iguales (cuartos) y contar tres de ellas a partir del cero. Así localizamos el punto *B*.

Para localizar el número $3\frac{1}{2}$, dividimos el segmento entre el 3 y el 4 en dos partes iguales (medios) y contamos una parte desde el número 3. De esta forma localizamos el punto *C*.

Localizar el punto $\frac{13}{3}$, es más difícil y se recurrió a la localización aproximada. Si hubiésemos usado una hoja cuadriculada podríamos haber usado 3 cuadritos para cada división entera, de este modo podríamos localizar $\frac{13}{3}$, que es $4\frac{1}{3}$, tomando un cuadrito después del 4, como se muestra en la siguiente figura:

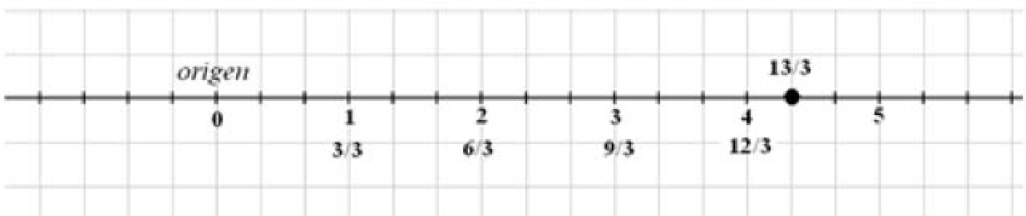


Figura 2.11. Localización de trece tercios.

Valor absoluto de un número real

Cualquier número real está localizado en la recta numérica a cierta distancia del cero. Esta distancia es la magnitud del número y se denomina valor absoluto de ese número. Por ejemplo: el número 3 está a 3 unidades hacia la derecha del cero, por lo que su magnitud o valor absoluto será 3. Asimismo, el número −3 está a 3 unidades hacia la izquierda del cero, por lo que su magnitud o valor absoluto es 3.

Para definir el valor absoluto del número x se usa la expresión: $|x|$, el número encerrado entre barras verticales llamadas *barras de valor absoluto*. A partir de esta definición, el ejemplo anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$|-3| = 3 \text{ y } |3| = 3$$

En general, para cualquier número real x se tiene que:

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ si } x \text{ es negativo } (x < 0) \\ x, \text{ si } x \text{ es positivo o cero } (x \geq 0) \end{cases}$$

Ejemplo 1: Calcula el valor absoluto de $2^3 - 5(2+1)$

Solución:

$$|2^3 - 5(2+1)| = |8 - 5(3)| = |8 - 15| = |-7| = -(-7) = 7$$

Ejemplo 2: Evalúa la expresión $\left|\dfrac{2^2 - 3^3 - 2}{-5}\right|^2$

Solución:

$$\left|\frac{2^2 - 3^3 - 2}{5}\right|^2 = \left|\frac{4 - 27 - 2}{5}\right|^2 = \left|\frac{-25}{5}\right|^2 = |-5|^2 = [-(-5)]^2 = 5^2 = 25$$

Uno podría decir que el nivel del suelo es el cero, y que sobre el suelo está lo positivo y por debajo están los negativos; como en un edificio. Los pisos hacia arriba son positivos, y los subterráneos son negativos. Cuando uno sube uno dice subí 5 pisos, pero cuando baja al subterráneo uno no dice bajé −3 pisos, sino simplemente "bajé 3 pisos", es decir el valor absoluto de 3 o de cualquier otro número.

Simétrico de un número real

Hemos analizado que $|-3| = |3| = 3$, que significa que −3 y 3 están a la misma distancia del cero en la recta numérica. El número −3 se localiza 3 unidades a la izquierda del cero, mientras que 3 está tres unidades a la derecha del cero. Los números con esta característica se denominan *simétricos* y podemos definirlos como los números que al sumarse producen como resultado al número cero.

El simétrico de un número real es otro número que se localiza a la misma distancia del cero pero en dirección contraria. Así, el simétrico de −100 es 100, y el simétrico de 28 es −28.

Dos números son simétricos si su suma produce como resultado el elemento neutro de la suma: el cero. Así, −100 y 100 son simétricos porque −100 + 100 = 0, y 28 y −28 son simétricos porque 28 + (−28) = 0.

Ejemplo 1: Encuentra el simétrico del número que se obtiene de evaluar la expresión:

$$2^3 - 2.$$

Solución:

$2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$, cuyo simétrico es −6.

Ejemplo 2: Determina el simétrico del número que se obtiene de evaluar la expresión:

$$\frac{3-4^2}{3} - \frac{7}{3}$$

Solución:

$$\frac{3-4^2}{3} = -\frac{7}{3} = \frac{3-16}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{13}{3} - \frac{7}{3} = \frac{-13-7}{3} = \frac{-20}{3} = -\frac{20}{3} \text{ cuyo simétrico es } \frac{20}{3}$$

Relaciones de orden entre los números reales

Para todos los números reales, un número que se localice a la derecha de otro en la recta numérica es mayor que éste y, en consecuencia, cualquier número que se localice a la izquierda de otro en la recta numérica es menor que éste.

Relación menor que

Para indicar que un número es menor que otro usamos el símbolo <, que se lee "menor que". Para indicar que 2 es menor que 5 usamos la expresión 2 < 5. En general, si deseamos indicar que un número *a* es menor que otro número *b*, usamos la expresión *a* < *b*.

Esta relación de orden se entiende mejor a partir de la siguiente figura 2.12.

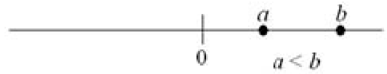


Figura 2.12. Relaciones de orden entre los números reales.

En esta figura, se cumple que *a* < *b*, porque *a* se localiza a la izquierda de *b*.

Relación mayor que

Si queremos escribir que un número es mayor que otro usamos el símbolo >, que se lee "mayor que". Para expresar que 6 es mayor que 4 utilizamos la expresión 6 > 4. En general, expresamos que un número a es mayor que otro número b usando la expresión *a* > *b*.

Estas dos relaciones pueden relacionarse entre sí, ya que si *a* < *b*, entonces también *b* > *a*. Por ejemplo, si decimos que un hijo es menor que su padre es equivalente a decir que el padre es mayor que el hijo: hijo (h) < padre (p) es equivalente de p > h. En la recta numérica el número que se ubica a la derecha del otro es mayor.

Propiedades de la igualdad:

1. *Propiedad de identidad*. Todo número es igual a sí mismo, es decir, $a = a$.
2. *Propiedad de reciprocidad o de simetría*. Si un número es igual a otro, entonces éste es igual al primero, es decir, si $a = b$ entonces $b = a$.
3. *Propiedad transitiva*. Si un número es igual a otro y éste es igual a un tercero, entonces el primer número es igual al tercero, es decir, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Analicemos los números reales: 2.25 igual a $2\frac{1}{4}$ y 3.75 igual a $3\frac{3}{4}$. La gráfica de estos puntos en la recta numérica es:

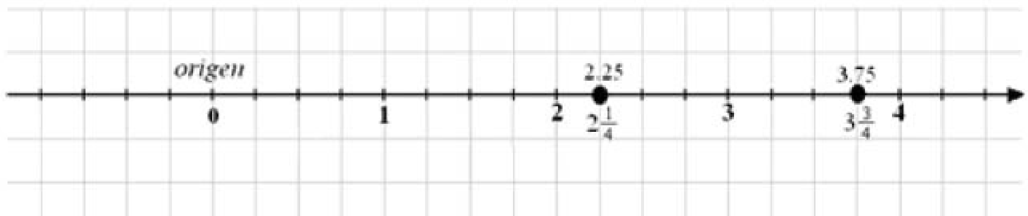


Figura 2.13. Localización de 2.25 y 3.75.

Podemos ver que 2.25 se localiza a la izquierda de 3.75, por lo que 2.25 < 3.75. Del mismo modo, dado que se localiza a la derecha de , se cumple que 3.75 > 2.25. Ambas son proposiciones equivalentes.

Si a y b son dos números reales, entonces se cumple sólo una de las siguientes condiciones:

1. $a < b$, si a se localiza a la izquierda de b en la recta numérica.
2. $a > b$, si a se localiza a la derecha de b en la recta numérica.
3. $a = b$, si a se localiza en la misma posición que en la recta numérica.

Ejemplo: $\frac{3}{2}$ y $\frac{15}{10}$, son fracciones equivalentes y se representan en la misma posición de la recta numérica.

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, anotando en tu libreta los procesos completos que sean evidencia de la aplicación de reglas y conceptos estudiados.

1. Escribe la notación desarrollada para el número 27.43.
2. Demuestra que el número $8.\overline{52}$ es racional y expresa la fracción equivalente simplificada.
3. Del siguiente conjunto de números reales $\left\{-2.75,\ -\sqrt{4},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 1.\overline{3},\ \sqrt{6},\ \pi\right\}$, escribe los que son racionales.
4. Explica a qué conjuntos de los números reales pertenece el valor $\sqrt{25}$.
5. Escribe el símbolo <, = ó > según corresponda, para que las expresiones sean verdaderas.

   a) $3^2 - 3(2)$ .... $5 - 1^2$

b) $\frac{13-9}{2}$ .... $\frac{5(2)-2^2}{3}$

c) 3^2-3 .... 2^2+2

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Tasas

Las tasas se emplean donde se requiere conocer la variación en la cantidad de un fenómeno con respecto a otro, por ejemplo, si deseo saber la cantidad de mis compañeros que prefieren el basquetbol con respecto a los que prefieren el futbol. Su aplicación se da en el comercio, la evaluación escolar, la ciencia por mencionar algunos, en el calculo de razones, proporciones y porcentajes.

La tasa es una forma de relacionar la variación entre dos variables donde una es dependiente de la otra. De este modo, si la variable *y* cambia su valor desde y_1 hasta y_2 cuando varía el valor de la variable *x* desde x_1 hasta x_2, entonces la tasa de cambio de *y* con respecto a *x* está dada por la expresión:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

La diferencia y_2-y_1 puede ser positiva o negativa, lo que implica que *y* creció o decreció, respectivamente. Lo mismo puede decirse de la variable *x*. Una forma de expresar el incremento o decremento de una variable es mediante la notación:

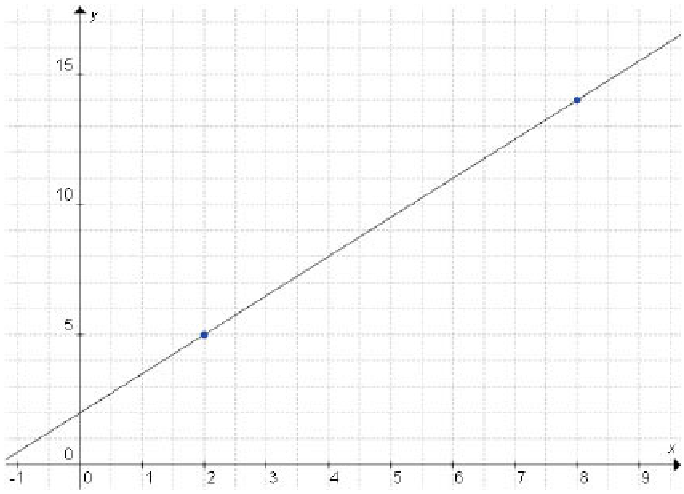
Δy que se lee "delta de *y*" porque se emplea la letra griega "delta" mayúscula: Δ

De este modo, podemos decir que $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ y que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ es la tasa de cambio promedio de } y \text{ con respecto a } x$$

Algunos ejemplos de tasas son: la tasa de natalidad, que es la relación de los nacidos vivos al número de habitantes durante un año; tasas de interés que expresan la cantidad de dinero que una inversión produce durante un plazo determinado, etcétera. Si una de las variables es el tiempo, la tasa se denomina tasa de cambio; por ejemplo, la velocidad de un automóvil, que es la tasa de la distancia recorrida al tiempo invertido en el recorrido, o el cambio en el nivel de agua al llenar una alberca. En problemas específicos se usan la tasa de fecundidad, tasa de mortalidad, tasa de inmigración, tasa de divorcio, tasa de crecimiento, etcétera.

Ejemplo 1. La siguiente gráfica muestra la variación del precio, en pesos, de un artículo durante varios años.



Determina:

a) El precio del artículo en el segundo año del estudio.
b) El precio del artículo en el octavo año.
c) El cambio del precio desde el año 2 hasta el año 8.
d) La tasa promedio del precio para los años 2 a 8.

Solución:

a) La gráfica muestra que en el año $x_1 = 2$, el precio es $y_1 = 5$ pesos.
b) Para $x_2 = 8$, el precio es $y_2 = 14$ pesos.

c) *El cambio del precio está dado por* $\Delta y = y_2 - y_1 = 14 - 5 = 9$ *pesos.*
Dado que este valor es positivo, el precio se incrementó 9 pesos durante $\Delta x = x_2 - x_1 = 8 - 2 = 6$ *años.*

d) *La tasa promedio del precio con respecto al tiempo representa la cantidad de pesos que éste cambia por año; es decir:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 \text{ pesos}}{6 \text{ años}} = 1.5 \text{ pesos/año}$$

Ejemplo 2. En el año 2000, una ciudad aumentaba su población con una tasa de 1500 habitantes por año. Si en el año 2005, su población era de 60 mil habitantes, ¿qué población había en el año 2000?

Solución:

Los datos del problema son:

$$x_1 = 2000,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1500 \text{ habitantes/año},\ x_2 = 2005 \text{ y } y_2 = 60000 \text{ habitantes}.$$

La fórmula de la tasa promedio es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo datos se tiene que $1500 = \dfrac{60000 - y_1}{2005 - 2000}$ *de donde*

$$1500 = \frac{60000 - y_1}{5}$$

$$1500(5) = 60000 - y_1$$

$$7500 = 60000 - y_1$$

$$7500 + y_1 = 60000$$

$$y_1 = 60000 - 7500$$

$$y_1 = 52500$$

Respuesta: En el año 2000 había 52500 habitantes en dicha ciudad.

Aprende más

Razones

La mayor parte de la información que procesamos todos los días se basa en la relación de cantidades que expresamos como fracciones, razones, proporciones o porcentajes. Un alumno sabe que una medida como el promedio de sus calificaciones informa sobre su estado de aprendizaje o que un porcentaje expresa la cantidad de una población que tiene ciertas características; por ejemplo, el porcentaje de alumnos que juega ajedrez en tu escuela.

> Una *razón* es la relación de dos cantidades para expresar cuánto de una está contenida en (o pertenece a) la otra. La notación empleada para expresar esta relación es $a:b$, que se lee *a* es a *b*.

Por ejemplo, si en un salón hay 36 mujeres y 24 hombres, la razón de mujeres a hombres es de 36 a 24. En nuestro ejemplo, la razón de mujeres a hombres en el salón es 36 : 24. La expresión $a + b$ es la cantidad total y *a* y *b* son las partes del total que se relacionan. En realidad, tratamos de saber cuántas mujeres hay por cada hombre en el salón, de modo que está implícita la operación de división en esta relación; así, 36 : 24 es lo mismo que:

$$\frac{36}{24}=\frac{\cancel{2\times 2}\times 3\times \cancel{3}}{\cancel{2\times 2}\times 2\times \cancel{3}}=\frac{3}{2}$$

Que en forma más concreta permite decir que en el salón hay 3 mujeres por cada 2 hombres. Así, la razón es 3 : 2.

Se acostumbra expresar los valores *a* y *b* con números enteros. Si hubieran valores decimales, multiplique hasta obtener valores enteros. Ejemplo: 2.5 : 3 es igual que 2.5 × 2 : 3 × 2, es decir 5 : 6, correctamente expresada con números enteros.

Las *razones* se pueden usar para expresar relaciones muy variadas. Como ejemplo, podemos relacionar la altura de un triángulo a su base; la cantidad de personas en un país que tienen estudios a la que carece de ellos; el número de prendas de ropa defectuosas en un proceso de maquila al total de prendas producidas; el número de juegos ganados por un equipo en un torneo al número de juegos perdidos; etcétera.

Ejemplo 1: ¿Cuál es la razón de la altura a la longitud de un pizarrón si su altura es de 75 cm por 2.5 m de longitud?

Solución:

Nota que las unidades no son consistentes, por lo tanto, lo primero que debemos hacer es una conversión para que las unidades sean iguales:

$$\text{Altura: } 75\text{ cm} \qquad \text{Longitud: } 250\text{ cm}\left(\text{porque } 2.5\ \cancel{m}\times\frac{100\text{ cm}}{1\ \cancel{m}}=250\text{ cm}\right)$$

Por lo que la razón de altura a longitud en el pizarrón es: $75:250$, que simplificada es:

$$\frac{75}{250}=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$$

Es decir $3:10$, que significa que el pizarrón tiene 3 cm de altura por cada 10 cm de longitud.

Ejemplo 2: ¿Cuál es la razón de hembras a machos en una pecera que tiene 80 peces, de los cuales 30 son hembras?

Solución:

La razón buscada es hembras a machos y sabemos que de 80 peces en total 30 son hembras, por lo que $80-30=50$ son peces machos; así, la razón de hembras a machos es $30:50$, que simplificada es:

$$\frac{30}{50}=\frac{3\times\cancel{10}}{5\times\cancel{10}}=\frac{3}{5}$$

O sea $3:5$, que explica que en la pecera hay 3 hembras por cada 5 machos.

Proporciones y variaciones

En ocasiones disponemos de dos razones: $a:b$ y $c:d$; por ejemplo, las razones de mujeres a hombres en dos salones diferentes; las razones de altura a longitud en dos pizarrones; las razones de hembras a machos en dos peceras; etcétera.

Una *proporción* es la igualdad entre dos razones. La expresión de una proporción es $a:b::c:d$, que también se puede escribir como:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

En una proporción, el producto de extremos es igual que el producto de medios. Sea la proporción $a:b::c:d$ entonces $ad = bc$.

Ejemplo 1: En un salón hay 36 mujeres y 24 hombres, ¿cuántas mujeres debe haber en otro salón que tiene 18 hombres para que los grupos sean proporcionales?

Solución:

La razón en el primer grupo, calculada anteriormente, es $3:2$, y la razón en el segundo salón es $c:18$. Para que los grupos sean proporcionales, se debe cumplir que $3:2::c:18$; es decir:

$$\frac{3}{2}=\frac{c}{18}$$

De aquí, podemos realizar un proceso que nos dé como resultado el valor de c. Para que las fracciones sean iguales, debemos tener denominadores iguales, de modo que necesitamos saber por cuánto se debe multiplicar 2 para obtener 18. Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{3\times\boxed{?}}{2\times\boxed{?}}=\frac{c}{18}$$

Obtenemos 9 como respuesta, así: $\frac{3\times\boxed{9}}{2\times\boxed{9}}=\frac{27}{18}=\frac{c}{18}$

De donde, por comparación directa de los numeradores, concluimos que $c = 27$. Así, la respuesta a la pregunta es que debe haber 27 mujeres a 18 hombres en el segundo salón para que ambos grupos sean proporcionales.

Ejemplo 2: La imagen del rostro de una persona en una fotografía mide 2 cm de altura por 1.5 cm de anchura. Si el rostro de la persona real tiene 12 cm de altura, ¿cuál es su anchura?

Solución:

Sabemos que la fotografía es proporcional dimensionalmente a la persona, por lo que *las razones de altura a anchura deben ser iguales. Así, la razón de aspecto del rostro en la fotografía es: 2×2:1.5×2, que en enteros es 4:3, y la razón de aspecto real del rostro de la persona es 12:d, que debe satisfacer la expresión 4:3::12:d, es decir:*

$\frac{4}{3}=\frac{12}{d}$*, de donde, al multiplicar por* $\frac{3}{3}$ *quedarán igualados los numeradores.*

Así, concluimos que d = 9; por lo tanto, la respuesta al problema es que la persona realmente tiene 9 cm de anchura en su rostro.

Ejemplo 3: En un restaurante hay 12 mesas para no fumadores y 4 mesas para fumadores. ¿Cuántas mesas para fumadores deben colocarse en una sucursal de dicho restaurante en el que se colocaron 42 mesas para no fumadores si se desea que las cantidades sean proporcionales?

Solución:

12 : 4 :: 42 : x que en igualdad es 12x = 4(42), de donde:

$$x=\frac{4(42)}{12}=\frac{\underbrace{\cancel{(2)}\cancel{(2)}}_{4}\underbrace{(2)\cancel{(3)}(7)}_{42}}{\underbrace{\cancel{(2)}\cancel{(2)}\cancel{(3)}}_{12}}=\frac{14}{1}=14$$

Respuesta: se deben colocar 14 mesas para fumadores y así serán proporcionales.

Porcentajes

Cuando en una proporción una de las razones tiene como segundo elemento al número 100, la proporción se denomina *porcentaje*. Por ejemplo, las rebajas en las tiendas se expresan en porcentajes, los impuestos se calculan como porcentajes del salario, las tasas de interés que un banco cobra por una tarjeta de crédito son porcentajes del saldo en la cuenta, la información de los medios de comunicación generalmente expresa porcentajes, como el porcentaje de fumadores en una ciudad o el porcentaje de desempleo, etcétera. La expresión de cálculo de un porcentaje es $a:b::c:100$, o en forma de fracciones:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{100}$$

Existe una fórmula que nos permite calcular de manera inmediata el interés:

$$I=C\cdot r\cdot t \text{ (Interés = capital} \times \text{tasa} \times \text{tiempo)}$$

Ejemplo 1: Alex pidió un préstamo de $7500 en el banco más cercano. Lo espera pagar en dos años con una tasa anual fija de 25%.¿Qué interés pagará al cumplirse el lapso acordado?

Solución:

Lo que sabemos C = $7500; r = 25%; t = 2 años. Fórmula: $I = C \cdot r \cdot t$

Sustituyendo y resolviendo operaciones:

$$I = (7500)(.025)(2) = 3750$$

Lo anterior es el interés que pagará y la deuda en realidad fue de $11250.

Ejemplo 2: ¿Cuál es el 15% de 600?

Solución:

Se desea calcular la cantidad de 600, que es proporcional con 15 de 100; es decir $a:600::15:100$, *que en forma de fracción es:*

$\frac{a}{600} = \frac{15}{100}$ *que, como sabemos, nos lleva a multiplicar la segunda fracción por* $\frac{6}{6}$,

para que las fracciones tengan el mismo denominador; así, concluimos que:

$$a = 15 \times 6 = 90$$

La respuesta es que 90 es el 15% de 600.

Ejemplo 3: En una tienda departamental se anuncia un descuento de 20% sobre una prenda de vestir que tiene un precio normal de 480 pesos. ¿Cuál es el monto del descuento? ¿Cuál es el precio de oferta de la prenda?

Solución:

El descuento se obtiene por la expresión: $d = 480 \times 0.20 = 96$ *(descuento de 96 pesos)*
Para saber cuál es el precio de oferta, basta con restar el descuento del precio normal:

$$480 - 96 = 384$$

Respuestas: la prenda se encuentra con un descuento de 96 pesos sobre el precio normal de 480 pesos y el precio de oferta es de 384 pesos.

Regla de tres

La aplicación del despeje a la aplicación de proporciones es la conocida “regla de tres”. Consiste en calcular una cantidad a partir de tres cantidades conocidas que varían proporcionalmente. Esta variación puede ser directa o inversa.

Regla de tres simple directa

Para resolver problemas de variación directa en los que intervienen dos variables se usa esta regla. El procedimiento para usarla es el siguiente:

1. Se escribe el supuesto: *a* es a *b*.
2. Se escribe la pregunta: *c* es a *x* o *x* es a *d*, donde *x* es la incógnita.
3. Se despeja la incógnita de la expresión: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ o de la expresión $\frac{a}{b}=\frac{x}{d}$ según corresponda, dando lugar a $x=\frac{bc}{a}$ o $x=\frac{ad}{b}$, respectivamente.

Ejemplo: Para administrar un medicamento se debe considerar el peso del paciente para indicar la dosis. Si se requieren 10 mg de este medicamento para un paciente de 50 kg de peso, ¿cuántos mg se requerirán para un paciente de 75 kg de peso?

Solución:

Supuesto: 10 mg de medicamento corresponden a 50 kg de peso.

Pregunta: x mg de medicamento corresponden a 75 kg de peso.

Proporción: 10 : 50 :: x : 75, que en forma de fracción es:

$$\frac{10}{50}=\frac{x}{75}$$

$$\textit{Despeje: } x=\frac{\cancel{10}\times 75}{\cancel{50}}=\frac{75}{5}=15$$

Respuesta: para un paciente de 75 kg de peso se debe administrar una dosis de 15 mg de medicamento.

Regla de tres simple inversa

Se usa en la solución de problemas de variación inversa entre dos variables. El procedimiento de uso es:

1. Se escribe el supuesto: a es a b.
2. Se escribe la pregunta: c es a x o x es a d, donde x es la incógnita.
3. Se invierte el orden de los términos de la pregunta.
4. Se despeja la incógnita de la expresión: $\frac{a}{b}=\frac{x}{c}$ o de la expresión $\frac{a}{b}=\frac{d}{x}$ según corresponda, dando lugar a $x=\frac{ac}{b}$ o $x=\frac{bd}{a}$, respectivamente.

Ejemplo: Si tres obreros pueden construir una barda en 4 días, ¿cuánto tiempo les llevará a cinco obreros construir la misma barda?

Solución:

La variación es inversa, porque a más obreros, menos tiempo de construcción.

Supuesto: 3 obreros son a 4 días para la obra.

Pregunta: 5 obreros son a x días para la obra.

Inversión de la pregunta: x es a 5.

De modo que queda la proporción: $3:4::x:5$ *en forma de fracción es:* $\frac{3}{4}=\frac{x}{5}$

Despejando tenemos: $x=\frac{3\times 5}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$

Respuesta: se necesitarán 3 días con $\frac{3}{4}$ *de día (que son 18 horas, ya que cada cuarto de día es de 6 horas).*

Aplica lo aprendido

Actividad 5

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios, desarrollando procedimientos completos en tu libreta, que evidencien el uso de las reglas de prioridad y asociatividad, así como el uso de operadores relacionales adecuadamente.

1. Calcula el término x de cada igualdad, de manera que se forme una proporción.

   a) $\frac{25}{15}=\frac{40}{x}$ b) $\frac{36}{x}=\frac{42}{28}$ c) $\frac{x}{1.8}=\frac{2.4}{3.6}$ d) $\frac{9}{3.6}=\frac{x}{18}$

2. ¿Qué interés producen \$48000 colocado al 5% de interés simple anual, durante 3 años?

3. A una taquiza se invitó a 125 personas y se estima que cada una coma 8 tacos; ¿Cuántos tacos deben prepararse?

4. Un camión de carga tiene una razón largo : ancho de 7 : 4. Si su anchura es de 3 metros, ¿cuánto mide de largo este camión de carga?

5. En un grupo de bachillerato que tiene 50 alumnos hay 15 mujeres. ¿Cuál es la razón de hombres a mujeres en el salón?

6. En una billetera hay 6 billetes de 100 pesos y 9 billetes de 50 pesos. ¿Cuántos billetes de 50 pesos debe haber en una caja registradora que tiene 42 billetes de 100 pesos para que las cantidades entre la billetera y la caja registradora sean proporcionales? ¿Cuánto dinero en total habrá en la caja registradora?

7. Si el porcentaje de sal en una solución de laboratorio es 35% y el peso total de la solución es de 275 gr, ¿cuál es el peso de la sal pura en la solución?

8. Si se necesitan 8 horas para llenar una alberca de 1200 litros, ¿cuánto tiempo tardará llenar una alberca de 2500 litros?

9. Dos jardineros podan un jardín en 7 horas. Suponiendo que la velocidad para

podar es la misma para los jardineros, ¿cuánto tiempo le llevará a uno solo realizar el trabajo?

10. En una tienda se anuncia un descuento de 25% en todos los pantalones de mezclilla. Si un pantalón de mezclilla tiene un precio normal de 450 pesos, ¿cuál es su precio de oferta?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Reconoce variaciones directas e inversas, así como modelos de variación proporcional directa e inversa

Como se explicó al estudiar la regla de tres, existen dos formas de variación entre las variables de una situación particular: variación directa y variación inversa.

Recordemos que la *variación directa* se presenta cuando al aumento de una variable corresponde el aumento de otra o viceversa, y que la *variación inversa* ocurre cuando al aumento de una variable corresponde la disminución de otra o viceversa.

Para expresar que una variable y es directamente proporcional a la variable x se emplea la expresión: $y \propto x$, donde el $\propto$ se lee "proporcional a". Para convertir esta expresión en igualdad, se introduce una constante que se denomina constante de proporcionalidad, dando lugar a la expresión: $y = kx$.

La expresión $y \propto \frac{1}{x}$ indica que la variable y es inversamente proporcional a la variable x. La transformación a igualdad da lugar a la expresión: $y = k\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$

Algunas variables tienen variación directa con una variable y variación inversa con otra. Este tipo de variación se considera *mixto*. Por ejemplo, en Física, la fuerza de atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Si **z** varía directamente con respecto a *x* y *y* es inversamente proporcional a *y*, la expresión de la variación es:

$$z \propto \frac{x}{y}\text{, que en forma de igualdad es } z = k\frac{x}{y}$$

Para resolver problemas de variación proporcional se relaciona la información dada en el enunciado para hallar el valor de la constante de proporcionalidad y después se calcula la incógnita.

Ejemplo 1: Un automóvil recorre 20 km en 5 minutos, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 30 minutos?

Solución:

El modelo en este problema es el de variación directa, porque "a más tiempo, más distancia recorrida". Entonces, si y = distancia recorrida en km y x= tiempo en minutos, el modelo matemático es: y = kx.

20 km = k(5 min) y despejando tenemos que:

$$k = \frac{20}{5} = 4 \text{ km/min}$$

Por lo tanto, el modelo de variación del problema es: y = 4x. Ahora, calculemos la incógnita. Sustituyendo tenemos:

$$y = (4)(30)$$
$$y = 120$$

La respuesta es: el automóvil recorrerá 120 km en 30 minutos.

Ejemplo 2: La siguiente tabla muestra los datos de dos variables directamente proporcionales. Completa la tabla a partir de la información contenida en ella.

y	25	35		73	
x	10		4		5.5
k					

Solución:

Con los datos de la primera columna podemos calcular la constante de proporcionalidad:

$$25 = k(10),\text{ de donde } k = \frac{25}{10},\text{ que lleva a } k = 2.5$$

Ahora calculemos los valores que faltan en las siguientes columnas:

Columna 2: $35 = 2.5x$, *de donde* $x = \frac{35}{2.5} = 14$

Columna 3: $y = 2.5(4) = 10$

Columna 4: $73 = 2.5x$, *de donde* $x = \frac{73}{2.5} = 29.2$.

Columna 5: $y = 2.5(5.5) = 13.75$

La tabla completa es:

y	25	35	*10*	73	*13.75*
x	10	*14*	4	*29.2*	5.5
k	*2.5*	*2.5*	*2.5*	*2.5*	*2.5*

Aplica lo aprendido

Actividad 6

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, anotando en tu libreta los procesos completos que sean evidencia de la aplicación de reglas y conceptos estudiados.

1. Con 20 pesos se pueden comprar 3 chocolates. ¿Cuánto costarán 10 chocolates? Escribe el modelo matemático del problema.

2. Si cuatro obreros levantan una pared en 3 días, ¿cuánto tiempo les llevará a 3

obreros hacer la misma tarea, suponiendo que todos trabajan al mismo ritmo? Escribe el modelo matemático del problema.

3. La siguiente tabla muestra los datos de dos variables inversamente proporcionales. Completa la tabla a partir de la información contenida en ella. Escribe el modelo matemático del problema.

y	6.25	75		50	
x	8		50		20
k					

4. Si con 6 litros de gasolina un auto recorre 54 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrerá con 20 litros de gasolina? Escribe el modelo matemático del problema.

5. Una alberca se puede llenar en 12 horas con una toma de agua abierta. Si se abren 3 tomas de agua, ¿en cuánto tiempo se llenará? Escribe el modelo matemático del problema.

6. Se necesitan 10 perros para jalar un trineo con una carga de 200 kg. ¿Cuántos perros se necesitarán para jalar una carga de 300 kg? Escribe el modelo matemático del problema.

7. Un auto que viaja a una velocidad de 50 km/h llega a su destino en 6 horas. ¿A qué velocidad debe viajar si el regreso debe realizarlo en 4 horas? Escribe el modelo matemático del problema.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Actividad 7

Producto de aprendizaje: investigación sobre ¿qué deporte prefieren los estudiantes?

Instrucciones: En equipos de 5 alumnos, investiguen la preferencia de los estudiantes de tu escuela en los siguientes deportes:

- Individuales (atletismo, ajedrez, ciclismo, natación, etcétera).
- Deportes o juegos de conjunto (futbol, basquetbol, voleibol, etcétera).

Recomendaciones:

- El proyecto deberá tomar en cuenta el diseño de encuestas y gráficas que muestren los resultados de la investigación.
- La información en el proyecto deberá incluir números reales, su representación y uso en forma de razones, proporciones, tasas, porcentajes y/o variaciones.
- Los elementos de evaluación los puedes consultar al final de este bloque en la rúbrica del proyecto.
- Es muy importante que el proyecto finalice con una conclusión del equipo respecto a la importancia de los conocimientos de este bloque para realizarlo y que lleve a los alumnos a valorarlos en la solución de problemas y las diversas aplicaciones en las áreas humanas.

¡Manos a la obra!

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Actividad 8

Producto de aprendizaje: elaboración de tu problemario

Esta actividad consiste en conformar tu problemario con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las siete actividades presentadas a lo largo del Bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del problemario, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para presentar tu problemario a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre, de la escuela, asignatura, del estudiante, Bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha) y un índice.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: investigación sobre ¿qué deporte prefieren los estudiantes?

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Contenido	Representación de números reales.			
	Los números reales en forma de razones.			
	Los números reales en tasas y porcentajes y/o variaciones.			
	Todos los procedimientos y resultados aparecen ordenados en el trabajo.			
	Información completa en los ejemplos de los deportes.			
	Presenta el diseño de la encuesta.			
Presentación	El trabajo está limpio y con buena letra.			
	Las conclusiones las expresan de forma clara.			
	Las gráficas expresan los resultados muestran creatividad.			
	Carátula (nombre del estudiante, asignatura, bloque, título, semestre, grupo y fecha).			
Dominio Conceptual y Procedimental	Números reales: representación y operaciones.			
	Tasas.			
	Razones, proporciones y variaciones.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Respeta las opiniones de otros.			
	Trabajo con orden y limpieza.			
Total de puntos		**15**		

Si en la lista de cotejo lograste los **15 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **12 a 14 puntos** es **Bien**, de **9 a 11** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 9** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?		
	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de: nombre de la escuela, estudiante, asignatura, bloque, título del poblemario, semestre, grupo, fecha.			
	7 Actividades: orden y limpieza. El planteamiento de la actividad a tinta. Proceso de solución a lápiz.			
	Presenta índice.			
Planteamiento de ecuaciones	Identifica correctamente el tipo de ecuación a utilizar.			
Procedimientos	Utiliza el método solicitado.			
	Escribe todos los pasos.			
Solución	Comprueba las soluciones obtenidas.			
	Las interpreta de acuerdo al contexto.			

Continúa...

Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Escucha con respeto las opiniones de los demás.			
	Sigue con atención instrucciones y las interpreta.			
Total de puntos		**11**		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 11 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque II

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	

Continúa...

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema odesarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque III

Realizas sumas y sucesiones de números

Introducción

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un genio matemático, astrónomo y físico. Contribuyó al desarrollo de la teoría numérica, al análisis matemático, el magnetismo, la óptica y muchas otras disciplinas científicas. Una de las muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad en las matemáticas cuenta que, cuando Gauss tenía 10 años, un día en la escuela el profesor ordenó calcular la suma de los primeros cien números naturales; es decir, los alumnos tenían que sumar:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

Transcurridos pocos segundos, Gauss le dijo a su profesor" Tengo la respuesta, la suma de los primeros cien números es 5050" ¿Cómo crees que pudo resolver este problema en tan poco tiempo? Gauss en realidad se dio cuenta que la suma de los términos equidistantes era constante, es decir:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4+ 97 = 5 + 96 = \ldots = 50 + 51 = 101$$

Dado que con los cien números se pueden formar 50 pares, la solución es:

$$50(101)= 5050$$

Gauss había deducido que la suma (S_n) de los primeros (n) números naturales está determinada por la expresión:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

¿Qué competencias desarrollarás?

En este bloque trabajarás para lograr el desarrollo de las siguientes competencias.

Competencias genéricas	Atributos
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.* • *Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.*

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e Interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Aprenderás el uso de variables y expresiones algebraicas en el contexto de los números reales, asimismo, sobre comparaciones con el uso de tasas, razones, proporciones y la variación proporcional como caso simple de relación lineal entre dos variables.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Series y sucesiones geométricas. • Progresiones aritméticas. • Progresiones geométricas.	• Realiza observación de objetos y gráficos. • Analiza y comprende textos y Fórmulas. • Relaciona Información de relaciones entre magnitudes. • Analiza la resolución de problemas mediante la interpretación de modelos aritméticos o algebraicos.
Procedimentales	• Identifica y diferencia las series y sucesiones numéricas. • Clasifica las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas. • Determina patrones de series y sucesiones aritméticas y geométricas. • Construye gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas. • Soluciona problemas aritméticos y algebraicos de sucesiones aritméticas y geométricas.	• Realizando ejercicios y aplicación de las propiedades de las relaciones entre sucesiones aritméticas y geométricas.
Actitudinales	• Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje. Compartir ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.	• Exposición de trabajos con criterios de orden y limpieza. • Respeta y escucha las opiniones y/o argumentos de otras personas. • Seguimiento e interpretación de instrucciones.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera ocho horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices cuatro horas para revisar los contenidos temáticos y cuatro horas para llevar a cabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos:

- Portafolio de evidencias
- Investigación sobre el trabajo matemático del italiano Fibonacci.

Portafolio de evidencias. Lo podrás hacer en una libreta o en un cuaderno, que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones que te permitan llegar a soluciones de los problemas que se te presenten en las actividades de este Bloque. Estos deben mostrar un orden y limpieza.

Investigación sobre el trabajo matemático del italiano Fibonacci. En equipos de cinco personas elaboren una investigación. El documento contara con carátula, desarrollo del tema y una conclusión que describa la importancia de esta investigación y sus aplicaciones en la solución de problemas cotidianos en distintos ámbitos de los estudiantes (escolar, familiar y social). Así mismo elaboren dos mapas conceptuales sobre el tema en hojas de rotafolio o cartulina para presentárselas a sus compañeros.

Para iniciar, reflexiona

La madera es un elemento renovable de gran utilidad, para teléfonos de México, tal es el caso de los postes que son insustituibles para el cableado aéreo, pero antes de llegar a su destino este material se guarda en un almacén o en un patio donde es posible almacenar una gran cantidad de troncos ocupando el menor espacio posible, y es aquí donde empleamos las matemáticas. Con ella puedes anticipar cuanto material podrás guardar en un espacio limitado en este caso no puedes traer más del que puedes acomodar.

Figura 3.1. Poste de teléfono.

Considera que cuentas con 4 m de ancho para hacer el apilamiento de troncos, el apilamiento será formando una pirámide estimando que el diámetro de cada tronco es de 40 cm.

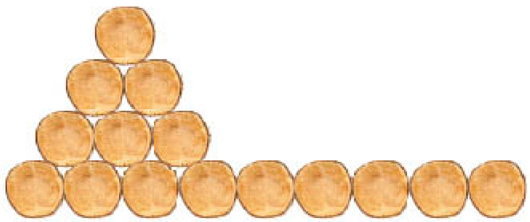


Figura 3.2.

- ¿Qué número de troncos, se pueden colocar en el patio? Traza un esquema de lo que se pretende.
- ¿Tienes idea de cuántos círculos debes trazar para completar el esquema? Vale la pena reflexionar sobre algún método alternativo.
- Para encontrar cuantos troncos se colocaran en el primer nivel de la pirámide o primera cama, ¿Sabes que operación se realiza? ....
- ¿Cuántos troncos pueden ir en el primer nivel. ....
- ¿Cuántos troncos habrá en el segundo nivel? ....
- ¿Cuántos troncos podremos colocar en el cuarto nivel? ....
- ¿Cuántos niveles tendrá la pirámide? ....

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Anota las razones o justificaciones necesarias para resolver lo que se solicita en cada numeral, escribe los procedimientos con orden y limpieza en tu libreta.

1. ¿Cuál es la suma de los primeros 10 números enteros naturales?

2. Hallar el valor numérico de S, si $n = 2$ de la expresión $2S - n(n - 1) = 0$

3. ¿Cuál es el quinto término de la secuencia: 3, 6, 12, 24?

4. Hallar el valor de b si $a = 3$ y $S = 15$ de la expresión $\frac{5(a+b)}{3} = S$

5. ¿Qué diferencia existe entre los términos de la secuencia 7, 10, 13, 16, 19, …?

6. ¿Cuántos números hay entre el 1 y el 20 en la secuencia 1, 4, 7, 10, ...?

7. Ordena los siguientes números de menor a mayor: 51, 57, 48, 60, 54.

8. ¿Qué números entre el 1 y el 10 dividen exactamente al número 5040?

9. Si partimos del número 15 y lo triplicamos obtenemos 45. Si triplicamos sucesivamente 2 veces más, ¿qué número obtenemos?

10. ¿Qué factor produce el siguiente término de la secuencia: 3, 12, 48, 192, …?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 8 a 10 preguntas considera tu resultado como **Bien**, de 6 a 7 como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades. Refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: operaciones aritméticas, números primos.

Aprende más

Series y sucesiones

Una leyenda clásica sobre la invención del ajedrez, cuenta que el rey hindú Sheram, quien era bastante rico, le maravilló un juego, que consistía en piezas móviles sobre un tablero cuadrado formado por 64 casillas rojas y negras, el rey quedó tan complacido por lo ingenioso del juego, por la variedad de posiciones de las piezas, por lo interesante de las estrategias para ganar, etc. El rey ofreció una recompensa a Seta, su inventor, quien además era su gran visir, consejero y, un excelente matemático.

Seta, al escuchar el amable ofrecimiento del rey, señaló las ocho columnas y las ocho filas del tablero que había inventado y sólo pidió que se le diera:

1 grano de trigo por la primera casilla
2 granos de trigo por la segunda casilla
4 granos de trigo por la tercera casilla
8 granos de trigo por la cuarta casilla

…y así sucesivamente, en cada casilla el doble de granos que en la anterior, hasta abastecer el total de casillas del tablero, es decir 64.

Figura 3.3. Río Ganges. La Matemática hindú jugó un importante papel en el desarrollo histórico de los números.

¿Tú qué crees, su petición fue mesurada o pidió demasiado? ¿Por qué?

…La primera respuesta del rey fue: ¡claro que no!, ya que pensó que era un premio mezquino por una invención de tal magnitud. Le ofreció joyas, bailarinas, palacios, etc., pero el gran visir lo rechazó todo, ya que solo le interesaban los montoncitos de trigo del tablero. Así el rey aceptó la moderada petición de su consejero y solicito que le fuese entregada la cantidad que solicitaba en granos.

Sus contadores empezaron a calcular la cantidad, y la sorpresa del rey fue tremenda cuando se presentaron a decirle algo así:

“Soberano, no depende de tu voluntad cumplir tu promesa a Seta, ya que en todos los graneros del reino no existe la cantidad de trigo suficiente, ni con todos los graneros del mundo entero alcanzaría a cubrirse la suma. Si deseas entregar tal recompensa, se necesitaría que todos los reinos de la tierra se conviertan en labrantíos, mandar desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve, para que todo el espacio fuese sembrado de trigo, y la cosecha obtenida fuese entregada a Seta, sólo entonces recibiría su recompensa". Entonces el rey preguntó: ¿Pues cuántos granos hay que entregar? Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil setecientos quince, le respondieron.

La parte de este relato que no es muy conocida es sobre lo que sucedió después, no se sabe si el rey se reprochó a sí mismo por no haber estudiado más matemáticas, o por no *pensar crítica* y *reflexivamente* antes de aceptar proposiciones como esa.

Construye tu propio final para esta leyenda, preferentemente relacionado con la importancia de aprender matemáticas.

....

....

....

¿Sabes cómo calcular la cantidad exacta de granos que hay que entregar? Anótala.

....

Con el propósito de aplicar nuestros conocimientos sobre series y dar respuesta exacta a la pregunta del rey: ¿Cuántos granos de trigo hay que entregar?

....

Estudiaremos este bloque de sucesiones aritméticas y geométricas.

Sucesiones de un número racional

Una *sucesión* es un conjunto de números ordenados de modo que uno es el primer término, otro es el segundo, otro el tercero, y así sucesivamente.

Ejemplos:

a) 1, 2, 3, ...
b) 1, 4, 7, 10, ...

c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

e) 2, 4, 6, 8, 10, ...

Cuando una sucesión tiene un número fijo de términos decimos que es finita; de otro modo, se conoce como infinita.

Ejemplos:

a) 5, 10, 15, 20, 25 es finita.
b) 1, 3, 5 es infinita. Los tres puntos de la sucesión 1, 3, 5... se llama *elipsis* e indican que los términos siguientes tienen el mismo patrón que el establecido por los ya dados.

Si a_1 representa el primer término de una sucesión, a_2 el segundo, a_3 el tercero, y así sucesivamente, podemos denotarla como:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \underbrace{a_{n-2}}_{\text{antecesor}}, \underbrace{a_{n-1}}_{\text{sucesor}}, \underbrace{a_n}_{\text{último término}}$$

La expresión a_n se conoce como *término general* o el n – *ésimo* término.

Método para determinar los términos de una sucesión

Si conocemos el n – *ésimo* (a_n) término, podemos determinar sus términos sustituyendo n por 1 para determinar el primero, n por 2 para el segundo, y así sucesivamente.

Ejemplo 1: Determina los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término sea:

$$a_n = 5n - 2$$

Solución:

$$a_1 = 5(1) - 2 = 3 \qquad a_2 = 5(2) - 2 = 8 \qquad a_3 = 5(3) - 2 = 13$$

$$a_4 = 5(4) - 2 = 18 \qquad a_5 = 5(5) - 2 = 23$$

Ejemplo 2: Encuentra el décimo término de la sucesión $a_n = \frac{n}{n+2}$

Solución:

$$a_{10} = \frac{10}{10+2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Método para determinar el término de una sucesión

Cuando se conocen algunos términos de una sucesion, se puede determinar la expresion del término general a_n con sólo observar su configuración aparente y a partir de ahí, obtener su fórmula correspondiente.

Ejemplo 1: Determina una expresión para el término general de 2, 6, 10, 14, ... a_n ...

Solución:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	6	10	14				

A partir de lo anterior observamos que, aparentemente, cada término es cuatro veces n disminuido en 2, lo cuál implica que:

$$a_n = 4n - 2$$

Ejemplo 2: Determina una expresión para el término general de 4, 7, 12, 19, ... a_n ...

Solución:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	4	7	12	19				

La configuración aparente de la sucesion consiste en que cada término es tres unidades más que el cuadrado de n.

Series

Una *serie* es la suma de todos los términos de una sucesión. La expresión de una serie aritmética es:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Esta expresión se puede escribir de manera simplificada usando la notación *sigma*:

$S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ que se lee sumatoria de los términos a_i para $i = 1$ hasta n

$$\text{Así } S = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

expresa la suma de los primeros 5 términos de la sucesión a_n

Este concepto se desarrollará en el tema de sucesión o progresión aritmética.

Progresiones aritméticas

Una sucesion cuyos términos sucesivos después del primero se forman sumando un número fijo al precedente se denomina progresión aritmética. El número fijo se llama diferencia común de la sucesión y se denota por la letra *d*.

Si llamamos *d* a esta diferencia, entonces en donde $a_n - a_{n-1} = d$ en donde n es cualquier entero mayor que 1. Si una sucesión numérica tiene la misma diferencia, se llama *progresión* o *sucesión aritmética*.

Ejemplo 1: Sea la sucesión aritmética: 3, 7, 11, 15, … . Encuentra los siguientes dos términos.

Solución:

Sabemos que $d = 15 - 11 = 11 - 7 = 7 - 3 = 4$ *de modo que* $d = 4$

En esta sucesión aritmética cada nuevo término es igual al anterior más 4. Así, el siguiente término después de 15, es decir:

el término en posición 5 es $a_5 = a_4 + d = 15 + 4 = 19$

y el término en posición 6 es $a_6 = a_5 + d = 19 + 4 = 23$

Por lo que sucesión con los dos nuevos términos es: 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

Ejemplo 2: Indica si la sucesión 5, 3, 1, −1 y −3 es aritmética o no.

Solución:

$$d_1 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2 \qquad d_2 = -1 - 1 = -2 \qquad d_3 = 1 - 3 = -2 \qquad d_4 = 3 - 5 = -2$$

$$d = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = -2 \text{ y finalmente } d = -2$$

Dado que hay una diferencia constante entre todos los términos sucesivos de la secuencia se trata de una sucesión aritmética.

Ejemplo 3: Indica si la sucesión 1, 2, 4, 8, ... es una sucesión aritmética o no.

Solución:

$$d_1 = 8 - 4 = 4 \qquad d_2 = 4 - 2 = 2 \qquad d_3 = 2 - 1 = 1$$

No hay una diferencia constante entre dos términos sucesivos de esta sucesión, por lo tanto no es una sucesión aritmética.

Ejemplo 4: Indica si la sucesión 6, 1, −4, −9, ... es una sucesión aritmética o no.

Solución:

$$d_1 = -9 - (-4) = -9 + 4 = -5 \qquad d_2 = -4 - 1 = -5 \qquad d_3 = 1 - 6 = -5$$

$$\text{de donde } d = -5$$

$$\text{por lo tanto } a_n = a_{n-1} + (-5) = a_{n-1} - 5$$

De donde:

$$a_5 = a_4 - 5 = -9 - 5 = -14 \qquad a_6 = a_5 - 5 = -14 - 5 = -19$$

Y la sucesión conteniendo estos dos términos es: $6, 1, -4, -9, -14, -19, \ldots$

Reconoce la forma algebraica del término n–ésimo de sucesiones aritméticas particulares

Dado que en una sucesión aritmética la diferencia entre dos términos sucesivos es constante. En general, para cualquier término intermedio se tiene que:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Que se conoce como término *n–ésimo* de la sucesión aritmética y representa a todos los términos de la sucesión.

Si conocemos dos términos de la progresión y su posición: a_i y a_j, donde $i < j$, podemos obtener la sucesión aritmética. Para esto, calculamos la diferencia entre los índices para saber cuántos términos de diferencia constante hay desde a_i hasta a_j: $k = j - i$; es decir, después de a_i hay k términos para llegar al término a_j. Esto significa que la diferencia d entre los términos de la sucesión aritmética se añade a_i a k veces.

Esto es:

$$a_j = a_i + k \cdot d$$
$$a_j = a_i + (j-i)d \qquad \text{de donde} \qquad d = \frac{a_j - a_i}{j-i}$$

Dado que:

$$a_i = a_1 + (i-1)d$$

Entonces despejamos a_i y tenemos que: $a_1 = a_i - (i-1)d$

De manera análoga, tenemos $a_1 = a_j - (j-1)d$

Ejemplo 1: Si el término n–ésimo de una sucesión es $a_n = 3a_{n-1} - 2$, encuentra los 5 primeros términos de la sucesión si el primer término es 10.

Solución:

$$a_1 = 10 \qquad a_2 = 3(10) - 2 = 30 - 2 = 28 \qquad a_3 = 3(28) - 2 = 84 - 2 = 82$$

$$a_4 = 3(82) - 2 = 246 - 2 = 244 \qquad a_5 = 3(244) - 2 = 730$$

La sucesión es: 10, 28, 82, 244, 730,…

Ejemplo 2: Sea la sucesión 23, 31 y 39, ... Determina si es una sucesión aritmética. De ser así, encuentra la expresión del término n–ésimo y usa esta expresión para saber cuál es el término que ocupa la posición 100.

Solución:

Continúa...

$d = 39 - 31 = 31 - 23 = 8$

$d = 8$

Que demuestra que se trata de una sucesión aritmética.

El término n–ésimo es:

$a_n = a_1 + (n-1)d = 23 + (n-1)(8) = 23 + 8n - 8 = 15 + 8n$

$a_n = 15 + 8n$

Si $n = 100$ *, se tiene que* $a_{100} = 15 + 8(100) = 15 + 800 = 815$

$a_{100} = 815$

Ejemplo 3: En una sucesión aritmética se tiene que $a_2 = 1$ y $a_6 = 25$. ¿Cuál es el término en posición 18 de la sucesión?

Solución:

$$d = \frac{a_j - a_i}{j - i} = \frac{25 - 1}{6 - 2} = \frac{24}{4} = 6$$

$d = 6$

$a_1 = a_i - (i-1)d = 1 - (2-1)(6) = 1 - 6 = -5$

$a_1 = -5$

$a_{18} = a_1 + (18-1)d = -5 + 17(6) = -5 + 102$

$a_{18} = 97$

Comprobación:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a_i	−5	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97

Fórmula para calcular la suma de los términos comprendidos entre a_1 y a_n conociendo la diferencia entre términos consecutivos:

$$S = \frac{(a_n - a_1 + d)(a_1 + a_n)}{2d}$$

Esta fórmula es de mucha utilidad en la solución de problemas. Una aplicación importante es la de calcular la suma de los primeros enteros naturales.

Se desea calcular la suma:

$$S=\underbrace{1+2+3+\ldots}_{n\text{ enteros naturales}}$$

$$\text{Como } d=1 \text{ tenemos } S=\frac{n(n+1)}{2}$$

Esta fórmula calcula la suma de los primeros n enteros naturales.

Ejemplo 1: Calcula la suma de los primeros 10 enteros naturales.

Solución:

$$S=\frac{10(10+1)}{2}=\frac{\cancel{10}(11)}{\cancel{2}}=5(11)=55$$

Comprobación:

$$\underbrace{1+2+3+4}_{10}+\underbrace{5+6+7}_{18}+\underbrace{8+9+10}_{27}=10+18+27=28+27=55$$

Ejemplo 2: Encuentra la suma de los enteros comprendidos entre 10 y 15.

Solución:

$$S=\frac{(a_n-a_1+d)(a_1+a_n)}{2d}=\frac{(15-10+1)(10+15)}{2(1)}=\frac{\cancel{6}(25)}{\cancel{2}}=3(25)=75$$

Ejemplo 3: Encuentra la suma de los términos de la sucesión 17, 25, 33,…, 65.

Solución:

$$d=8$$

$$S=\frac{(a_n-a_1+d)(a_1+a_n)}{2d}=\frac{(65-17+8)(17+65)}{2(8)}=\frac{\cancel{56}(\cancel{82})}{\cancel{8}(\cancel{2})}=7(41)=287$$

Ejemplo 3: Una persona solicitó un préstamo de 10 mil pesos en una caja de ahorro. La primera quincena pagará 500 pesos y cada quincena siguiente pagará 500 pesos más que la anterior hasta liquidar el préstamo. Supongamos que no le cobrarán intereses por el préstamo. ¿Cuál es el saldo después del primer pago? ¿Cuáles son los saldos después de los pagos 3 y 5? ¿Cuánto ha pagado en 5 quincenas?

Solución:

Se tiene que la sucesión de pagos es una sucesión aritmética con $a_1 = 500$ *y* $d = 500$.

La sucesión de pagos es: 500, 1000, 1500, 2000, 2500, ...

El saldo de la deuda, después de cada pago está dado por: $s_n = 10000 - \sum_1^n a_i$ *pesos.*

Entonces la sucesión de saldos es:

$$\sum_1^n a_i = \frac{n\left[2(500)+(n-1)(500)\right]}{2} = \frac{n[1000+500n-500]}{2} = \frac{n(500+500n)}{2} =$$

$$\sum_1^n a_i = \frac{500n(1+n)}{2} = 250n(1+n)$$

de donde el saldo después de cada pago es: $s_n = 10000 - 250n(1+n)$.

El saldo después del primer pago es:

$$s_1 = 10000 - 250(1)(1+1) = 10000 - 250(2) = 10000 - 500 = 9500 \text{ pesos}$$

El saldo después del pago 3 es:

$$s_3 = 10000 - 250(3)(1+3) = 10000 - 750(4) = 10000 - 3000 = 7000 \text{ pesos}$$

El saldo después del pago 5 es:

$$s_5 = 10000 - 250(5)(1+5) = 10000 - 1250(6) = 10000 - 7500 = 2500 \text{ pesos}$$

En 5 quincenas ha pagado:

$$\sum_1^n a_i = 250n(1+n) = 250(5)(1+5) = 1250(6) = 7500 \text{ pesos}$$

La sexta quincena debería pagar 3000 pesos, pero su saldo en la quincena 5 era de 2500 pesos. Así que la sucesión termina en la quinta quincena. La sexta solo pagará 2500 pesos en lugar de 3000 pesos.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones (1): Organizados en equipos, realicen la investigación sobre series o sucesiones numéricas aritméticas y geométricas; elaboren un cartel para exponer la información y escriban ejemplos que muestren la diferencia entre sucesiones aritméticas y geométricas.

Instrucciones (2): En equipos de cuatro o cinco participantes, redacten 5 ejemplos de datos de tu vida cotidiana o de su entorno que identifiquen sucesiones aritméticas y geométricas. Después, expliquen la forma de usarlos de modo que las operaciones con ellos produzcan nuevos datos. Por último, elijan a uno de los integrantes del equipo para exponer sus ejemplos y conclusiones ante el grupo.

Instrucciones (3): Resuelve el en tu cuaderno de trabajo el siguiente ejercicio.

Sabiendo que el término n–ésimo de una sucesión es $a_n = 5a_{n-1} + 1$:

a) Encuentra los primero 5 términos de la sucesión dado que $a_1 = 8$.

b) Determina si la sucesión 6, 10, 18, 34, ... es una sucesión aritmética o no.

c) Encuentra los siguientes dos términos de la sucesión 1001, 900, 799, 698, ...

d) Dada la sucesión 80, 103, 126, 149, ... encuentra el término a_{20}.

e) Los pagos mensuales efectuados por un préstamo forman una sucesión aritmética. Si el séptimo pago fue de 340 pesos y el onceavo pago fue de 200 pesos, ¿de cuánto será el quinceavo pago?

f) Encuentra la suma de los primeros 25 términos de la sucesión en la que $a_1 = -27$ y $d = 15$.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Identifica gráficamente el tipo de relación variacional en la fórmula del n–ésimo término de sucesiones aritméticas particulares

Las series y sucesiones aritméticas representan la relación de números y posiciones en secuencias ordenadas. Sabes que una relación entre dos variables puede representarse gráficamente en el plano cartesiano, por medio de puntos $P(x, y)$.

En el plano cartesiano se localizan puntos a partir de dos coordenadas:

$$P(abscisa, ordenada)$$

La abscisa se localiza en el eje horizontal y la ordenada en el eje vertical.
El término n–ésimo de una sucesión aritmética está dado por la expresión:

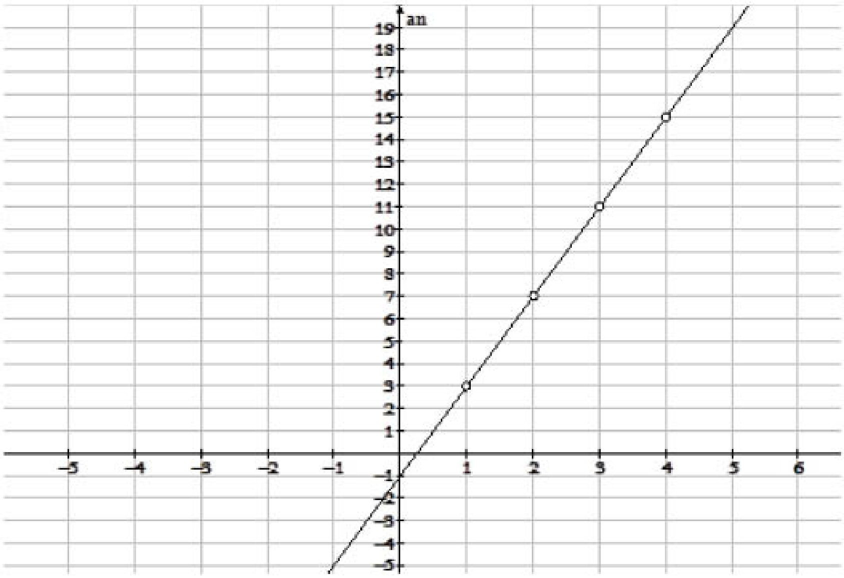
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Si graficamos esta expresión de modo que el eje vertical se use para a_n y el eje horizontal para n, entonces de la sucesión aritmética solo necesitamos conocer los valores a_1 y d.

Consideremos la sucesión aritmética 3, 7, 11, 15, … y asociemos cada posición con el número en esa posición, entonces tenemos la secuencia de puntos siguiente:

$$(1,3), (2,7), (3,11), (4,15), \dots .$$

Grafiquemos estos puntos:



Observamos que la gráfica muestra una línea recta, cuya ecuación está dada por la expresión:

$$a_n = 3 + (n-1)(4) = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$$

Cambiando a_n por y y n por x, la ecuación de la sucesión es: $y = 4x - 1$.

En general, una sucesión aritmética tiene una ecuación dada por la expresión:

$$y = a_1 + (x-1)d$$

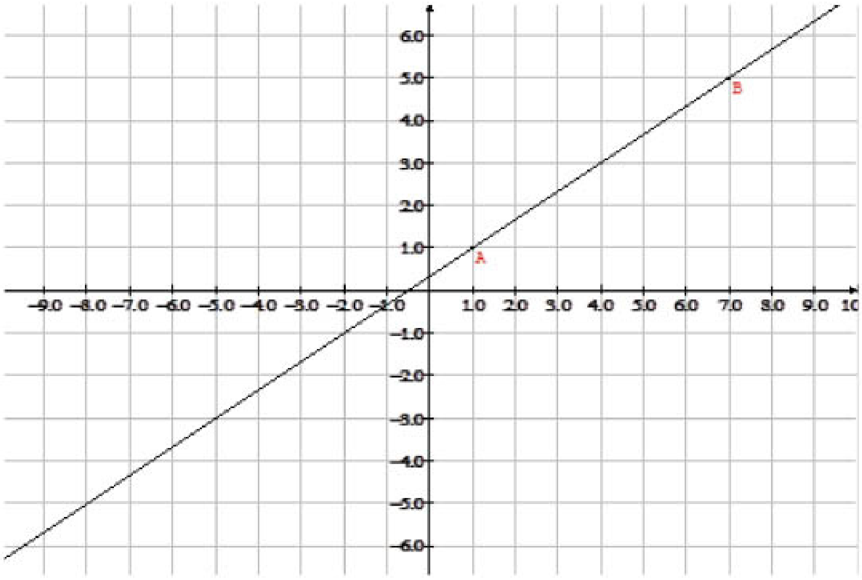
La representación de esta expresión en el plano cartesiano es la de una *recta*.

Ejemplo 1: Si la gráfica de una sucesión aritmética pasa por los puntos (1,1) y (7,5), encuentra la suma de sus primeros 5 términos. Determina también la ecuación de la sucesión.

Solución:

(La gráfica se muestra en la siguiente página)

Continúa...



$$a_1 = 1 \qquad a_7 = 5$$

De donde: $d = \frac{5-1}{7-1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Por lo tanto: $a_5 = 1 + (5-1)\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + 4\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + \left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}\right)$

Entonces, la suma de los primeros 5 términos es:

$$S = \frac{5\left(1 + \left(\frac{11}{3}\right)\right)}{2} = \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{70}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3}$$

La serie es: $S = 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \frac{11}{3} = 4 + \frac{23}{3} = \frac{35}{3}$*, que es lo obtenido.*

La ecuación es: $y = 1 + (x-1)\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Para toda sucesión aritmética se tiene una línea recta al graficar los términos de ella con respecto a la posición. Para demostrar que esta afirmación es verdadera, completa la actividad siguiente.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones (1): Lee con atención las indicaciones que se presentan en los numerales y en tu libreta realiza las operaciones y procedimientos necesarios para obtener las soluciones.

1. Obtén el término general de la sucesión aritmética: 7, 14, 21, 28,35, …
2. Calcula el valor del término 80 de la sucesión.

Aplica la expresión	$a_n = a_1 + (n-1)(d)$
a_1 = Diferencia = n =	
Sustituye valores	
Término general	
Calcula el término 80	
Sustituye valores en la fórmula	
Término 80	
Comprueba: sustituye los valores en la fórmula del término general	

Instrucciones (2): Resuelve los siguientes problemas, anotando en tu libreta los procesos completos que sean evidencia de la aplicación de las propiedades y conceptos estudiados.

a) Grafica la sucesión – 2, 2, 6, 10, …

b) Si en una sucesión aritmética $a_2 = 7$ y $a_5 = -11$ grafica la sucesión en el plano cartesiano.

c) Una serie aritmética tiene 5 términos, con una diferencia entre dos términos consecutivos de 3 y cuya suma es igual a 70. Elabora la gráfica de la sucesión aritmética.

d) Una serie aritmética cuyo primer término es cero tiene 10 términos. La suma de todos ellos es 180. Grafica la sucesión en el plano cartesiano.

e) Si la gráfica de una sucesión pasa por los puntos (0,5) y (10,0), encuentra a_6.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Sucesiones geométricas

A continuación se propone un breve ejercicio para introducirnos al concepto de sucesione geométricas.

Construyan una fila de triángulos empleando el menor número de palillos posible.

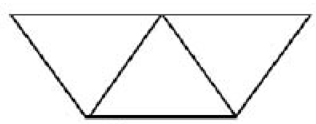


Figura 3.4.

Anoten en la tabla el número de triángulos y el número de palillos empleados	Número de triángulos (T)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Número de palillos (P)	3									

¿Cuántos palillos se necesitan para hacer una fila de 550 triángulos?	
¿Cuántos triángulos se pueden construir en fila con 3545 palillos?	
Escriban una ecuación para calcular el número de triángulos que se pueden construir con un número P de palillos.	
Conclusiones	

Reconoce términos de sucesiones geométricas

Una sucesión geométrica es una secuencia o progresión de términos donde el sucesor es igual al antecesor multiplicado por un factor r, llamado razón.

Así, si el primer término es a_1, entonces:

$$a_2 = a_1 \cdot r \qquad a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2 \qquad a_4 = a_3 \cdot r = \left(a_1 \cdot r^2\right) \cdot k = a_1 \cdot r^3$$

$$\text{y en general } a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

El valor de r puede calcularse a partir de dos términos consecutivos de una sucesión geométrica por división:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Para identificar una sucesión geométrica, divida algún término entre su antecesor y pruebe que el resultado obtenido es el mismo para cualquier otro término dividido entre su antecesor. El valor obtenido de las divisiones, si es constante, es el que se definió como la razón r.

Ejemplo 1: Determina si la sucesión 2, 6, 18, 54,… es una sucesión geométrica. En caso afirmativo, encuentra el valor de la razón geométrica.

Solución:

$$r_1 = \frac{54}{18} = 3 \qquad r_2 = \frac{18}{6} = 3 \qquad r_3 = \frac{6}{2} = 3$$

Por lo tanto se trata de una sucesión geométrica con $r = 3$

Ejemplo 2: Determina si la sucesión $r_3 = \frac{6}{2} = 3 \;\; \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots$

Solución:

$$r_1 = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \qquad r_2 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

De donde la sucesión es geométrica con $r = \frac{1}{3}$

Así el término siguiente a $\frac{1}{18}$ *es* $\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{54}$

Reconoce la forma algebraica del término n–ésimo de sucesiones geométricas particulares

Por definición de una sucesión geométrica, tenemos que $a_n = a_{n-1} \cdot r$, que como se analizó antes, puede expresarse también como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, que es la expresión del término n–ésimo de una sucesión geométrica como se explicó antes.

Ejemplo 1: Dada la sucesión geométrica $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots$ encuentra el término a_5.

Solución:

$$r = \frac{1}{3} \text{ por lo que } a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{81}\right) = \frac{1}{162}$$

Ejemplo 2: Se deja caer una pelota desde una altura de 10 metros. Cuando rebota alcanza la mitad de la altura desde la que se dejó caer. ¿A qué altura se encuentra la pelota después de 5 rebotes?

Solución:

$a_1 = 5$ *por que al primer rebote alcanza la mitad de la altura desde donde se lanzó.*

$$Y\ r = \frac{1}{2}, \text{ entonces } a_5 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16} = 0.3125$$

Por lo tanto, la pelota alcanzará una altura de 0.3125 metros (31.25 cm) en el quinto rebote. La sucesión es: 5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, ...

Series geométricas

Son la suma de los términos de una sucesión o progresión geométrica, por lo tanto:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$$

La fórmula anterior es la que usamos para hallar la suma cuando conocemos el primer término, la razón y la cantidad de términos en la serie geométrica.

Si conocemos dos términos, no consecutivos, de la serie geométrica, entonces podemos conocer la razón por el procedimiento siguiente:

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{\cancel{a_1} r^{j-1}}{\cancel{a_1} r^{i-1}} = r^{j-\cancel{1}-i+\cancel{1}} = r^{j-i}$$

$r^{j-i} = \frac{a_j}{a_i}$, de donde: $r = \sqrt[j-i]{\frac{a_j}{a_i}}$, de aquí se puede calcular $a_1 = \frac{a_i}{r^{i-1}} = \frac{a_j}{r^{j-1}}$

Ejemplo 1: Encuentra la suma de los primeros 10 términos de la serie geométrica: 1, 3, 9, … .

Solución:

Para esta serie $a_1 = 1$, $r = \frac{9}{3} = 3$ *y* $n = 10$, *por lo tanto:*

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{1\left(3^{10} - 1\right)}{3 - 1} = \frac{59049 - 1}{2} = \frac{59048}{2} = 29524$$

Ejemplo 2: El tercer término de una serie geométrica es 50 y el séptimo es 31250. Encuentra la razón y la suma de los primeros 5 términos de la serie.

Solución:

$r^{7-3}=\dfrac{31250}{50}$, *que es lo mismo que* $r^4=625$, *sacando raíz cuadrada a ambos lados tenemos* $\sqrt{r^4}=\sqrt{625}$, *de donde* $r^2=25$ *y, finalmente,* $r=5$.

Se pudo calcular directo: $r=\sqrt[4]{\dfrac{31250}{50}}=\sqrt[4]{625}=5$

El primer término es: $a_1=\dfrac{50}{5^2}=\dfrac{50}{25}=2$

Ahora, calculemos la suma: $S=\dfrac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}=\dfrac{2\left(5^5-1\right)}{5-1}=\dfrac{\cancel{2}(3125-1)}{\cancel{4}}=\dfrac{3124}{2}=1562$

Comprobación:

$$2+10+50+250+1250=1562$$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios, realizando los procedimeintos con orden y limpieza en tu libreta. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase.

a) Determina si la sucesión $1,\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4},\dfrac{27}{8},\dfrac{81}{16},\ldots$ es una sucesión geométrica.

En caso afirmativo, calcula la razón geométrica y el sexto término de la sucesión.

b) Encuentra los primeros 5 términos de la sucesión cuyo término n–ésimo es

$$a_n=\frac{a_{n-1}+3}{2} \text{ con } a_1=-2$$

c) Determina si la sucesión 2, −6, 18, −54 es una serie geométrica o no. Si lo es, entonces determina la razón geométrica, el quinto término y la suma de los primeros 5 términos.

d) Calcula $\sum_{i=1}^{5} \frac{3i-1}{2}$.

e) Para la serie geométrica 1 + 3 + 9 +… determina la razón geométrica, el quinto término y la suma de los primeros 5 términos.

f) El segundo término de una serie geométrica es $\frac{3}{4}$ y el quinto término es $\frac{81}{4}$.

Calcula la razón geométrica y la suma de los primeros 6 términos.

g) Encuentra el primero y el sexto términos de la serie geométrica con $r = 2$, $n = 6$ y $S = \frac{63}{4}$.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si construyes una sucesión de números naturales (enteros positivos). Con la siguiente regla : Iniciando por un número cualquiera, digamos, 7. Éste va a ser el primer elemento de nuestra sucesión.

Para generar el segundo elemento, hacemos lo siguiente: si el número es par, lo dividimos por dos. En cambio, si es impar, lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1. Así sucesivamente, obtener todos los términos de la sucesión. Elegir cualquier otro número, podrían ser 24, 100, ... , etc.

- Encuentra alguna particularidad de las sucesiones.
- ¿Cuál es el número en el que finalizan estas sucesiones?

Explícalo en las siguientes líneas:

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Identifica gráficamente el tipo de relación variacional en la fórmula del n–ésimo término de sucesiones geométricas particulares

Las sucesiones aritméticas dan lugar a líneas rectas en el plano cartesiano. La suma de un valor constante define a las sucesiones aritméticas. En cambio, las sucesiones geométricas se definen a partir de la multiplicación de un término de la serie por un número constante: la razón geométrica.

Con base en el procedimiento para graficar sucesiones aritméticas, podemos elaborar gráficas para sucesiones geométricas.

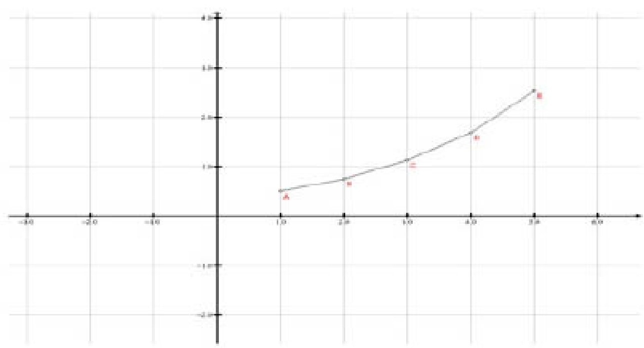
> El término n-ésimo de una serie geométrica es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, que usando las variables *x* y *y* se puede escribir como: $y = a_1 \cdot r^{x-1}$.

Ejemplo: Elabora la gráfica para la sucesión geométrica $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}$.

Solución:

Los puntos de la sucesión geométrica a graficar son:

$$\left(1, \frac{1}{2}\right) \quad \left(2, \frac{3}{4}\right) \quad \left(3, \frac{9}{8}\right) \quad \left(4, \frac{27}{16}\right) \quad \left(5, \frac{81}{32}\right)$$



La gráfica muestra que una sucesión geométrica produce una curva en el plano cartesiano. La razón geométrica de la sucesión es:

$$r = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3(\cancel{2})}{-(1)} = \frac{3(1)}{2} = \frac{3}{2}$$

La ecuación de esta sucesión geométrica es:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$$

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: Lee con atención lo que se plantea en cada uno de los problemas y en tu libreta realiza los procedimientos con orden y limpieza para obtener la solución de cada uno de ellos.

a) Elabora la gráfica de la sucesión 5, 20, 80, 320, ...

b) Si la ecuación de una serie geométrica es $y = 2 \cdot (5)^{x-1}$, encuentra el término a_{10} y la suma de los primeros 5 términos.

c) Una serie geométrica tiene 5 términos con $r = 3$ y cuya suma es 242. ¿Cuál es el primer término de la sucesión? Elabora la gráfica de esta sucesión.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad 5

Producto de aprendizaje: investigación sobre el trabajo matemático del italiano Fibonacci

Las sucesiones y las series aritméticas se relacionan con muchos procesos sociales. Tal es el caso del crecimiento de poblaciones vegetales, animales o humanas. Investiga sobre el trabajo del matemático italiano Fibonacci acerca de la reproducción de conejos.

Instrucciones: En equipos de cinco personas elaboren una investigación. El documento contara con carátula, desarrollo del tema y una conclusión que describa la importancia de esta investigación y sus aplicaciones en la solución de problemas cotidianos en distintos ámbitos de los estudiantes (escolar, familiar y social). Así mismo elaboren dos mapas conceptuales sobre el tema en hojas de rotafolio o cartulina para presentárselas a sus compañeros.

¡Manos a la obra!

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad 6

Producto de aprendizaje: integrar tu portafolio de evidencias

Esta actividad consiste en Integrar tu portafolio de evidencias con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las seis actividades presentadas a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del portafolio de evidencias, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para entregar tu portafolio de evidencias a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre de la escuela, asignatura, bloque, leyenda: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante, semestre, grupo y fecha de entrega) y un índice.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: investigación sobre el trabajo matemático del italiano Fibonacci

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Contenido	Información sobre el trabajo matemático del italiano Fibonacci.			
	Conclusiones que describen la importancia de la investigación.			
	Presenta aplicaciones de esta investigación en problemas cotidianos.			
	Presenta un mapa conceptual con más de 5 conceptos con conectores pertinentes.			
Presentación	Los enunciados de la información son claros y especifican claramente los datos para resolver los problemas.			
	Material visualmente atractivo, funcional para el grupo y contenido completo.			
	Presenta una carátula, desarrollo del tema, conclusiones, mapa conceptual y bibliografía.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Trabajo con orden y limpieza.			
Total de puntos		9		

Si en la lista de cotejo lograste los **9 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **7 a 8 puntos** es **Bien**, de **5 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 7** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	El portafolio es entregado de forma impresa y limpio.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden en los procedimientos.			
	Presenta índice.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	Actividades sin error.			
	Actividad de reflexión.			
Actitud	Comparte sus ideas y acepta las de sus compañeros.			
	Valora la importancia del orden y limpieza en los trabajos.			
	Realizó sus trabajos de forma colaborativa.			
Total de puntos		**11**		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 10 puntos** es **Bien**, de **7 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 7** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque III

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
	Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque IV

Realizas transformaciones algebraicas I

Introducción

En este bloque aprenderás a desarrollar las expresiones con una variable y te darás cuenta que las operaciones algebraicas son las mismas que las de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división, potenciación y radicación), para ello recordaras algunos conceptos, definición y nombre de los polinomios de acuerdo al número de términos; así como el orden de un polinomio. Posteriormente aprenderás a reducir términos semejantes mediante las operaciones mencionadas.

En la vida cotidiana encontraras situaciones que se pueden plantear y resolver mediante el uso del algebra y sus operaciones. El estudio de las operaciones con polinomios de una variable, productos notables, factorización y simplificación del lenguaje algebraico te proporcionarán los elementos necesarios para crear posteriormente modelos matemáticos que te permitirán plantear soluciones a situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

Comprenderás que una expresión no es simplemente un conjunto de letras y números sino que representa alguna situación real que puede ser resuelta mediante el álgebra; como problemas de áreas y volumen con base en los métodos geométricos (figuras y formas) y aritméticos (patrones numéricos.)

Otros de los subtemas que se verán dentro de este bloque son los productos notables los cuales te permitirán efectuar operaciones algebraicas de manera rápida al aplicar las reglas para los casos del binomio al cuadrado, binomios con término común, binomios conjugados y binomios al cubo.

Posteriormente reconocerás que el binomio al cuadrado y el binomio al cubo son casos específicos del triángulo de Pascal; además aprenderás a utilizar el triángulo de Pascal para desarrollar un binomio de grado *n*.

Finalmente identificaras la factorización como un proceso inverso a la multiplicación; esto significa que dado un producto se determinarán sus factores. A partir de la factorización mediante trinomio cuadrado perfecto, trinomio cuadrático con un término común, diferencia de cuadrados y diferencia de cubos.

Figura 4.1.

En medicina se utiliza de forma explícita la ciencia de las matemáticas para evaluar la salud de un paciente cuando se presenta algún riesgo de padecer problemas de obesidad. Para esto es necesario determinar la cantidad de grasa presente en el cuerpo humano. Los investigadores han encontrado que el peso no es el mejor indicador de la grasa corporal, así que desarrollaron una fórmula que relaciona la estructura de los huesos con la cantidad de grasa real. El polinomio $0.49W + 0.45P - 6.36R + 8.7$, donde W representa la medida de la circunferencia de la cintura en centímetros, P la medida del grosor de la piel pectoral en milímetros y *R* la medida del diámetro de la muñeca en centímetros. Esta es una estimación dela grasa que hay en el cuerpo de un hombre (Stanley, Smith y otros, 1992).

¿Qué competencias desarrollarás?

En este bloque trabajarás para lograr el desarrollo de las siguientes competencias.

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*

Continúa...

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Representas y resuelves problemas geométricos y algebraicos, a través de la aplicación de reglas de exponentes, operaciones con polinomios, productos notables y factorización.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Polinomios de una variable • Operaciones con polinomios • Suma de polinomios • Multiplicación • Multiplicación de Binomios • Productos notables • Factorización de polinomios	• Elaboras un resumen acerca de los polinomios de una variable en el que identifiques los elementos de un polinomio y cómo se llaman cada uno de ellos. • Enuncias y analizas de forma verbal o escrita las diferentes formas de factorización.

Procedimentales	• Identificas las operaciones de suma, resta, multiplicación de polinomios de una variable. • Ejecutas sumas, restas y multiplicaciones con polinomios de una variable. • Empleas productos notables para determinar y expresar el resultado de multiplicaciones de binomios. • Comprendes las diferentes técnicas de factorización, de extracción de factor común y agrupación; de trinomios cuadrados perfectos y de productos notables a diferencia de cuadrados perfectos. • Formulas expresiones en forma de producto, utilizando técnicas básicas de factorización. • Utilizas los productos notables de diferencia de cuadrados y de trinomios cuadrados perfectos.	• Elaboras una serie de reactivos de los polinomios de una variable en el que • Identifique los elementos de un polinomio y cómo se llama cada uno de ellos. • Propones problemas en los que plantees situaciones hipotéticas o reales de tu entorno para determinar perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas. • Realizas ejercicios aplicando los métodos de factorización. • Utilizas suma, resta y multiplicación, productos notables, factorizaciones básicas (factor común, diferencia de cuadrados perfectos, producto de binomios y trinomios cuadrados perfectos) y sus combinaciones para obtener la solución de problemas de tu entorno.
Actitudinales	• El valor del respeto . • Trabajo colaborativo e individual.	• Respetas y escuchas con atención a los demás. • Aportas puntos de vista con apertura y consideras los de otras personas de manera reflexiva. • Respetas a tus compañeros y trabajas de forma colaborativa e individual.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Para el desarrollo de este bloque utilizarás diez horas, cinco para los contenidos temáticos y cinco horas para las actividades planteadas y el desarrollo del proyecto.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos:

- Portafolio de evidencias
- Resolución de problemas diversos

Portafolio de evidencias. Lo podrás hacer en una libreta o en un cuaderno, que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones que te permitan llegar a soluciones de los problemas que se te presenten en las actividades de este bloque. Estos deben mostrar un orden y limpieza

Problemas diversos. De forma individual reflexiona sobre la solución de los ejercicios de los productos notables, expresiones algebraicas y factorización, que se te presentan al concluir el bloque. En tu cuaderno podrás realizar los procedimientos y operaciones

Para iniciar, reflexiona

El álgebra es la rama de las matemáticas que trata del cálculo de las cantidades representadas por letras. El desarrollo del álgebra ha sido un trabajo en equipo, en el cual egipcios, hindúes, griegos y árabes han participado en su desarrollo. Los árabes desarrollaron los métodos algebraicos e introdujeron los *polinomios*. El término álgebra proviene de la palabra árabe *al-jabru*, que significa "restauración" o "reunión". Esta palabra aparece en el título de un tratado matemático del año 830 escrito por el persa Al-Hwarizmi.

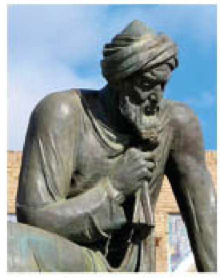
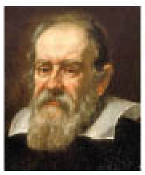


Figura 4.2. Escultura de Al-Hwarizmi

¿Sabías que se puede calcular la altura de una cascada o de un edificio de varios pisos, a partir de la caída libre?, para estudiar la caída de los cuerpos Galileo Galilei, arrojaba objetos desde lo alto de la torre de Pisa.



Breve biografía de **Galileo Galilei**

(1564-1642). Astrónomo, filósofo, matemático y físico italiano que estuvo relacionado estrechamente con la revolución científica. Galileo realizó notables aportaciones científicas en el campo de la física, que pusieron en entredicho teorías consideradas verdaderas durante siglos. Así, por ejemplo, demostró la falsedad del postulado aristotélico que afirmaba que la aceleración de la caída de los cuerpos en caída libre era proporcional a su peso, y conjeturó que, en el vacío, todos los cuerpos caerían con igual velocidad. Por lo que concluyó que despreciando el aire, todos los cuerpos caen con la misma aceleración sin importar su peso o su forma.

La representación matemática del movimiento vertical de cualquier cuerpo en caída libre, donde se desprecia la resistencia del aire, y la velocidad inicial es cero, se resume en las siguientes expresiones en términos algebraicos.

a) Para calcular velocidad se utiliza: $v_f = gt$

v_f es la velocidad con que cae el cuerpo medida en metros por segundos ($\frac{m}{s}$).

b) Para calcular altura se utiliza: $h = \frac{gt^2}{2}$

t es el tiempo medido en segundos (s).

c) Para calcular tiempo: $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

h es la altura en metros (m).

g es la aceleración de la gravedad con un valor de $9.8\dfrac{m}{s^2}$

Instrucción: Lee con atención los enunciados y reflexiona cuál de las tres expresiones anteriores utilizarías para dar respuesta a las preguntas siguientes.

1. Si uno de tus compañeros está en un segundo piso de la escuela el cual se encuentra una altura de 4 metros con respecto al suelo y deja caer una pelota, ¿cuánto tiempo tarda en caer la pelota?, considerando que el movimiento que describe la pelota es de caída libre.

2. Si dejas caer libremente un lápiz y tarda 5 segundos en llegar al suelo, ¿con que velocidad cae?

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Para comprender los nuevos temas de este bloque, es conveniente reactivar tus conocimientos previos, para ello te proponemos realizar el siguiente ejercicio.

Instrucciones: Un arquitecto desea construir una casa y realiza el plano mostrado en la figura 4.3. Con base en la información del plano responde a las siguientes preguntas

a) ¿Cómo determinas el área que ocupa la casa?

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la casa?

....

....

c) Escribe las expresiones algebraicas para calcular el área que ocupan las recámaras?

....

....

d) ¿Cuál es el perímetro de la casa?

....

....

e) ¿Qué operaciones utilizaste para los incisos b, c y d?

....

....

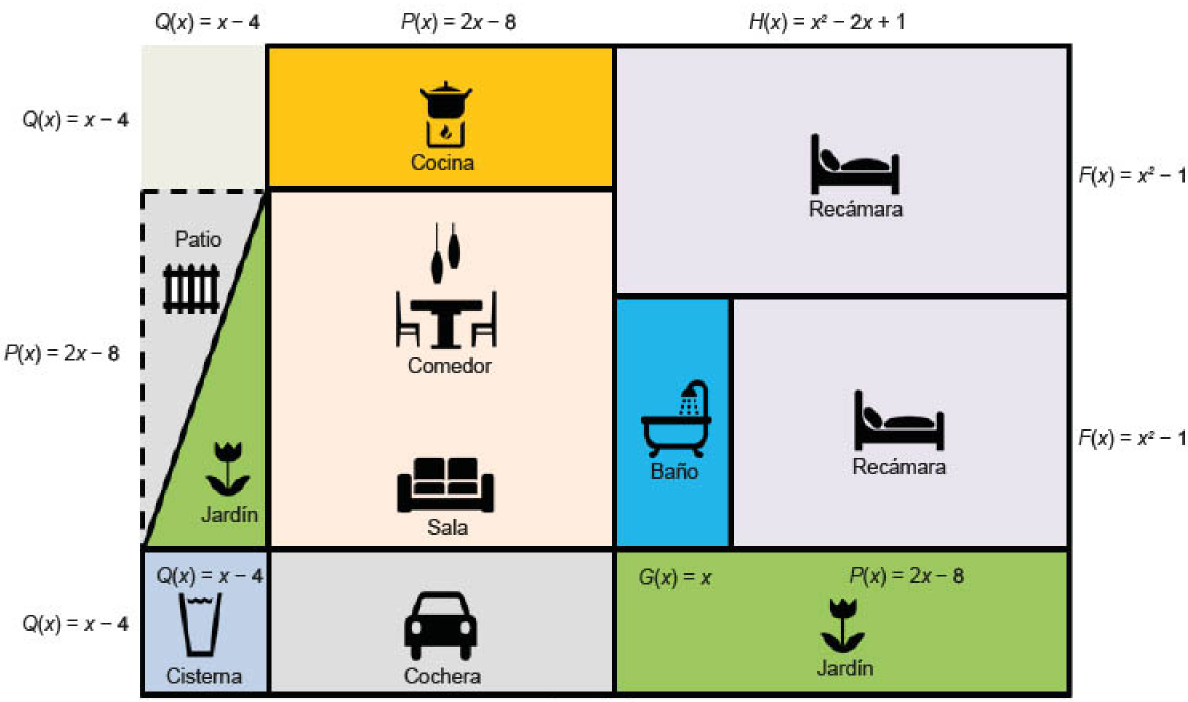


Figura 4.3. Plano de la construcción.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 5 a 4 preguntas considera tu resultado como **Bien**, de 3 a 2 como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de 2 considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: Aritmética, áreas de figuras geométricas y ecuaciones de primer grado.

Aprende más

Polinomios de una variable

Para iniciar con el tema de polinomios es necesario recordar qué es un **término** y qué es un término semejante.

Término: Es toda cantidad de una expresión algebraica.

Las partes de un término son:

Signo $-3x^2$ Exponente

Coeficiente Literal o variable

Recuerda que cuando una letra no tiene coeficiente o exponente se entiende, que el coeficiente o exponente es 1.

Una *expresión algebraica* puede constar de un término o más, cada término está separado por los signos + o –, dependiendo el número de términos o potencia reciben un nombre común.

Tabla 1.

Denominación de una expresión algebraica según el número de términos		
Nombre	**Definición**	**Ejemplo**
Monomio	Expresión de un solo término	$P(x) = 3x^2$
Binomio	Expresión formada por dos términos	$Q(x) = 4x^3 + 8x$
Trinomio	Expresión formada tres dos términos	$G(x) = -x^2 + 2x + 4$
Polinomio	Expresión formada por más de tres términos	$H(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 2$

Tabla 2.

Denominación de una expresión algebraica según el grado		
Nombre	**Definición**	**Ejemplo**
Lineal	La variable con mayor exponente está elevada a la 1	$P(x) = x + 2$
Cuadrática	Expresión formada por dos términos	$P(x) = x^2 + 2x + 2$
Cúbica	Expresión formada tres dos términos	$Q(x) = x^3 + 2x + 2$

Polinomio: expresión algebraica formada por la suma de términos algebraicos, en la cual los exponentes deben ser términos enteros y positivos.

Un ejemplo de un enunciado que se transforma en una expresión algebraica denominada polinomio es el siguiente:

Figura 4.4.

Los vendedores de automóviles tienen un salario fijo más una comisión o porcentaje por las ventas realizadas en el mes, por ejemplo si el empleado tiene un sueldo de 3000.00 pesos más el 5% por el monto de las ventas (x) que realice durante el mes. Esta situación se expresa de la siguiente forma: $3000 + 0.05x$; lo que nos dará el sueldo total del mes, a esta expresión se le conoce como **polinomio**.

El *grado de un monomio* depende del exponente de la parte literal. Si solo se tiene una variable el grado es el exponente de la variable; si se tiene más de una variable el grado es la suma de los exponentes de las variables. Ejemplos:

$4x^4$ es un monomio de grado 4 y coeficiente 4
$3x^3y^2z$ es un monomio de grado 6 y coeficiente −3

El *grado de un polinomio* coincide con el grado más alto de los monomios que lo componen. Ejemplo:

$P(z) = z^5 + 4z^4 - z + 2$ es un polinomio de quinto grado

Se recomienda escribir los polinomios del grado mayor al grado menor y al final el término independiente.

Polinomio completo. Es aquel que contiene todos los exponentes consecutivos con respecto a una variable. Ejemplo:

$$3x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 3$$

Polinomio incompleto. Si le faltan monomios de algún grado, es un polinomio. Ejemplo:

$$3x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x + 3$$

Evaluación de un polinomio

El valor numérico de un polinomio es el valor que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones indicadas en la expresión.

Para ilustrar la evaluación retomemos el polinomio que sirve para determinar la cantidad de grasa de un alumno de 20 años con medidas de W = 80 cm, P = 4 mm y R = 5 cm. Sustituyendo los valores en el polinomio se tiene:

$$G = 0.49(80) + 0.45(4) - 6.36(5) + 8.7 = 39.2 + 1.8 - 31.8 + 8.7$$
$$G = 17.9\ \%$$

El Índice de Grasa Corporal o porcentaje de grasa corporal nos indica la proporción de grasa de nuestro cuerpo. En otras palabras, nos dice si estamos en forma. Las tablas en la siguiente página explican los porcentajes de la figura 4.5.

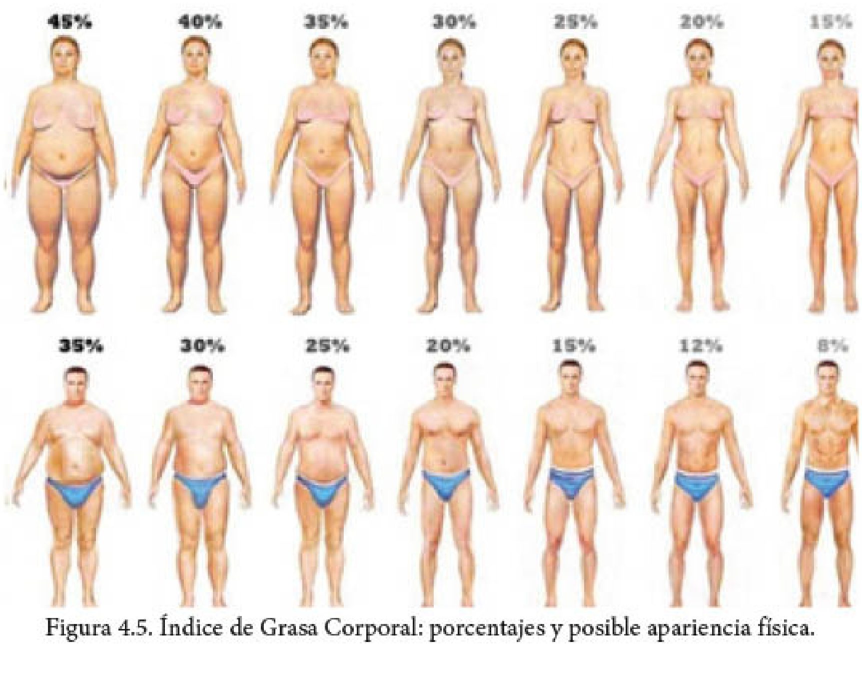


Figura 4.5. Índice de Grasa Corporal: porcentajes y posible apariencia física.

Tabla 3.

Índice de Grasa Corporal (varones)[1]				
Rango de edad	**Demasiado bajo**	**Niveles recomendados**	**Sobrepeso**	**Obeso**
20 - 30 años	Menos de un 8%	8% - 19%	19% - 25%	Más de 25%
31 - 40 años	Menos de un 8%	8% - 19%	19% - 25%	Más de 25%
41 - 50 años	Menos de un 11%	11% - 22%	22% - 27%	Más de 27%
51 - 60 años	Menos de un 11%	11% - 22%	22% - 27%	Más de 27%
61 - 70 años	Menos de un 13%	13% - 25%	25% - 30%	Más de 30%
71 - 80 años	Menos de un 13%	13% - 25%	25% - 30%	Más de 30%

Tabla 4.

Índice de Grasa Corporal (mujeres)[2]				
Rango de edad	**Demasiado bajo**	**Niveles recomendados**	**Sobrepeso**	**Obeso**
20 - 30 años	Menos de un 21%	21% - 33%	33% - 39%	Más de 39%
31 - 40 años	Menos de un 21%	21% - 33%	33% - 39%	Más de 39%
41 - 50 años	Menos de un 23%	23% - 35%	35% - 40%	Más de 40%
51 - 60 años	Menos de un 23%	23% - 35%	35% - 40%	Más de 40%
61 - 70 años	Menos de un 24%	24% - 36%	36% - 42%	Más de 42%
71 - 80 años	Menos de un 24%	24% - 36%	36% - 42%	Más

[12]**Fuente:** http://www.weightlossforall.com/es/porcentaje-de-grasa-corporal-ideal-en-hombres-y-mujeres

Considerando la figura 4.4 y la tabla 3 y 4 podemos concluir que el alumno está dentro de los niveles recomendados.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Lee con atención las indicaciones de los numerales I y II, para dar respuesta. Al concluir comenta con uno de tus compañeros cada uno de los resultados de los ejercicios. Asimismo, escucha los resultados de tu compañero y reflexiona sobre cuál será la solución correcta.

I. Completa los siguientes enunciados:

a) Una expresión algebraica es una expresión matemática en la que se combinan .... y números.

b) Las .... representan las incógnitas.

c) Una expresión algebraica con tres términos se llama ....

d) Los exponentes de un polinomio deben ser .... y ....

II. Completa los siguientes enunciados:

a) La parte literal es b y tiene exponente 3.	( )	$8y^4z^4$
b) La parte literal tiene dos incógnitas su grado es 8 y su coeficiente es 8.	( )	$\frac{1}{3}x^3y$
c) El coeficiente es un tercio del exponente.	( )	$-4b^3$
	( )	$3y^9$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Operaciones con polinomios

Suma de polinomios

Para poder realizar sumas o restas entre dos términos de una expresión algebraica es necesario que estos sean semejantes, en cuyo caso lo que se hace es sumar o restar dependiendo los signos que tengan los coeficientes de los términos y se escriben las literales con el mismo exponente.

Volviendo al ejemplo del plano de la casa para determinar el perímetro sumamos el contorno de la cocina es decir:

$$P(x)+Q(x)+P(x)+Q(x)$$

$$P=(2x-8)+(x-4)+(2x-8)+(x-4)$$

Simplificando se obtiene el polinomio que representa el área de la cocina: $P=6x-24$

Para sumar o restar expresiones algebraicas deben ser términos semejantes es decir misma literal y mismo exponente y solo se suman o restan los coeficientes de los monomios y se deja la parte literal igual. Un método práctico para sumar polinomios es ordenando previamente en función del grado de los términos del mayor al menor y situarlos uno debajo del otro, de tal forma que los términos semejantes estén alineados para poder así sumarlos; si el polinomio no es completo, se coloca un coeficiente cero a lo términos que aparecen en uno de los polinomios pero no en el otro.

Ejemplo: Suma los polinomios $3x-5x^2+8x^4$ con el polinomio $x+2x^2-13x^3+3$

Solución:

Primero: se deben ordenar todos los términos de cada polinomio en forma descendente. Respetando los signos de cada término de los polinomios:

$$\begin{array}{r} 8x^4+0x^3-5x^2+3x+0 \\ \underline{0x^4-13x^3+2x^2+x+3} \end{array}$$

Segundo: se realiza la suma.

$$\begin{array}{r} 8x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 3x + 0 \\ + \quad \underline{0x^4 - 13x^3 + 2x^2 + x + 3} \\ 8x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 4x + 3 \end{array}$$

Resta de polinomios

Dados dos polinomios $H(x)$ y $P(x)$, el polinomio que resulta de sumar los términos del minuendo con los inversos aditivos de los términos semejantes del polinomio sustraendo. Por ejemplo si se quiere conocer la diferencia del largo entre las dos recámaras de la casa mostrada en el plano.

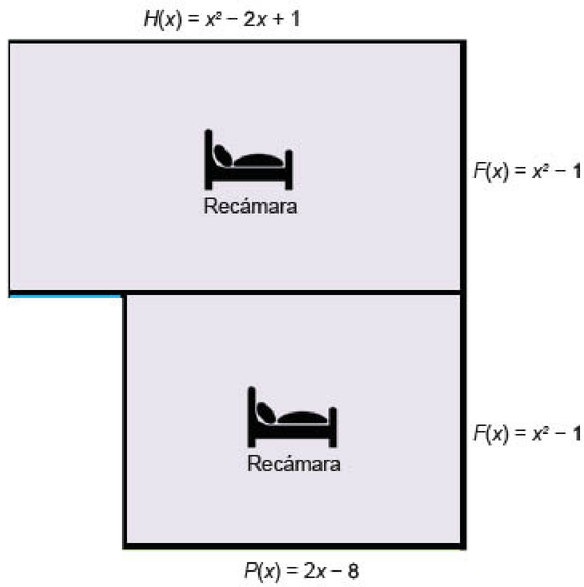


Figura 4.6.

$D(x) = H(x) - P(x)$

$D(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x - 8)$

Realizando la resta y simplificando: $x^2 + 2x + 1 - 2x + 8$

La diferencia del ancho de las recamaras es: $x^2 + 9$

La suma o resta se puede hacer en forma horizontal o vertical. Es importante que recuerdes la propiedad distributiva y las leyes de los signos estudiados en el bloque III.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones (1): Analiza con atención los enunciados y determina las expresiones algebraicas, y las operaciones indicadas, realiza el procedimiento en tu cuaderno y anota el resultado. Al concluir presenta tus resultados a tus compañeros y considera las opiniones de ellos para mejorar tu trabajo.

a) Una caja de arena de 4 × 4 metros se coloca en un terreno cuyo lado tiene x metros de largo expresa el área del terreno en términos de un polinomio.

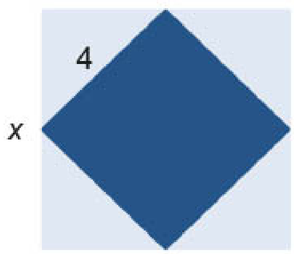


Figura 4.7.

b) Considera los siguientes mosaicos algebraicos de la figura 4.8, para representar polinomios y la suma de estos

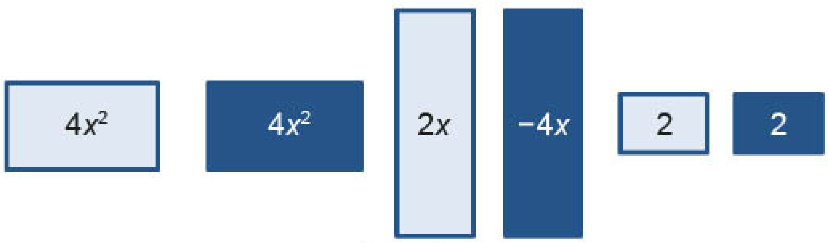


Figura 4.8.

c) Con base a los mosaicos de las figuras 4.9 y 4.10, escribe un polinomio para cada modelo y encuentra la suma y la resta de los dos polinomios.

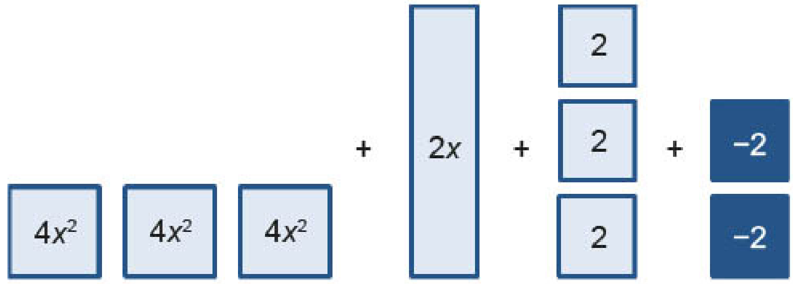


Figura 4.9.

$P(x) =$ ....

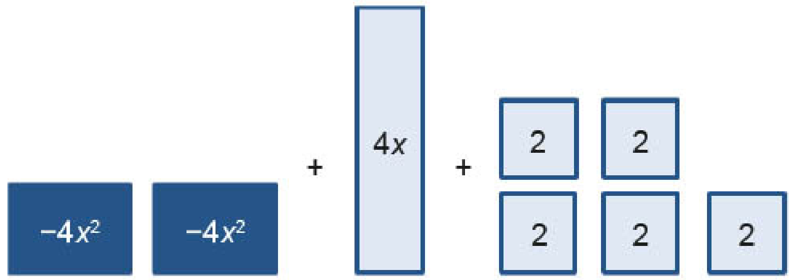


Figura 4.10.

$Q(x) =$ ....

$P(x) + Q(x) =$ ....

$P(x) - Q(x) =$ ....

d) Expresa como un polinomio, la suma se las áreas de los círculos (área del círculo πr^2).

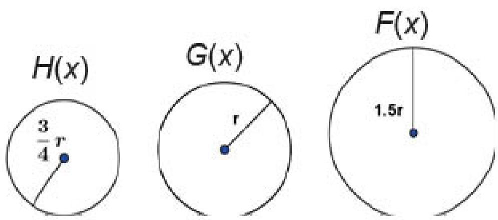


Figura 4.11.

$H(x) + G(x) + F(x) =$ ....

Instrucciones (2): Con el apoyo de uno de tus compañeros determina el perímetro de los siguientes polígonos de la figura 4.12. En tu cuaderno desarrolla los procedimientos y en la parte inferior de cada figura coloca el resultado.

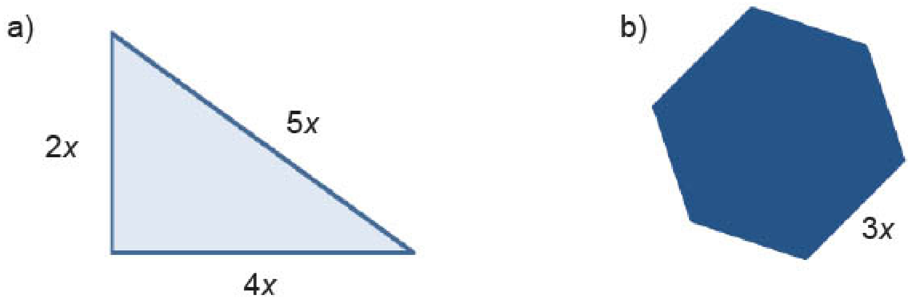


Figura 4.12.

....

Instrucciones (3): Relaciona la columna de izquierda con la derecha escribiendo la letra que le corresponda. Para encontrar la solución correcta desarrolla el procedimiento en tu cuaderno

a) $3a - 4a$	( )	$-3xy$
b) $20xy - 18xy - 3xy + 4xy$	( )	$2\sqrt{m^3}$
c) $2\sqrt{m^3} - 5\sqrt{m^3} + \sqrt{m^3}$	( )	$6xy - 2x^2y$
d) $2x^2y + 5xy - 4x^2y + xy$	( )	$-a$
e) $4\left[2x - 8(2x+6y) - 2(9x-6y)\right] - 4\left[-9(y-x) - 9(x-y)\right]$	( )	$136x + 153y$
	( )	$3xy$
	( )	$-2\sqrt{m^3}$
	( )	$-136x - 153y$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Multiplicación de polinomios

Uno de los ejercicios más interesantes que ocupan mucho de nuestra atención es la multiplicación de polinomios, por lo que antes de iniciar reactivaremos los conocimientos adquiridos de las leyes de los exponentes. Este conocimiento lo llegamos a utilizar cuando queremos determinar áreas de un terreno del plano de la casa o de las habitaciones de tu casa.

Antes de iniciar recordemos las propiedades de los exponentes:

Tabla 5.

Propiedades de los exponentes			
Nombre	**Ley**	**Ejemplo**	**Interpretación**
Producto de dos cantidades con la misma base	$a^n a^m = a^{m+n}$	$x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5$	En la multiplicación de bases iguales los exponentes se suman.
División de dos cantidades con la misma base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1$	En la división de bases iguales El exponente del término en el numerador se resta el exponente del término en el denominador.
Potencia de productos	$(ab)^n = a^n b^n$	$(2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$	El producto de dos cantidades cualesquiera están elevadas a una potencia todos los factores toman el mismo exponente
Potencia de potencia	$(a^n)^m = a^{nm}$	$(x^3)^2 = x^{3\cdot 2} = x^6$	Si una potencia exponencial se eleva a una potencia, se toma la misma base y se multiplican los exponentes.
Potencia cero	$a^0 = 1$	$1000^0 = 1$	Toda cantidad o literal elevada a la potencia cero es igual a uno.
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{y}{2}\right)^3 = \frac{y^3}{2^3} = \frac{y^3}{8}$	Si la división de dos cantidades o literales cualesquiera está elevada a una potencia, tanto el numerador como el denominador toma el mismo exponente.
Potencia negativa	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$	Toda expresión con exponente negativo, es igual a su recíproco.

Multiplicación de monomios

Si multiplicamos dos o más monomios, se multiplican los coeficientes de cada uno de los factores con sus respectivos signos, y las potencias o exponentes de la misma literal se suman, dejando las de distinta literal como están.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento que se sigue para obtener el producto de dos monomios:

$$\left(4x^2y\right)\left(-5x^3y^2z\right)=\left(4\right)\left(-5\right)\left(x^{2+3}y^{1+2}z^1\right)=-20x^5y^3z$$

Multiplicamos los coeficientes.

Los exponentes de las literales de bases iguales se suman.

Como se mencionó un polinomio es la suma de varios monomios, entonces al multiplicar por otro polinomio se emplea la propiedad distributiva tantas veces como sea necesario, es decir se multiplica término a término:

$$(5x^2)(4x+1)=(5x^2)(4x)+(5x^2)(1)=20x^3+5x^2$$

Para multiplicar dos o más polinomios, se tiene que ordenar cada polinomio, preferentemente de forma decreciente, después multiplicar cada término de un polinomio, por todos y cada uno de los términos del otro. Por ejemplo si queremos determinar el área de un terrero cuyas dimensiones se muestran en la figura 4.13.

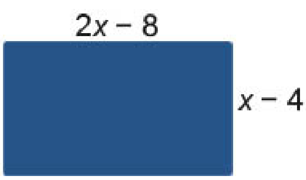


Figura 4.13.

Para multiplicar potencias de la misma base, se deja la base y se suman los exponentes de los factores.

$$\begin{array}{r}
2x-8 \\
x-4 \\
\hline
2x^2-8x \qquad \\
-8x+32 \\
\hline
2x^2-16x+32
\end{array}$$

Recuerda que el área de un rectángulo es $A=(base)(altura)$.

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: En parejas determina el área de las tres figuras geométricas considerando los datos que se muestran en cada una de ellas.

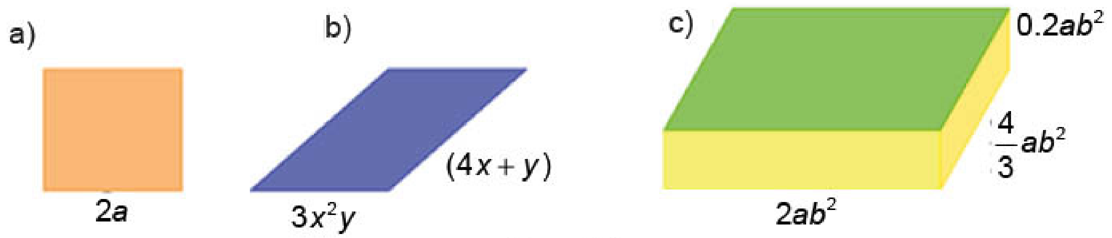


Figura 4.14.

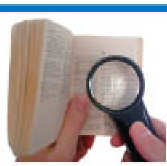
Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Productos notables

Tanto en la multiplicación aritmética como algebraica se sigue un algoritmo, sin embargo existen productos algebraicos que pueden calcularse a través de normas establecidas, estos productos reciben el nombre de **productos notables**.



Productos notables: normas que se establecen para resolver algunas multiplicaciones

Existen cuatro casos principales de productos notables.

Cuadrado de una suma y diferencia de binomio

El producto de un binomio por sí mismo recibe el nombre de *cuadrado del binomio*. El desarrollo de un cuadrado de binomio siempre tiene la misma estructura.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

Si realizamos el producto termino a término:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a^2+2ab+b^2$$

El cuadrado de la suma de dos números, es el cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

El cuadrado del binomio, como otros productos notables, tiene una representación *geométrica* en el plano. Consiste en determinar el área del cuadrado de lado $a + b$.

Figura 4.15.

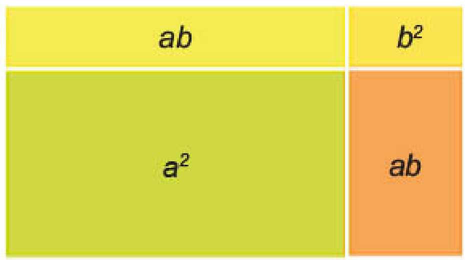


Figura 4.16.

Para determinar el área del cuadrado de la figura 4.14 multiplicamos las longitudes de sus lados, es decir $(a + b)(a + b)$, o lo que es lo mismo sumar las áreas de los rectángulos internos como se muestra en la figura 4.15.

$$(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

Ejemplo 1: Desarrollar el binomio $(2x+7)^2$

Solución:

$$(2x+7)^2=(2x)^2+2(2x)(7)+(7)^2=4x^2+28x+49$$

Ejemplo 2: Desarrollar el binomio $\left(x+\dfrac{2}{5}\right)^2$

Solución:

$$\left(x+\frac{2}{5}\right)^2=(x)^2+2(x)\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)^2=x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}$$

Cuando el binomio es una diferencia, se conoce como el *cuadrado de la diferencia de dos números* es decir:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$$

El cuadrado de la diferencia de dos números, es el cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Geométricamente el cuadrado de la diferencia de un binomio se determina a partir de un cuadrado como se muestra en la figura 4.17.

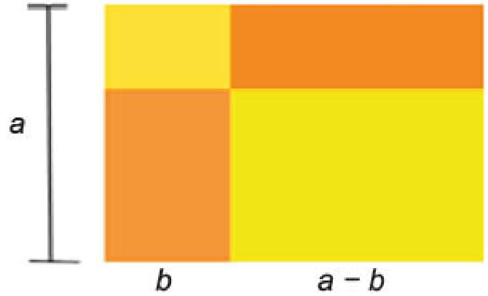


Figura 4.17.

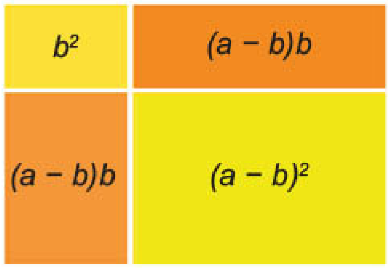


Figura 4.18.

Reordenando el área del cuadrado de $(a-b)$ es:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Binomios con un término común

Corresponde a la multiplicación de binomios donde el primer término es común para ambos binomios por ejemplo:

$$(a+3)(a+1)=a^2+a\cdot 1+3\cdot a+3\cdot 1=a^2+a(1+3)+3=a^2+4a+3$$

Esto significa que el producto de dos binomios con un término en común, es:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

> El binomio con un término en común, es el cuadrado del término común, más la suma de los dos términos distintos multiplicados por el término común, más el producto de los términos distintos.

Algunos ejemplos de binomios con un término común:

$$\left(\frac{3}{5}x+5\right)\left(\frac{3}{5}x-10\right)=\left(\frac{3}{5}x\right)^2+(5-10)\frac{3}{5}x+(5)(-10)=\frac{9}{25}x^2-3x-50$$

$$(e^x+2)(e^x-4)=(e^x)^2+(2-4)e^x+(2)(-4)=e^{2x}-2e^x-8$$

Productos de dos binomios conjugados

Se llama binomios conjugados al producto de la suma de dos números por su diferencia, se caracteriza por ser un producto de dos binomios con términos iguales, que difieren en que un binomio tiene signo positivo y el otro negativo, por ejemplo:

$$(x+2)(x-2)=x^2+2x-2x-4=x^2-4$$

> El producto de dos binomios conjugados es el cuadrado del primer término, menos el cuadrado del segundo término.
>
> $$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

Algunos ejemplos del producto de dos binomios conjugados son:

$$(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-(3)^2=4x^2-9$$

$$\left(\frac{1}{2}a+b\right)\left(\frac{1}{2}a-b\right)=\left(\frac{1}{2}a\right)^2-(b)^2=\frac{1}{4}a^2-b^2$$

Binomio al cubo

El desarrollo del cubo del binomio $a + b$ se puede obtener multiplicando éste por su cuadrado.

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+b^3$$

La suma del binomios al cubo es, el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

De manera similar se obtiene el desarrollo del cubo del binomio $a - b$:

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b-b^3$$

La diferencia del binomios al cubo es igual al cubo del primer término, menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo , más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término menos el cubo del segundo término.

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Algunos ejemplos de suma y resta de binomios al cubo son:

$$(x+2)^3=(x)^3+3(x)^2(2)+3(x)(2)^2+(2)^3=x^3+6x^2+12x+8$$

$$(z-5)^3=(z)^3-3(z)^2(5)+3(z)(5)^2-(5)^3=z^3-15z^2+75z-125$$

Triángulo de Pascal

Como podemos observar cuando la potencia del binomio aumenta el número de términos incrementa, si observas los números de términos siempre es un grado mayor a la potencia a la que se encuentra elevado el binomio.

Hay problemas en matemáticas financieras, como es el cálculo de interés compuesto ya sea para un préstamo o para un monto en el que se desea saber cuánto vamos a pagar o recibir después de un tiempo y la expresión que se utiliza para este tipo de problema es $M = C(1 + i)^n$, para determinar el resultado de multiplicar n veces un binomio nos podemos auxiliar del triángulo de Pascal que es una representación de los coeficientes binomiales en forma triangular, se llama así en honor al francés Blaise Pascal quien fue un filósofo, físico y matemático.

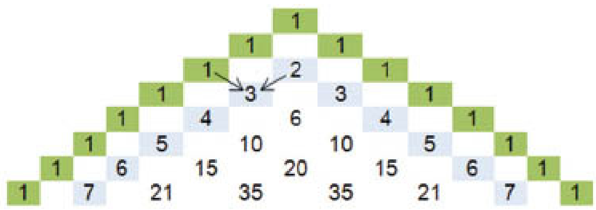


Figura 4.19.

Observar en la figura 4.19 que cada número interior es la suma de los que están colocados directamente arriba de él.

Analicemos algunos binomios:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Los coeficientes de cada uno de los términos corresponden al triángulo de Pascal, analizando las potencias de los términos del binomio, puedes observar que el resultado del primer binomio a la potencia cero es (1); para un binomio elevado a la potencia 1, corresponde a los mismos términos del binomio. A partir del binomio a la potencia 2, el primer termino tiene la misma potencia que el binomio, el segundo término contiene a ambos términos el primer término disminuido en un grado y el segundo término elevado a la primera potencia y al tercer termino tiene la misma potencia que el primero; este desarrollo se puede observar en cada uno de los términos de tal manera que el primer término disminuye en la potencia una unidad y el segundo aumenta en una unidad, hasta la potencia del binomio. Además, el número de términos siempre es $n + 1$ donde n es el grado del polinomio.

Ejemplo: Desarrolla $(a + b)^3$ utilizando el triángulo de pascal.

Solución:

Procedimiento:

$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^{3-1}b^1 + 3a^{3-2}b^2 + 1a^{3-3}b^3$$

Simplificando:

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Podrás observar que los coeficientes corresponden al triángulo de Pascal.

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: En parejas lean con atención los siguientes problemas y en su cuaderno realicen el procedimiento y operaciones para llegar a la solución de ellos. Aporta tus puntos de vista y escucha las opiniones de tu compañero.

1. Para reafirmar los conocimientos adquiridos determina el área de las figuras 4.20, 4.21 y 4.22.

a)

Figura 4.20.

b)

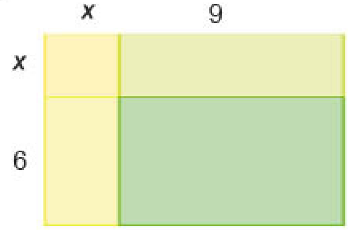


Figura 4.21.

c)

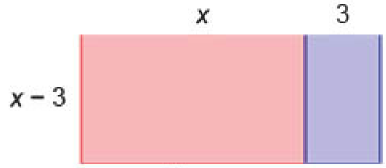


Figura 4.22.

2. Si el volumen de un cubo es 64 cm^3 ¿Cuál será el nuevo volumen si se aumenta su arista en x unidades?

3. Realiza en tu cuaderno 4 triángulos de Pascal como el mostrado en la figura 4.23.

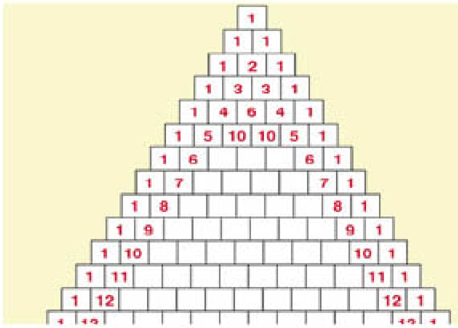


Figura 4.23.

a) En el primer triángulo escribe los números faltantes.
b) En el segundo, Ilumina de azul los números pares.
c) En el tercero, Ilumina de verde los números impares.
d) En el cuarto, Ilumina de amarillo todos los números múltiplos de tres.
e) ¿Qué patrón encontraste?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Factorización de polinomios

La factorización es la representación de una expresión algebraica como producto. Cada elemento del producto recibe el nombre de *factor*.

El estudio de factorización requiere de habilidades y conocimientos que has desarrollado a lo largo de este curso, iniciaremos recordando ciertos elementos.

Máximo común divisor de polinomios

Para encontrar el máximo común denominador (m.c.d.) de dos o más términos, debemos encontrar el m.c.d. de los coeficientes y multiplicarlos por la mínima potencia de las variables que aparecen en cada monomio.

Ejemplo: Encontrar el m.c.d de $20x^3y^2+16x^2y^4$

Solución:

Determinamos el m.c.d. de los coeficientes y de las variables:

Monomios	*Factores de los coeficientes*	*Factores de las literales*
$20x^3y^2$	$4\cdot 5$	x^2y^2x
$16x^2y^2$	$4\cdot 4$	$x^2y^2y^2$

Los factores son: 4 y x^2y^2.

El máximo común divisor de la expresión es $4x^2y^2$.

El m.c.d. nos sirve para los polinomios como producto de su máximo factor común y otro más sencillo que el original, el ejemplo anterior quedará factorizado de la siguiente manera:

$$20x^3y^2+16x^2y^4=(4x^2y^2)\left(5x+4y^2\right)$$

Factorización de un monomio a partir de un polinomio

La factorización es el proceso inverso de la multiplicación de factores, como se mencionó factorizar una expresión significa escribirla como el producto de sus factores. La factorización de un monomio a partir de un polinomio se realiza:

1. Determinar el m.c.d. de todos los términos del polinomio.
2. Escribir todos los términos como el producto del m.c.d. y sus otros factores.
3. Utilizar la propiedad distributiva para factorizar el m.c.d.

Ejemplo 1: Factorizar $15x-20$

Solución:

El m.c.d. de cada termino respectivamente es:

$$15x=5\cdot 3x \qquad 20=5\cdot 4$$

El m.c.d. es 5 *al factorizar el MCD queda:* $15x-20=(5)(3x-4)$

Ejemplo 2: Factorizar $9x^2-12x$

Solución:

El m.c.d. de cada termino respectivamente es:

$$9x^2=3x\cdot 3x \qquad 12x=3x\cdot 4$$

El m.c.d. es $3x$ *al factorizar el MCD queda:* $9x^2-12x=(3x)(3x-4)$

Ejemplo 3: Factorizar $x(2x+1)+5(2x+1)$

Solución:

El MCD de cada termino es $2x+1$, *entonces al factorizar el m.c.d. se tiene:*

$$x(2x+1)+5(2x+1)=(2x+1)(x+5)$$

Factorización de polinomios por medio de agrupamientos

Cuando se tienen cuatro o más términos se agrupan de tal forma que sus factores en común en cada grupo, por ejemplo para factorizar:

$ax+ay+bx+by$, podemos agrupar los términos de la forma siguiente:

$$ax+ay+bx+by=ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)$$

Identifica cómo se ordena de tal manera que se obtenga el mismo m.c.d.

En nuestro primer ejemplo ordenamos con respecto a las variables *x* y *y* observando que ambas tenían el mismo común como se muestra a continuación.

El m.c.d. es $(a+b)$ quedando la factorización de la siguiente manera:

$$ax + ay + bx + by = x(a+b) + y(a+b)$$

Aplica lo aprendido

Actividad 5

Instrucciones: En equipos de cuatro, lean las siguientes preguntas y respondan a cada una de ellas.

1. ¿Cómo identifican que un polinomio tiene factor común?
2. ¿Cuáles son los pasos para factorizar un polinomio?
3. ¿Cómo se reconoce que es por agrupamiento la factorización?
4. Utilizando el plano de la casa, mencionen dos ejemplos de factorización de polinomios.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Factorización de diferencia de cuadrados

Recordemos que los números cuadrados son lo que se obtienen de la multiplicación de un número; 1, 4, 9, 16, 25,…etc. Las literales cuadradas son aquellas que tienen exponente par y al ser divididas entre dos nos da un valor exacto $x^2, x^4, a^6, \ldots$; etc. Cuando estudiamos el producto de dos binomios conjugados se obtuvo como resultado la diferencia de cuadrados:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Si invertimos el proceso obtenemos la factorización. Los pasos a seguir para la factorización de diferencia de cuadrados son:

1. Extraer la raíz cuadrada de cada uno de los términos.
2. Se escriben dos paréntesis que representan los factores.
3. En uno se suman las raíces de cada término y en el otro se restan las raíces de los términos.

Ejemplo 1: Factorizar $9a^2-81b^2$

Solución:

Términos cuadráticos		*Factores de las literales*
Primer término:	$9a^2$	$\sqrt{9a^2}=3a$
Segundo término:	$81b^2$	$\sqrt{81b^2}=9b$

La expresión factorizada es la siguiente: $9a^2-81b^2=(3a+9b)(3a-9b)$

Esté procedimiento también se aplica a la diferencia de cuadrados en la que uno o los dos términos son compuestos.

Ejemplo 2: Factorizar $\frac{9}{16}a^2-b^6$

Solución:

Términos cuadráticos		*Factores de las literales*
Primer término:	$\frac{9}{16}a^2$	$\sqrt{\frac{9}{16}a^2}=\frac{3}{4}a$
Segundo término:	b^6	$\sqrt{b^6}=b^3$

La expresión factorizada es la siguiente: $\left(\frac{9}{16}a^2-b^6\right)=\left(\frac{3}{4}a+b^3\right)\left(\frac{3}{4}a-b^3\right)$

Aplica lo aprendido

Actividad 6

Instrucciones: En tu cuaderno realiza las factorizaciones de cada uno de los ejercicios y compara los resultados con tus compañeros. Respeta y escucha con atención a los demás.

1. $121k^2 - 289m^2 =$ ....
2. $\frac{144}{121}x^4 - \frac{49}{16}y^2 =$ ....
3. $-25u^2 + 49v^2 =$ ....
4. $x^{12} - 36y^8x^2 =$ ....
5. $(\text{sen } x)^2 - (\cos x)^2 =$ ....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Factorización de suma y diferencia de cubos

El proceso de factorización es el reciproco de los productos notables por lo que la suma de cubos se expresa como se muestra a continuación.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Para factorizar una *suma de cubos* de dos factores se recomienda los siguientes pasos:

1. Extraer la raíz cúbica de cada uno de los términos.
2. Se escriben dos paréntesis que representan los factores.
3. Un factor corresponde a la suma las raíces de los términos.
4. El otro factor es el primer término al cuadrado, menos el producto de la raíz cubica de los dos términos más el segundo término al cuadrado.

Ejemplo 1: Factorizar $8x^3 + 27$

Solución:

Términos cúbicos		*Raíz cúbica del término*	*Término al cuadrado*
Primer término:	$8x^3$	$\sqrt[3]{8x^3} = 2x$	$4x^2$
Segundo término:	27	$\sqrt[3]{27} = 3$	9

La expresión factorizada es la siguiente: $8x^3 + 27 = (2x+3)(4x^2 - 6x + 9)$

Para la diferencia de cubos nos apoyamos en el mismo hecho de tal manera que la diferencia de cubos es:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Para factorizar una resta de cubos de dos factores se recomienda los siguientes pasos:

1. Extraer la raíz cúbica de cada uno de los términos.
2. Se escriben dos paréntesis que representan los factores.
3. Un factor corresponde a la resta de las raíces de los términos.
4. El otro factor es el primer término al cuadrado, más el producto de la raíz cubica de los dos términos más el segundo término al cuadrado.

Ejemplo 2: Factorizar $27v^3 - 125$

Solución:

Términos cúbicos		*Raíz cúbica del término*	*Término al cuadrado*
Primer término:	$27v^3$	$\sqrt[3]{27v^3} = 3v$	$9v^2$
Segundo término:	125	$\sqrt[3]{125} = 5$	25

La expresión factorizada es la siguiente: $27v^3 - 125 = (3v - 5)\left(9v^2 + 15v + 25\right)$

Aplica lo aprendido

Actividad 7

Instrucciones: En parejas, resuelvan los siguientes ejercicios de factorización. Al finalizar intercambien sus respuestas con otra pareja para evaluar los resultados. Muestra respeto al escuchar las soluciones de tus compañeros.

1. $x^3 - y^3 =$ ....
2. $a^3 + 27 =$ ....
3. $64b^3 + 8 =$ ....
4. $a^6 - b^{12} =$ ....
5. $\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{27}b^3 =$ ....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrático tiene la expresión:

$$ax^2 + bx + c$$

Es decir, está formado por un término cuadrático, un término de primer grado y un término constante.

Del estudio de los productos notables sabemos que el cuadrado de un binomio es un trinomio; tales trinomios se llaman *trinomios cuadrados perfectos* (TCP):

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Los siguientes puntos ayudan a identificar un TCP:

1. Dos de los términos deben ser cuadrados a^2 y b^2.
2. No debe haber signo menos en a^2 ó b^2.
3. Si multiplicas dos veces ab obtienes el segundo término.

Los pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto son:

1. Verificamos que el primero y tercer término sean positivos y a ambos se le pueda extraer raíz cuadrada.
2. Se abre un paréntesis y se escribe el valor de la raíz del primer término.
3. Se escribe el signo del segundo término.
4. Se escribe el valor de la raíz del segundo término y se cierra el paréntesis.
5. Se eleva al cuadrado la expresión.

Ejemplo 1: Factorizar $x^2 + 4x + 4$

Solución:

Verificamos que el primer término y el último son positivos y sus raíces son:

Primer término: $\sqrt{x^2} = x$ *Segundo término:* $\sqrt{4} = 2$

El doble producto de la raíz del primer término y tercer término 2(x)(2) = 4x el cual cumple con el segundo término del trinomio.

Trinomio factorizado: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

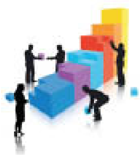
Ejemplo 2: Factorizar $y^2 - 20y + 100$

Solución:

Primer término: $\sqrt{y^2} = y$ *Segundo término:* $\sqrt{100} = 10$

El doble producto de la raíz del primero y tercer término es 2(y)(10) = 20y el resultado cumple con el valor del segundo término del trinomio.

Trinomio factorizado: $y^2 - 20y + 100 = (y-10)^2$



Aplica lo aprendido

Actividad 8

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios de manera individual con el propósito de poner en practica tus competencias desarrolladas, con respecto a la factorización de trinomio cuadrado perfecto al concluir intercambia tus respuestas con alguno de tus compañeros.

1. $x^2 + 14x + 49 =$ ....
2. $x^2 - 6yx + 9y^2 =$ ....
3. $25a^2 + 80a + 64 =$ ....
4. $16n^2 + 40n + 25 =$ ....

5. $49z^2-14z+1=$ ....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad 9

Producto de aprendizaje: solución de problemas diversos

Instrucciones: Sigue con atención las indicaciones de las letras A, B, C y reflexiona la posible solución de cada uno de los productos notables, expresiones algebraicas y factorización que se te presentan en seguida. Realiza en tu cuaderno los procedimientos y operaciones, el resultado anótalo en los espacios de cada ejercicio. Finalmente autoevalúa tus ejercicios y en la escala valorativa que se encuentra en la sección de evaluación del bloque, registra con una (X) en el espacio del rango de aciertos correctos que obtuviste.

A. Complementa los espacios faltantes de los productos notables.

1. $(x+\_\_)^2=\_\_\_+4xy+\_\_\_$
2. $(\_\_+5x)^2=\_\_\_+40x+\_\_\_$
3. $(2x+5)^2=\_\_\_+\_\_\_+\_\_\_$
4. $(\_\_-\_\_)^2=\_\_\_-30x+9$
5. $(x+5)(\_\_+2)=\_\_\_+7x+\_\_\_$
6. $(\_\_+\_\_)(\_\_+\_\_)=x^2+11x+24$
7. $\_\_\_-49x^2=(2y+\_\_)(2y-\_\_)$
8. $(64x^2-\_\_)=(\_\_+7y)(\_\_-\_\_)$
9. $(x-\_\_)^3=\_\_-\_\_+\_\_-27$
10. $(\_\_+\_\_)^3=8x^3+12x+\_\_+\_\_$

B. Complementa los espacios faltantes de los productos notables.

1. La longitud de una habitación es de $\frac{5}{2}(x-4)$ y el ancho es $\frac{3}{2}(x-4)$ metros.

   Encuentra un trinomio que pueda usarse para representar el área de la habitación.

   ....

2. Una caja metálica cubica de x pulgadas de cada lado se diseñó para transportar especímenes congelados. La caja está rodeada por todos lados por una capa de espuma de estireno de dos pulgadas, cuál es el polinomio que representa el volumen de la caja.

   ....

3. Determina el polinomio que representa el volumen de una caja que tiene un largo y ancho de $(x - 10)$ cm y altura de 5 cm.

   ....

4. Si a un cuadrado cuya área es x^2 se le suman a un lado 8 cm y al otro lado se le restan 4 cm. ¿Qué expresión algebraica representa el área de la nueva figura?

   ....

5. Se compró una alfombra cuadrada de 25 m^2 al colocarla en la sala se observa que le sobran 80 cm de un lado y 60 cm del otro, determina mediante una expresión algebraica el área de la sala.

   ....

C. Factoriza a su mínima expresión:

1. $256r^4 - 288r^2 + 81$
   ....

2. $am - bm - an - bn$
   ....

3. $(k+1)(k-1)+2(k-1)$
   ....

4. $a^3 + a^2 + a + 1$
   ....

5. $x^2+8x+16$

6. $81a^2-144$

7. $169-26x+x^2$

8. $256r^4-288r^2+81$

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad 10

Producto de aprendizaje: integrar tu portafolio de evidencias

Esta actividad consiste en Integrar tu portafolio de evidencias con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las seis actividades presentadas a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del portafolio de evidencias, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para entregar tu portafolio de evidencias a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre de la escuela, asignatura, bloque, leyenda: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante, semestre, grupo y fecha de entrega) y un índice.

Escala valorativa para evaluar el producto de aprendizaje: solución de problemas diversos

Aspectos a evaluar	Escala			
	Excelente	Bueno	Regular	No suficiente
Productos notables	10 aciertos correctos ( )	De 9 a 8 aciertos correctos ( )	De 7 a 6 aciertos correctos ( )	Menos de 6 aciertos correctos ( )
Operaciones algebraicas	5 aciertos correcto ( )	4 aciertos correctos ( )	3 aciertos correctos ( )	Menos de 3 aciertos correctos ( )
Factorización	8 aciertos correctos ( )	De 7 a 6 aciertos correctos ( )	5 aciertos correctos ( )	Menos de 5 aciertos correctos ( )

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	El portafolio es entregado de forma impresa y limpio.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden en los procedimientos.			
	Presenta índice.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	Actividades del 1 al 8.			
	Actividad 9. Productod de aprendizaje			
Actitud	Realizó sus trabajos de forma colaborativa e individual.			
	Mostró respeto en los trabajos.			
Total de puntos		**9**		

Si en la lista de cotejo lograste los **9 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **8 puntos** es **Bien**, de **6 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque IV

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque V

Realizas transformaciones algebraicas II

Introducción

Es importante recordar que el álgebra básica es similar a la aritmética, pues en ella se aplican las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división pero en lugar de números se usan letras y éstas pueden tomar diferentes valores.

Recordemos que la división es una fracción de un todo y fueron los egipcios quienes usaron por primera vez las fracciones, pero sólo aquellas de la forma 1/n o las que pueden obtenerse como combinación de ellas.

Los egipcios utilizaron las fracciones cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es 2, 3, 4,..., y las fracciones 2/3 y 3/4 y con ellas conseguían hacer cálculos fraccionarios de todo tipo. Su notación era la siguiente:

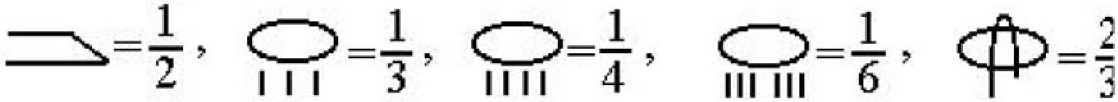


Figura 5.1.

¿Te has cuestionado cómo se distribuyó el terreno en un mercado para determinar el número de locales? ¿De qué depende el número de casas que se pueden construir en un terreno?

Las operaciones algebraicas son útiles para dar solución a situaciones como la planteada en el párrafo anterior, sólo debemos considerar que una fracción algebraica es igual que una fracción ordinaria, excepto que las letras pueden encontrarse en el numerador, en el denominador o en ambos. Para ello es necesario que conozcas y comprendas los algoritmos de las operaciones con fracciones algebraicas y sus aplicaciones.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana*

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Representa y resuelve problemas geométricos y algebraicos, a través de la factorización de trinomios, fracciones algebraicas y división.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$. • Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0, 1$. • Expresiones racionales con factores comunes y no comunes. • La división de polinomios.	• Elabora un mapa conceptual de los procesos de factorización para los trinomios. • Aplica la factorización en la simplificación de expresiones racionales
Procedimentales	• Reconoce trinomios que no son cuadrados perfectos de la forma y con como un producto de factores lineales y polinomios que requieren combinar técnicas. • Expresa trinomios de la forma y como un producto de factores lineales. • Identifica expresiones racionales con factores comunes y no comunes, susceptibles de ser simplificadas. • Utiliza una o varias técnicas de transformación para descomponer un polinomio en factores. • Reconoce expresiones racionales en forma simplificada a partir de factores comunes y la división de polinomios. • Obtiene factores comunes, factorizando con las técnicas aprendidas y reduce éstos. • Escribe expresiones racionales en forma simplificada utilizando factores comunes y la división de polinomios. • Soluciona problemas aritméticos y algebraicos.	• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
Actitudinales	• El valor del respeto . • Trabajo colaborativo e individual.	• Respetas y escuchas con atención a los demás. • Aportas puntos de vista con apertura y consideras los de otras personas de manera reflexiva. • Respetas a tus compañeros y trabajas de forma colaborativa e individual.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera ocho horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices cuatro horas para revisar los contenidos temáticos y cuatro horas para llevar acabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Evaluación del aprendizaje: productos

En este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Portafolio de evidencias
- Diseño de un juego de lotería de transformaciones algebraicas.

Portafolio de evidencias. Lo podrás hacer en una libreta o en un cuaderno, para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones con orden y limpieza, que te permitan llegar a soluciones de los problemas que se presenten en las actividades de este bloque.

Diseño de un juego de lotería de transformaciones algebraicas. Lo podrás realizar de forma colaborativa con 3 o 4 compañeros, primero debes tener todos tus ejercicios de las 7 actividades resueltos, enseguida cada uno de los ejercicios lo colocarás en una tarjeta de 7 x 4 cm. Cómo también cada ejercicio lo colocarás en un espacio de una plantilla que esté dividida en seis casillas.

Para iniciar, reflexiona

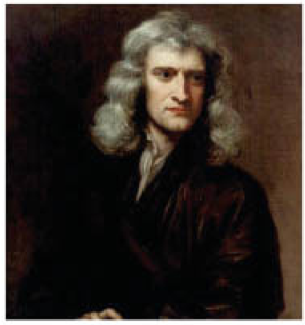


Figura 5.2. Retrato de Isaac Newton (1689).

La ley de gravitación universal, presentada por Isaac Newton en 1687, en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, establece la forma y explica el fenómeno natural de la atracción que tiene lugar entre dos objetos con masa.

Todo objeto en el Universo que posea masa ejerce una atracción gravitatoria sobre cualquier otro objeto con masa, independientemente de la distancia que los separe. Según explica esta ley, mientras más masa posean los objetos, mayor será la fuerza de atracción entre sí, y paralelamente, mientras más cerca se encuentren unos de otros, será mayor esa fuerza.

Expresando lo anterior en términos formales, esta ley establece que la fuerza que ejerce un objeto dado con masa m_1 sobre otro con masa m_2 es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Lo anterior se representa en la siguiente fórmula:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Donde m_1 y m_2 son las masas de los dos objetos, r es la distancia que separa sus centros de gravedad y G es la constante de proporcionalidad, llamada en este caso: constante de gravitación universal cuyo valor es:

$$G = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$$

Interpretando lo anterior, y guiándonos en la fórmula, esta ley establece que mientras más grandes sean las masas de sus cuerpos, mayor será la fuerza con que se atraigan, y que a mayor distancia de separación menor será la fuerza de atracción. Sólo mucho tiempo después hubo las posibilidades técnicas necesarias para calcular su valor. En 1798 se hizo el primer intento de medición posteriormente, con técnicas de la mayor precisión posible se llegó a este resultado de la constante G.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: En equipo analiza los siguientes ejercicios y al llegar a una conclusión. Anoten sus respuestas en los espacios correspondientes.

I. Desarrolla los siguientes productos.

1. $(x+3)(x+5)=$ ....

2. $(x-4)(x-9)=$ ....

3. $(x+2)(x-9)=$ ....

II. Analizando el desarrollo de los productos obtenidos.

a) ¿Qué puedes observar en el desarrollo?

....

b) ¿Qué sucede si sumamos los términos numéricos?

....

c) ¿Dónde observas el producto de los términos numéricos?

....

III. Describe una técnica para factorizar los siguientes polinomios.

a) x^2+5x+6 ....

b) $x^2-13x+36$ ....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 7 a 8 preguntas considera tu resultado como **Bien**, de 4 a 6 como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de 4 considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: operaciones aritméticas, productos notables y factorización de polinomios.

Aprende más

Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

La forma general de un trinomio esta expresada por:

$$ax^2 + bx + c$$

Este trinomio proviene del producto de dos binomios por ejemplo: $(4x+1)(x+3)$

Cuando el trinomio no es un cuadrado perfecto existen diferentes procesos para efectuar la factorización de los polinomios.

Procedimiento:

1. Realizamos el producto: $(4x+1)(x+3) = (4x)(x) + (4x)(3) + (1)(x) + (1)(3)$
2. Simplificado se obtiene el trinomio $4x^2 + 13x + 3$
3. Identificamos los elementos del trinomio:

$4x^2$ corresponde al termino cuadrático ax^2
$13x$ corresponde al término lineal bx
3 es el término independiente c

Casos:

Primer caso. Cuando el coeficiente $a = 1$, el trinomio queda expresado así: $x^2 + bx + c$
Ejemplo de estos trinomios son:

$x^2 + 8x + 15 \quad a = 1 \quad b = 8 \quad c = 15$
$x^2 - 6x + 8 \quad a = 1 \quad b = 8 \quad c = 15$

Recordando que la factorización es el reciproco del producto notable, iniciaremos analizando el siguiente producto notable con término común. Recuerda que este producto cumple con:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Para factorizar el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se requiere encontrar dos números que multiplicados den el término independiente y sumados o restados proporcionen el coeficiente del término lineal.

Para factorizar $x^2 + 8x + 15$ se deben buscar dos números que multiplicados den 15 y sumados den 8.

Factores	Multiplicados	Sumados
3 y 5	(3)(5) = 15	3 + 5 = 8
−3 y −5	(−3)(−5) = 15	−3 + −8 = −8

El primer renglón cumple con las dos condiciones entonces para factorizar la expresión se acomodan en los factores el término igual, que en este caso es x, y los números encontrados.

La factorización resultante es:

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$$

Veamos otro ejemplo. Al factorizar $x^2 - 2x - 24$:

Factores	Multiplicados	Sumados
8 y −3	(8)(−3) = −24	8 − 3 = 5
−8 y 3	(−8)(3) = −24	−8 + 3 = −5
6 y −4	(6)(−4) = −24	6 − 4 = 2
−6 y 4	(−6)(4) = −24	−6 + 4 = −2

El tercer renglón cumple con las dos condiciones entonces para factorizar la expresión se acomodan en los factores el término igual, que en este caso es x, y los números encontrados.

La factorización es:

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4)$$

Con la práctica podrás a visualizar con mayor rapidez los números que cumplen con las dos condiciones para llevar a cabo la factorización de este tipo de trinomios.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Lee con atención las indicaciones de los numerales 1 y 2, para dar respuesta, finalmente presenta a tus compañeros el procedimiento que realizaste para llegar a la solución y escucha sus aportaciones.

1. Halla una expresión polinomial en forma factorizada que represente el área de la región naranja.

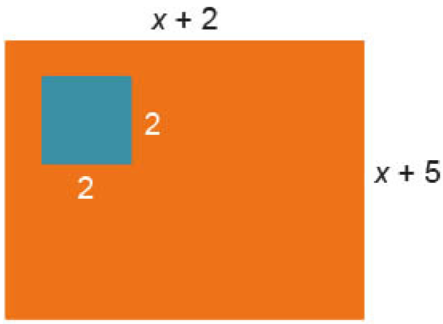


Figura 5.3.

2. Completa los siguientes ejercicios.

a) $a^2 - 3a - 10 = (a - \_\_\_)(\_\_\_ + 2)$

b) $c^2 + 7c + 12 = (c + \_\_\_)(\_\_\_ + 4)$

c) $y^2 - 22y + 120 = (y - 12)(\_\_\_ - \_\_\_)$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Expresiones como $6x^2+7x-5$, $2x^2+3x-2$ son trinomios de la forma:

$$ax^2+bx+c$$

Los trinomios de esta forma presentan las siguientes características:

1. El coeficiente del primer término es diferente de 1.
2. La variable del segundo término es la misma que la del primer término pero con exponente igual a la unidad.
3. El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo términos del trinomio.

Para factorizar trinomios de la forma ax^2+bx+c, existen varias formas, a continuación se describirá una de ellas.

Método de prueba y error

1. Escribe todas las parejas de factores del coeficiente del termino cuadrático a
2. Escribe todas las parejas de factores de la constante c.
3. Intenta diversas combinaciones de estos factores hasta encontrar el término medio correcto, bx.

Ejemplo: Factoriza $3x^2-13x+10$

Solución:

Los únicos factores de 3 son 1 y 3, por tanto escribimos (3x)(x). El número 10 tiene factores positivos y negativos, pero como el término intermedio es negativo solo consideramos los factores negativos los cuales son (−1)(−10) y (−2)(−5).

Enumeramos los factores posibles. Buscamos el factor que proporcione el término medio.

Factor posible	*Suma de los productos de los términos internos externos*
$(3x-1)(x-10)$	$(3x)(-10)+(-1)(x)=-30x-x=-31x$

$$(3x-10)(x-1) \qquad (3x)(-1)+(-10)(x)=-3x-10x=-13x$$

$$(3x-2)(x-5) \qquad (3x)(-5)+(-2)(x)=-15x-2x=-17x$$

$$(3x-5)(x-2) \qquad (3x)(-2)+(-5)(x)=-6x-5x=-11x$$

Los factores del segundo renglón proporciona el segundo término por lo que el trinomio $3x^2-13x+10$ queda factorizado de la siguiente manera:

$$(3x-10)(x-1)$$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Observa con atención las tres expresiones algebraicas y de forma respetuosa, comenta con tus compañeros sobre el procedimiento necesario para llegar a la solución.

a) $3x^2-x+10$

....

b) $5x^2-14x-3$

....

c) $2x^2+5x-3$

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Fracción algebraica: toda expresión de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$, $q(x) \in P(x)$, $q(x) \neq 0$.

Algunos ejemplos de fracciones algebraicas son:

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \qquad \frac{2x-3y}{7} \qquad \frac{4}{4x+4}$$

Debido a que en planteamientos posteriores de problemas cotidianos, por ejemplo determinar la razón del número de aciertos que obtienes en un examen la cual se obtiene:

$$\frac{\text{aciertos buenos}}{\text{total de aciertos}}$$

Se encontrarán múltiples expresiones tan complejas como lo son las fracciones algebraicas, es muy importante simplificarlas. Es posible simplificarlas cuando existen factores comunes en el numerador y en el denominador, de lo contrario la expresión es irreducible.

Ejemplo 1: Simplifica la fracción $\frac{w^2-1}{w+1}$

Solución:

Factorizamos el numerador, utilizando el modelo de diferencia de cuadrados:

$$\left(a^2-b^2\right)=(a+b)(a-b) \quad \rightarrow \quad \frac{(w+1)(w-1)}{(w+1)}$$

Eliminamos los términos iguales del numerador y denominador:

$$\frac{\cancel{(w+1)}(w-1)}{\cancel{(w+1)}}$$

Fracción algebraica simplificada:

$$\frac{w^2-1}{w+1}=w-1$$

Ejemplo 2: Simplifica la fracción $\dfrac{n^2-2n}{n^2-7n+10}$

Solución:

Factorizamos el numerador aplicando el factor común y, el denominador aplicando la factorización del trinomio x^2+bx+c:

$$\frac{n^2-2n}{n^2-7n+10}=\frac{(n)(n-2)}{(n-2)(n-5)}$$

Eliminamos los términos iguales del numerador y denominador:

$$\frac{(n)\cancel{(n-2)}}{\cancel{(n-2)}(n-5)}$$

Fracción algebraica simplificada:

$$\frac{n^2-2n}{n^2-7n+10}=\frac{n}{n-5}$$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Analiza y resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno. Al concluir presenta tus resultados a tus compañeros y considera las opiniones de ellos para mejorar tu trabajo.

1. Un auto recorre una distancia de $s^2 - 7s + 10$ en un tiempo de $s - 5$ segundos, determina la expresión algebraica para la velocidad del auto la velocidad es:

$$v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

2. El gasto de agua se puede calcular a partir del cociente del volumen con el tiempo, si el volumen que se consume en una casa es $3x^4 + 7x^3 + 2x^2$ en un tiempo de $x^3 + 7x^2 + 10x$, determina la expresión algebraica para el gasto de agua.

3. Un avión vuela a una velocidad promedio de $2s - 12$ kilómetros por hora, si a esta velocidad recorre una distancia de $2s^2 - 16s + 24$ kilómetros, ¿Cuál es la expresión algebraica para determinar el tiempo?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Operaciones con fracciones algebraicas

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones algebraicas con igual denominador, se procede del mismo modo que en las fracciones aritméticas: se conserva el denominador y se suman o restan los numeradores.

Ejemplo 1: Sumar $\frac{8a+b}{c} + \frac{2b}{c}$

Solución:

Se conserva el denominador y se suman o restan los numeradores:

$$\frac{(8a+b)+2b}{c}$$

Se simplifica el numerador realizando las operaciones indicadas:

$$\frac{8a+2b+b}{c}=\frac{8a+3b}{c}$$

Ejemplo 2: Resuelve $\frac{5a-9b}{2a-3b}+\frac{7a-2b}{2a-3b}-\frac{8a-5b}{2a-3b}$

Solución:

Se conserva el denominador y se suman o restan los numeradores:

$$\frac{(5a-9b)+(7a-2b)-(8a-5b)}{2a-3b}$$

Se simplifica el numerador: $\frac{5a-9b+7a-2b-8a+5b}{2a-3b}=\frac{4a-6b}{2a-3b}$

Factorizando el numerador y simplificando: $\frac{2\cancel{(2a-3b)}}{\cancel{(2a-3b)}}$

La expresión simplificada es:

$$\frac{5a-9b}{2a-3b}+\frac{7a-2b}{2a-3b}-\frac{8a-5b}{2a-3b}=2$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

En la multiplicación de fracciones algebraicas se procede igual que en las fracciones aritméticas: se multiplican numeradores y denominadores entre si, simplificando si es posible.

Ejemplo 1: Multiplicar y simplifica la expresión $\frac{5a^3}{4}\times\frac{2b}{3}$

Solución:

Continúa...

Multiplicando numeradores y denominadores:

$$\frac{5a^3}{4}\cdot\frac{2b}{3}=\frac{(5a^3)(2b)}{12}=\frac{10a^3b}{12}$$

Factorizando y simplificando: $\frac{10a^3b}{12}=\frac{2(5a^3b)}{2(6)}=\frac{5a^3b}{6}$

La multiplicación simplificada: $\frac{5a^3b}{6}$

Ejemplo 2: Simplifica la expresión $\frac{3x^2+2xy}{9x^2-4y^2}\cdot\frac{15x-10y}{2x}$

Solución:

Factorizando numeradores y denominadores y simplificando:

$$\frac{3x^2+2xy}{9x^2-4y^2}\cdot\frac{15x-10y}{2x}=\frac{\cancel{x}\,\cancel{(3x+2y)}}{\cancel{(3x+2y)}\,\cancel{(3x-2y)}}\cdot\frac{5\cancel{(3x-2y)}}{2\cancel{x}}=\frac{5}{2}$$

La expresión simplificada: $\frac{3x^2+2xy}{9x^2-4y^2}\cdot\frac{15x-10y}{2x}=\frac{5}{2}$

Divisón de fracciones algebraicas

Las divisiones de fracciones algebraicas se resuelven igual que las fracciones aritméticas: se multiplica la fracción dividiendo por el inverso multiplicativo de la fracción divisor.

Ejemplo 1: Dividir y simplificar la expresión $\frac{8n^5}{3}\div\frac{2n^2}{9}$

Solución:

Multiplicamos por el reciproco del divisor:

$$\frac{8n^5}{3}\cdot\frac{9}{2n^2}=\frac{72n^5}{6n^2}$$

Simplificando:

$$\frac{72n^5}{6n^2}=\frac{72}{6}n^{5-2}=12n^3$$

El resultado de la división es: $12n^3$.

Ejemplo 2: Dividir y simplificar la expresión $\frac{x+1}{x^2-1}\div\frac{x+1}{x^2-2x+1}$

Solución:

Multiplicamos por el reciproco del divisor:

$$\frac{x+1}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2-2x+1)}{(x^2-1)(x+1)}$$

Factorizando numerador y denominador: $\frac{(x+1)(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+1)}$

Identificando los factores comunes y simplificando: $\frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{(x-1)}{x+1}$

El resultado simplificado de la divisón es: $\frac{x-1}{x+1}$

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: En equipo y con ayuda de tu profesor simplifica las siguientes expresiones verifica tus resultados con otro equipo.

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$

2. $\dfrac{2a+3b}{3a-2b}-\dfrac{3a+2b}{3a-2b}$

3. $\dfrac{4}{m^2-1}+\dfrac{2}{m-1}+\dfrac{m}{m+1}$

4. $\dfrac{z^2-10z+16}{z^2-9z+14}\cdot\dfrac{z^2-10z+21}{z^2+2z-15}$

5. $\dfrac{x^3-x}{x+1}\div\dfrac{x-1}{x+1}$

6. $\dfrac{x^3+3x^2-10x}{x^3-4x^2+4x}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

División de polinomios

Para dividir un monomio entre otro, primero se aplica la regla de los signos para la división, después se dividen entre si los coeficientes y finalmente las literales:

$$\frac{4x^3y}{2xy}=2x^{3-1}y^{1-1}=2x^2$$

División de un polinomio entre un monomio. Se dividen todos los términos del polinomio entre el monomio, separando los cocientes parciales con sus propios signos:

$$\frac{3x^3y}{3x}+\frac{6x^2y}{3x}+\frac{12x}{3x}=x^2y+2xy+4$$

División de un polinomio entre otro polinomio. Sobre la base de la división aritmética, se dará un método para la división entre polinomios.

El procedimiento es el siguiente:

1. Se ordenan los términos del numerador y del denominador con relación a una letra, en orden de potencias decrecientes.
2. Se divide el primer término del numerador entre el primer término del denominador para obtener el primer término del cociente.
3. Se multiplica el cociente obtenido por cada término del denominador, colocando el resultado en columna (debajo del término semejante en caso de existir, si no tiene semejante en el numerador se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación de potencias), para poder sustraerlo del numerador al producto se le cambia de signo.
4. Considerar el residuo obtenido como un nuevo numerador y repetir los pasos 2 y 3 para encontrar el segundo término del cociente y el siguiente residuo.
5. Continuar el proceso hasta obtener un residuo que sea de menor grado que el grado del denominador.

Si el residuo es cero, la división es exacta, se puede expresar como:

$$cociente = \frac{dividendo}{divisor}$$

Si el residuo es diferente de cero, la división no es exacta, se puede expresar como:

$$cociente + \frac{residuo}{divisor}$$

Ejemplo 1: Dividir $P(x) = a^2 + 4ab + 3b^2$ entre $Q(x) = a + b$

Solución:

$$
\begin{array}{rr|rl}
 & & a + 3b & \longrightarrow \textit{Cociente} \\
\textit{Divisor} \longleftarrow & a + b & a^2 + 4ab + 3b^2 & \longrightarrow \textit{Dividendo} \\
 & & -a^2 - ab & \\
\cline{3-3}
 & & 3ab + 3b^2 & \\
 & & -3ab - 3b^2 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 + 0 & \longrightarrow \textit{Residuo}
\end{array}
$$

Es una división exacta, el residuo es 0.

Ejemplo 2: Dividir $H(x)=5a^4+a^2-2a-3$ entre $G(x)=a-1$

Solución:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 5a^3+5a^2+6a+4 & \\
a-1 & \overline{\big)\,5a^4+0a^3+a^2-2a-3} & \\
 & -5a^4+5a^3\qquad\qquad\quad & \\ \cline{2-2}
 & 5a^3+a^2-2a-3 & \\
 & -5a^3+5a^2\qquad\quad & \\ \cline{2-2}
 & 6a^2-2a-3 & \\
 & -6a^2+6a\quad & \\ \cline{2-2}
 & 4a-3 & \\
 & -4a+4 & \\ \cline{2-2}
 & 1 & \text{Residuo}
\end{array}
$$

La división no es exacta.

La respuesta es: $5a^3+5a^2+6a+4+\dfrac{1}{a-1}$

División sintética o regla de Ruffini

Tiene por objeto determinar el *cociente* de un *polinomio* en x entre un *binomio* de la forma $x-a$, de una manera sencilla y rápida, aplicando los siguientes pasos.

Si se desea dividir $11x^2-6x^4-43x^3+9x+8x^5-42$ entre $-3x+2x^2-6$ por el método de división sintética, primero se debe ordenar el dividendo y el divisor:

Dividendo: $8x^5-6x^4-43x^3+11x^2+9x-42$; $grado(Dividendo)=5$

Divisor: $2x^2-3x-6$; $grado(Divisor)=2$

Dado que $grado(Dividendo)>grado(Divisor)$, 5 > 2, la división se puede realizar.

El acomodo de los elementos en la división sintética se apegará al esquema de la figura 5.4.

Figura 5.4. Elementos de la división sintética.

Pasos de la división sintética

Paso 1. Se escriben los coeficientes numéricos del dividendo ordenado descendentemente en un primer renglón. Si el polinomio está incompleto, escribe cero en la columna del término que falte. Dibuja una vertical junto al último coeficiente escrito.

Paso 2. Se dejan algunos renglones en blanco, para el "área de trabajo". La cantidad de renglones necesarios se puede calcular de la siguiente manera:

Renglones de área de trabajo = *grado*(*Dividendo*) − *grado*(*Divisor*) + 1

En nuestro ejemplo,

Renglones de área de trabajo = 5 − 2 + 1 = 4

Paso 3. Se trazan dos líneas horizontales debajo del área de trabajo y se prolonga la vertical hasta cruzar estas dos horizontales. El proceso se muestra en la figura 5.5.

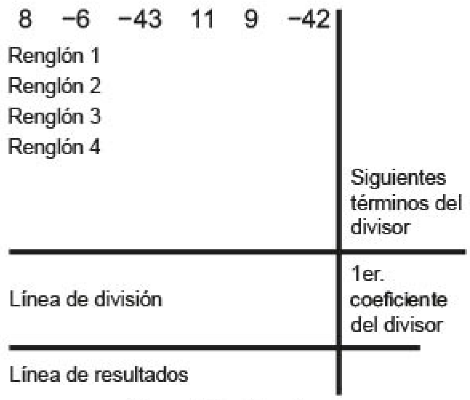


Figura 5.5. Paso 2 y 3.

Paso 4. Se escribe el primer coeficiente numérico del divisor en el espacio reservado para él, como se indicó en el esquema. En nuestro ejemplo éste coeficiente es 2 (figura 5.6).

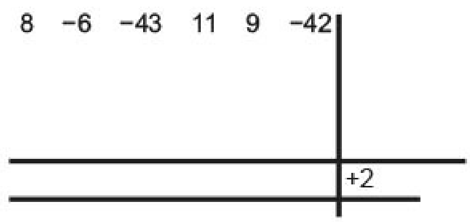


Figura 5.6. Paso 4.

Paso 5. **Se escriben los siguientes coeficientes** del divisor pero se cambian sus signos. Este paso es muy importante para evitar errores en el resultado. También deben escribirse ceros para los términos que el divisor no tenga.

8	−6	−43	11	9	−42		
						+3	+6
						+2	

Figura 5.7. Paso 5.

Paso 6. **Se baja el primer coeficiente del divi**dendo hasta la línea de división.

8	−6	−43	11	9	−42		
						+3	+6
8						+2	

Figura 5.8. Paso 6.

Paso 7. **Se divide entre el primer coeficiente del** divisor y el resultado se coloca debajo del término que se bajó.

8	−6	−43	11	9	−42		
						+3	+6
8						+2	
+4							

Figura 5.9. Paso 7.

Paso 8. Se multiplica este número por los si**guientes coeficientes del divisor y los resultados** se colocan en el área de trabajo en las columnas siguientes del renglón número dos:

8	−6	−43	11	9	−42		
	+12	+24					
						+3	+6
8						+2	
+4							

Figura 5.10. Paso 8.

Paso 9. Se checa que no se haya escrito algún número en la última columna. De ser así se termina el proceso y se deben determinar los resultados. En nuestro ejemplo, el último número escrito es 24, que aún no está en la última columna del área de trabajo (que es la columna **donde está el −42).**

Paso 10. Si el proceso continua, entonces se **baja la suma de los coeficientes de la siguien**te columna a la línea de división y se repite el proceso del paso 6 al 9, tantas veces como sea necesario y hasta llegar a la última columna.

8	−6	−43	11	9	−42		
	+12	+24	−15	−30			
		+9	+18				
			−15	−30			
				+21	+42	+3	+6
8	+6	−10	+14			+2	
+4	+3	−5	+7				

Figura 5.11. Paso 9 y 10.

Paso 11. Cuando hemos escrito un número debajo de la última columna, como en el proceso próximo anterior, debemos colocar unas líneas de cierre junto a la última cifra escrita en el último renglón.

8	−6	−43	11	9	−42		
	+12	+24	−15	−30			
		+9	+18				
			−15	−30			
				+21	+42	+3	+6
8	+6	−10	+14	0	0	+2	
+4	+3	−5	+7				

Figura 5.12. Paso 11 y 12.

Paso 12. Como vemos, quedaron dos columnas después de las líneas de cierre. Sumamos estas columnas y escribimos los resultados en la línea de división, como se muestra a continuación.

Paso 13. Ahora, determinemos el cociente. Solo vemos los coeficientes del polinomio que representa al cociente. El último es el número 7, que es el término de grado cero; antes está el −5, que es el de grado 1; antes que éste está el 3, que es el término de grado 2, así llegamos al primer término que es el término de grado 3. Como la variable es *x*, el cociente es:

$$4x^3+3x^2-5x+7$$

Paso 14. Ahora calculemos el residuo. Vemos que en la zona del residuo hay dos ceros. Esto significa que el polinomio del residuo es de primer grado (un término de grado cero y un término de primer grado). Pero como ambos son cero, podemos decir que el residuo final es cero.

8	−6	−43	11	9	−42		
	+12	+24	−15	−30			
		+9	+18				
			−15	−30			
				+21	+42	+3	+6
8	+6	−10	+14	0	0	+2	
+4	+3	−5	+7				

Figura 5.13. Paso 13 y 14.

Paso 15. Ahora solo resta expresar el resultado:

$$\frac{8x^5-6x^4-43x^3+11x^2+9x-42}{2x^2-3x-6}=4x^3+3x^2-5x+7$$

Ejemplo 1: Dividir $11x^2-6x^4-43x^3+9x+8x^5-42$ entre $-3x+2x^2-6$ por el método de división sintética.

Solución:

$$\begin{array}{rrrr||rr|rr}
8 & -6 & -43 & 11 & 9 & -42 & & \\
 & 12 & 24 & & & & & \\
 & & 9 & 18 & & & & \\
 & & & -15 & -30 & & & \\
 & & & & 21 & 42 & +3 & +6 \\ \hline
8 & 6 & -10 & 14 & 0 & 0 & +2 & \\ \hline
4 & 3 & -5 & 7 & & & &
\end{array}$$

Ejemplo 2: Dividir por el método de división sintética la siguiente expresión:

$$\frac{x^7-7x^5+12x^4+x^3-29x^2+20x-5}{x^4-2x^3+5x-7}$$

Solución:

$$\begin{array}{rrrr||rrrr|rrrr}
1 & 0 & -7 & 12 & 1 & -29 & 20 & -5 & & & & \\
 & 2 & 0 & -5 & 7 & & & & & & & \\
 & & 4 & 0 & -10 & 14 & & & & & & \\
 & & & -6 & 0 & 15 & -21 & & & & & \\
 & & & & 2 & 0 & -5 & 7 & +2 & 0 & -5 & +7 \\ \hline
1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & +1 & & & \\ \hline
1 & 2 & -3 & 1 & & & & & & & &
\end{array}$$

Resultado:

$$\frac{x^7-7x^5+12x^4+x^3-29x^2+20x-5}{x^4-2x^3+5x-7}=x^3+2x^2-3x+1+\frac{-6x+12}{x^4-2x^3+5x-7}$$

Ejemplo 3: Dividir por el método de división sintética la siguiente expresión:

$$\frac{10x^4-29x^3+8x^2+85x-70}{5x^2+3x-8}$$

Solución:

$$\begin{array}{ccc||cc|cc}
+10 & -29 & +8 & +85 & -70 & & \\
 & -6 & +16 & & & & \\
 & & +21 & -56 & & & \\
 & & & -27 & +72 & -3 & +8 \\
\hline
+10 & -35 & +45 & +2 & +2 & +5 & \\
\hline
+2 & -7 & +9 & & & &
\end{array}$$

Resultados:

$$\frac{10x^4-29x^3+8x^2+85x+-70}{5x^2+3x-8}=2x^2-7x+9+\frac{2x+2}{5x^2+3x-8}$$

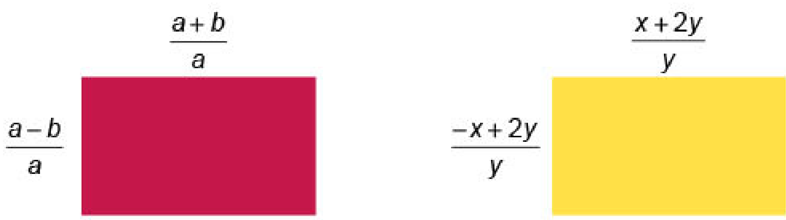
Aplica lo aprendido

Actividad 5

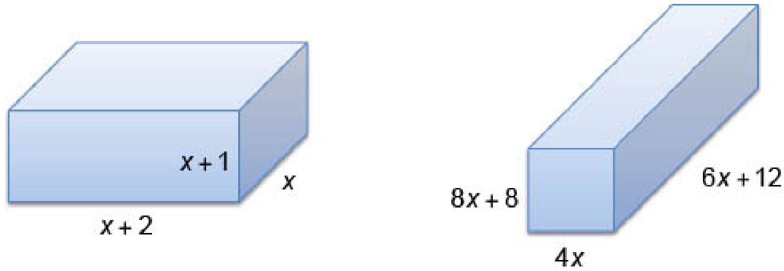
Instrucciones: En parejas lean con atención los siguientes problemas y en su cuaderno realicen el procedimiento y operaciones para llegar a la solución de ellos. Aporta tus puntos de vista y escucha las opiniones de tu compañero, con respeto.

1. El área de un rectángulo es $12x^2-16x-16$. Si la longitud es de $4x-8$ determine el ancho.

2. Considera los siguientes rectángulos y determina a) el perímetro y b) el área.



3. ¿Cuántas veces el volumen de la figura de la derecha está contenida en la figura de la izquierda?



Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad 6

Instrucciones: En equipos de 3 o 4 participantes, reflexionen sobre el procedimiento necesario para obtener la solución de los 7 planteamientos presentados, y aporta tus ideas y escucha con atención las opiniones de los demás, a fin de obtener resultados correctos.

1. ¿Cómo se identifican los trinomios $x^2 + bx + c$?

2. Escribe un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y factoriza indicando los pasos de la factorización.

3. ¿Cómo se identifican los trinomios $ax^2 + bx + c$?

4. Escribe un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y factoriza indicando los pasos de la factorización.

5. Cuando un polinomio se divide entre $x - 3$, el cociente es $x^2 - 3x + 4 + \frac{2}{x-3}$.

   ¿Cuál es el polinomio? Explica como determinaste la respuesta.

6. Explica con tus propias palabras como dividir un polinomio entre $(x-a)$ utilizando la división sintética.

7. Divide $(x^2+3x-4)\div(x-5)$ utilizando la división sintética.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad 7

Producto de aprendizaje: diseño de un juego de lotería de transformaciones algebraicas

El propósito de este material es trabajar en forma colaborativa y entretenida reforzando los conocimientos adquiridos de transformaciones algebraicas.

Instrucciones: Este juego lo realizarás de forma colaborativa en equipos de 4 alumnos:

1. Debes tener todos tus ejercicios de las 6 actividades resueltos.

2. Cada uno de los ejercicios lo colocarás en una tarjeta de 7 x 4 cm. Ejemplo de las cartas:

La expresión x^2+3x-4 factorizada es	$(x+4)(x-1)$

3. Cada ejercicio lo colocarás en un espacio de una plantilla que esté dividida en seis casillas.

4. Material: Hojas blancas o pliegos de cartulina, tijeras, regla, plumones de colores o lápices de color.

5. Una vez que hayan realizado su juego, se establecerá un rol donde se especifique que equipos jugaran y en este mismo rol se registrará equipos ganadores.

Actividad 8

Producto de aprendizaje: integrar tu portafolio de evidencias

Esta actividad consiste en Integrar tu portafolio de evidencias con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las seis actividades presentadas a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del portafolio de evidencias, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para entregar tu portafolio de evidencias a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre de la escuela, asignatura, bloque, leyenda: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante, semestre, grupo y fecha de entrega) y un índice.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: diseño de un juego de lotería de transformaciones algebraicas

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Creatividad en la elaboración de tarjetas y plantillas.			
	Formulación correcta de las expresiones.			
Procedimientos	Mantiene secuencia lógica.			
	Manejo de expresiones algebraicas.			
Solución	En plenaria verificar que los resultados sean correctos.			
Actitudes	Trabaja de forma colaborativa.			
	Muestra respeto al compartir y escuchar ideas.			
Total de puntos		7		

Si en la lista de cotejo lograste los **7 puntos**, considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **6 puntos** es **Bien**, de **4 a 5** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 4** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	El portafolio consiste en la entrega de la libreta con todas las actividades realizadas, mostrando orden y limpieza, además debes incluir una portada con tus datos.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden en los procedimientos.			
	Presenta índice.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	Actividades del 1 al 6 con soluciones correctas			
	Actividad 7. Producto de aprendizaje			
Actitud	Realizó sus trabajos de forma colaborativa e individual.			
	Mostró respeto en los trabajos por equipo.			
Total de puntos		9		

Si en la lista de cotejo lograste los **9 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **8 puntos** es **Bien**, de **6 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque V

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

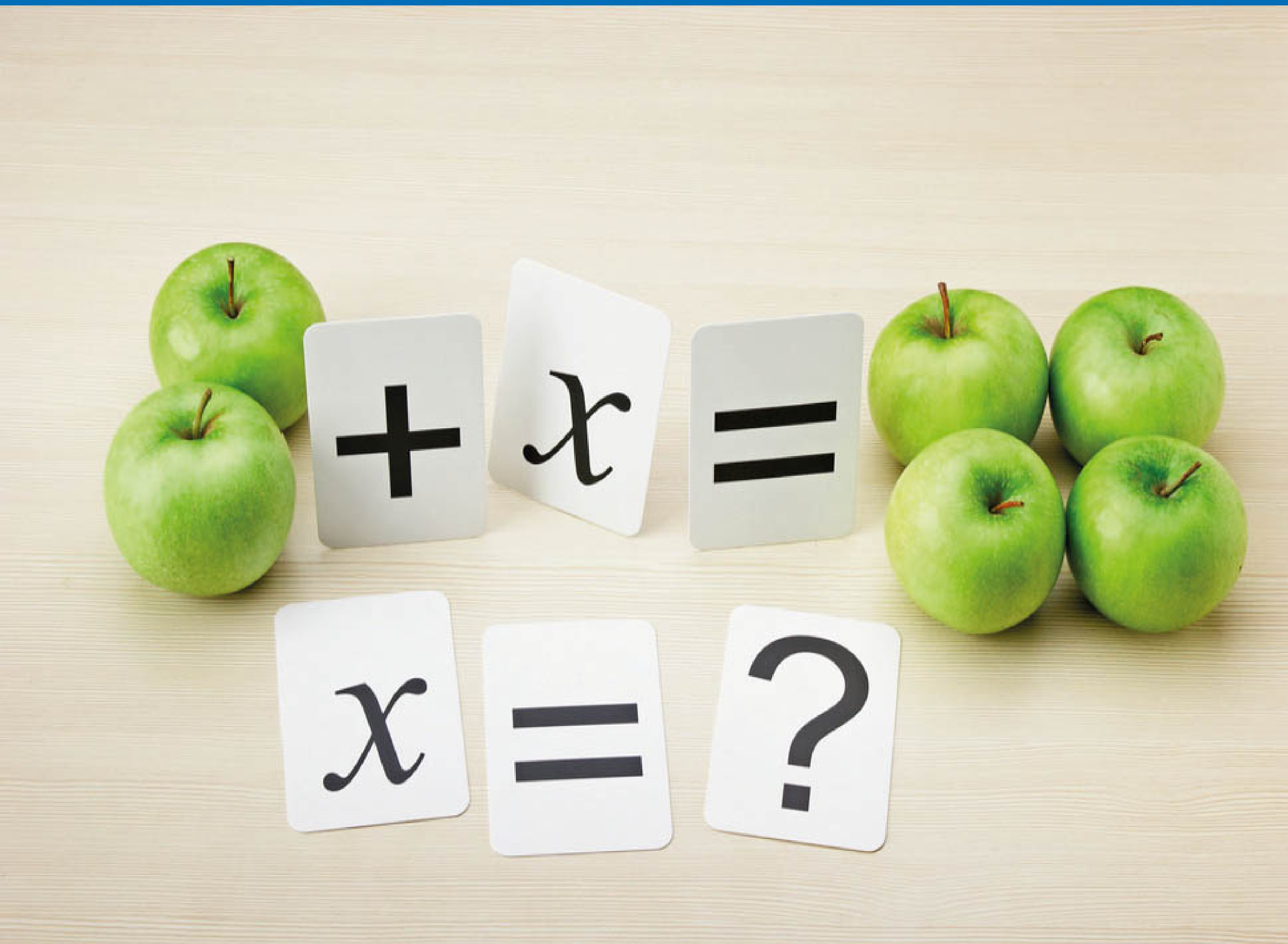
Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque VI

Resuelves ecuaciones lineales I



Introducción

En este bloque VI, el objeto de estudio serán las ecuaciones lineales con una sola incógnita, su proceso de resolución y su aplicación en problemas o situaciones de la vida cotidiana, tal como lo ejemplificaremos a continuación con respecto a la producción de café. Además analizaremos la relación estrecha entre el concepto de ecuación y el de función lineal, misma que nos permitirá hacer la representación gráfica de ecuaciones a través de líneas rectas en el plano cartesiano.

El café, además de ser una bebida rica y versátil, es el resultado de un complejo proceso económico y social relacionado con al menos sesenta países alrededor del mundo. Este grano se cultiva por aproximadamente 20 millones de personas que logran una producción anual de más de cien millones de sacos.

El clima adecuado para el cultivo del café debe ser húmedo y caluroso, por lo que es un producto propio de zonas tropicales. En México las zonas de mayor producción de café se encuentran en las vertientes del golfo y del pacifico, así como en el Soconusco y en el centro norte de Chiapas.

En nuestra vida cotidiana existen situaciones donde se desconoce alguna cantidad, misma que se puede calcular a través de otras cantidades conocidas con la cuáles esté relacionada, ejemplo de ello se da en una plantación cafetalera donde Omar, quien se dedica a la producción de café, necesita conocer:

- La cantidad de kilogramos de café que se obtendrán anualmente en su terreno de una hectárea de superficie.
- El número de empleados que necesitará para recolectar los granos de café.
- El número de sacos para almacenar la cosecha.
- El medio de transportación y el número de viajes para llevarlo a los centros de venta.
- El precio de mercado al que lo podrá vender.

En este bloque se abordarán modelos matemáticos y procedimientos que permitirán conocer cómo obtener la solución a los seis puntos que necesita saber Omar para la producción y venta de café.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Identificas cantidades o magnitudes de tu contexto y las representas a través de una ecuación lineal, dando significado al concepto de incógnita y el aprendizaje de métodos para encontrar o descubrir su valor.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Ecuación de grado uno. • Tipo de formas de la ecuación de grado uno. • Métodos de solución de la ecuación de grado uno. • Su representación gráfica.	• Reconoces cantidades que se vinculan expresando su relación en una expresión algebraica. • Analizas y comprendes su clasificación para aplicar los métodos de solución de ecuaciones grado uno. • Resuelves problemas contextualizados.
Procedimentales	• Identificas una ecuación y una función lineal y las relacionas entre sí. • Usas diferentes técnicas para resolver diferentes ecuaciones lineales con una incógnita. • Graficas funciones lineales de la forma $y = mx + b$. • Redactas y resuelves problemas relativos a situaciones que requieren el uso de ecuaciones o funciones lineales.	• Realizas ejercicios de ecuaciones lineales. • Resuelves problemas contextualizados y analiza los resultados obtenidos. • Observas e interpreta gráficas.
Actitudinales	• Valoras la importancia del trabajo con orden y limpieza. • Compartes tus ideas y aceptas las de sus compañeros, • Identificas el alcance del trabajo colaborativo.	• Exposición de actividades y trabajos de manera ordenada y con limpieza. • Expresas tus ideas y aceptas con respeto las de sus compañeros.

¿Qué tiempo vas emplear?

Considera ocho horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices dos horas para revisar los contenidos temáticos y seis horas para las actividades propuestas y la elaboración de un tríptico.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque obtendrás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Problemario
- Tríptico comercial

Problemario matemático. Lo elaborarás trabajando tanto en tu libro como en tu libreta con la resolución de problemas y ejercicios de manera individual y grupal. Al termino del bloque, integrarás tu problemario con las tres actividades que hayas realizado, consulta la lista de cotejo que está ubicada al final del bloque, para tener idea clara de los criterios de evaluación que debes cubrir para entregarlo a tu profesor.

Tríptico comercial. Éste será el producto final que deberás realizar en equipos de trabajo. El tríptico deberá contener el resultado de una investigación respecto de la producción y consumo de café en nuestro país con la intención de promoverlo de manera atractiva para el lector, en él deberán incluir por lo menos tres gráficos de funciones lineales que representen de manera aproximada algunas partes del proceso de cultivo, producción y venta de este grano.

Para iniciar, reflexiona

¿Sé resolver ecuaciones desde Primaria? ¡Por supuesto que sí!

Para que te convenzas, observa y resuelve lo siguiente:

1. Encuentra el elemento perdido en:

$\_\_\_\_ + 25 = 100$ $\qquad \frac{3}{4} - \frac{\square}{\square} = \frac{1}{2}$ $\qquad 2.5 \cdot \_\_\_\_ = 15$

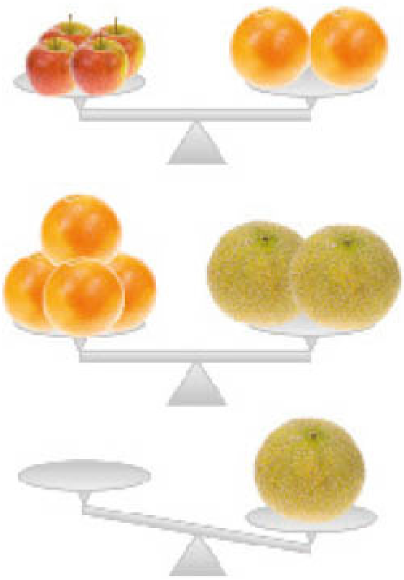
2. Adivina el número que al multiplicarlo por diez y restarle cuatro docenas te da como resultado 52.

3. Analiza las siguientes tres balanzas:

1ra.

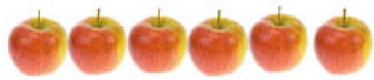
2da.

3ra.

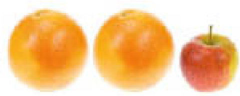


¿Cuál de las siguientes opciones representa las frutas con las que se puede equilibrar la 3ra. balanza?

a) 

b) 

c) 

d) 

Fuente: Prueba ENLACE 2007.

¿Suficiente con estos ejemplos? De manera implícita e informal, aprendiste en la Primaria el concepto de ecuación. Aquí, te invitamos a formalizarlo.

Una igualdad es la relación entre dos objetos o situaciones que comparten las mismas características. En matemáticas, una igualdad se refiere a la comparación de dos cantidades con la misma magnitud.

Para que una igualdad sea una ecuación, en al menos una de las dos expresiones de una cantidad debe existir una incógnita, una parte o total de la cantidad desconocida. Resolver una ecuación significa determinar el valor adecuado de la incógnita para que se cumpla o satisfaga dicha ecuación.

Aunque es muy importante saber aplicar el procedimiento para resolver una ecuación, más importante resulta primero plantear las ecuaciones correspondientes a un problema, es decir, saber modelar un problema a través de una ecuación es una habilidad matemática muy relevante, sobre todo cuando se trata de aplicar el conocimiento matemático en alguna situación específica de la vida real.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Para comprender los conceptos y procedimientos relacionados con las ecuaciones y funciones lineales es importante el dominio de tus habilidades para realizar operaciones algebraicas básicas tales como la suma, resta, multiplicación y división de polinomios.

Considera los siguientes ejercicios y problemas como una oportunidad para recuperar y reafirmar tus conocimientos.

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Lee detenidamente los seis planteamientos y reflexiona sobre el procedimiento que te permita obtener las soluciones. Realiza tu trabajo con orden y limpieza.

1. Los tres siguientes términos de la secuencia 12, 20, 17, 25, 22, son:

....

2. En el siguiente cuadrado mágico la suma de las líneas horizontales, verticales y diagonales, es igual a $12a - 18b$. Encuentra los binomios faltantes y verifica que efectivamente cada línea suma $12a - 18b$.

$2a - 3b$		$18a - 15b$
$12a - 18b$	$4a - 6b$	
$-2a + 3b$		$6a - 9b$

3. Dados: $A = -4ab + 5b^2 - 1$, $B = 11ab - 7a^2 + 10$ y $C = -7a + 5b^2$, realiza las siguientes operaciones:

   a) $2A - B =$

   b) $(A)(C) - (B)(C) =$

   c) $(B - A)C =$

4. Llena los espacios vacíos de la siguiente tabla:

Descripción	Lenguaje algebraico
El doble de la suma de los cuadrados de dos números.	
	$\frac{(x-y)^2}{3}$
La edad de Enrique es cuatro veces la de su primo aumentada cinco años.	
El peso de Julio es cinco kilogramos más que cuatro veces el peso de su hijo.	
	$\frac{x^2+y^2}{4}$

5. Don Julio tiene un terreno destinado para realizar fiestas, como el que se muestra en la figura, para ello es necesario bardar el terreno y sembrar pasto. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el número de metros lineales de barda que se necesitan para el terreno? y ¿Cuál expresión los metros cuadrados de pasto que se requieren para cubrirlo?

$3a+5$

$2x-1$

Figura 6.1.

6. Traza un plano cartesiano con todos sus elementos y ubica los siguientes personajes: pájaro (−5, −8), árbol (5, 8), papalote (−10, 7) y mariposa (8, −8).

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 5 a 6 preguntas considera tu resultado como **Bien**, de 3 a 4 como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de 4 considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades. Refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: Operaciones algebraicas básicas, traducción algebraica y los componentes básicos del plano cartesiano.

Aprende más

Ecuaciones lineales

La importancia de las ecuaciones se ve reflejada a lo largo de la historia del hombre, el cual ha diseñado modelos que le permiten plasmar la realidad para facilitar el proceso de solución de problemas con los que se enfrenta cotidianamente. Uno de los modelos matemáticos más antiguos son las ecuaciones, cuya palabra proviene del latín *aequatio*, que significa igualdad, involucrando al menos una cantidad desconocida (incógnita). Los primeros escritos sobre estas expresiones se dan en Grecia, con Ahmes en el año 1650 a. n. e. Los babilonios resolvían problemas que involucraban ecuaciones, existen escritos con diversos problemas, ejemplo de uno de ellos es: "Un montón y un séptimo es igual a veinticuatro" es un problema encontrado en el papiro de Rhind, la mejor fuente de información sobre el desarrollo de la matemática egipcia que se tiene hasta el momento, es un papiro de unos 6 m de largo y 33 cm de ancho que contiene 87 problemas junto con su resolución acerca de cuestiones aritméticas básicas, ecuaciones y trigonometría básica, se dice que fue escrito aproximadamente en el año 1650 a.n.e.

Figura 6.2. Papiro Matemático de Rhind.

Hagamos uso del lenguaje algebraico como un lenguaje más corto y practico, que nos permita representar una situación, manipularla y darle solución. Retomemos el problema: "Un montón y un séptimo es igual a veinticuatro" y hagamos su traducción:

Un montón, cantidad desconocida que representaremos por: x y un séptimo, de ese mismo montón, o sea:

$$\frac{1}{7}x \text{ es igual a veinticuatro, es decir } x+\frac{1}{7}x=24$$

Hemos formado una ecuación, una expresión algebraica que representa la relación de igualdad entre cantidades o magnitudes, en donde algún valor es desconocido, en este caso "el montón".

Modelemos a través de una ecuación el siguiente problema:

El Sr. Juan es productor de café y tiene que recoger alrededor de 4 mil cerezas para producir un kilogramo de café, si logró recolectar en promedio unas 21 mil cerezas en esta temporada ¿Cuántos kilogramos de café producirá?

En esta ocasión, la cantidad desconocida es el número de kilogramos de café a producir, representemos dicha cantidad por: k se sabe que se necesitan 4000 cerezas para producir un kilogramo, o sea: $4000k$ y se recolectaron 21000 cerezas:

$$4000k = 21000$$

El grado de una ecuación se determina con el exponente más grande de la incógnita o incógnitas de una igualdad; de acuerdo a su grado y número de incógnitas, las ecuaciones reciben un nombre específico.

Tabla 1.

Denominación de una ecuación según el grado y número de incognitas		
Ecuación	**Descripción**	**Nombre**
$-3x+8=9$	Ecuación de grado uno con una incógnita.	Ecuación lineal
$x^2+3x=9$	Ecuación de grado dos con una incógnita.	Ecuación cuadrática
$x-7y=9$	Ecuación de grado uno con dos incógnitas	Ecuación lineal con 2 incógnitas
$x^3-8=0$	Ecuación de grado tres con una incógnita.	Ecuación cúbica
$x-5y+z=4$	Ecuación de grado uno con 3 incógnitas.	Ecuación lineal con 3 incógnitas

Ecuación: igualdad de expresiones algebraicas que contienen por lo menos una incógnita.

Incógnita: cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o problema, se representa a través de letras.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Lee con atención los tres planteamientos y responde a lo se te solicita en cada caso. Al concluir, comparte con tus compañeros las soluciones obtenidas y escucha las opiniones de ellos.

1. Las siguientes ecuaciones representan una relación entre cantidades, observa y completa lo siguiente:

Situación	Ecuación	Grado	Nombre
El volumen de un prisma rectangular	$x^3 + 2x = 9$		
El costo de un producto	$y = 3000 + 20x$		
La cantidad total de alimento de tres tipos distintos	$x + 9y + 9z = 80$		
El área de un terreno cuadrangular	$x^2 = 36$		
El costo de la electricidad por x kilowatts consumidos	$C = .7x + 10.5$		

2. Relaciona la ecuación lineal de una sola incógnita que sirva como modelo matemático para representar los siguientes problemas, escribe la letra del problema dentro del paréntesis, según corresponda:

a) Jorge produjo 8 toneladas de café más que Carlos y entre ambos produjeron en total 30 toneladas. ¿Cuál es la cantidad de toneladas que produjo Carlos? ( ) $3c+9=105$

b) Luis, Jorge y Carlos son tres hermanos, Luis es mayor que Jorge un año, mientras que Jorge es mayor que Carlos cuatro años ¿Cuál es la edad de Carlos, si se sabe que sus tres edades suman 105? ( ) $7c=5320$

c) Carlos vendió café durante tres días, cada día ganó la mitad de lo que gano el día anterior. ¿Cuánto ganó el primer día si su ganancia total fue $1330? ( ) $2c+8=30$

3. Identifica la ecuación de grado uno con una incógnita que representa el triple de la edad de Juan menos la edad de su hermano de 18 años es igual a 9.

a) $x^3-18=9$ b) $3x-18=9$ c) $9=18-3x$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Solución de ecuaciones lineales o de grado uno con una incógnita

En esta sección se estudiarán las ecuaciones lineales con una incógnita, en las cuales el exponente de la incógnita es uno, por ello se llaman también ecuaciones de grado uno. La forma general en que siempre se puede escribir una ecuación lineal con una incógnita es:

$$ax + b = 0 \text{, donde a es diferente de 0}$$

Para llegar a la forma general se utilizan las operaciones algebraicas básicas y las propiedades aditivas y multiplicativas de los números reales.

Propiedad aditiva. Dados *a*, *b* y *c* tres números reales, tal que *a* = *b*, entonces: *a* + *c* = *b* + *c*. Es decir, en una igualdad al sumar una determinada cantidad en ambos miembros, la igualdad se mantendrá.

Propiedad multiplicativa. Dados *a*, *b* y *c* tres números reales, tal que *a* = *b*, entonces: (*a*)(*c*) = (*b*)(*c*). Es decir, en una igualdad al multiplicar una determinada cantidad en ambos miembros, la igualdad se mantendrá.

Dada una ecuación es importante encontrar el valor de la incógnita a través de un proceso de solución. El procedimiento sustenta su metodología en las propiedades de los números reales tales como el inverso aditivo (la resta) y multiplicativo (la división) de los números.

Las diferentes formas en las que se encuentran este tipo de ecuaciones son:

- La incógnita solo se encuentra en un solo lado de la igualdad: $-3x + 9 = 12$
- La incógnita se encuentra en ambos lados de la igualdad: $3x - 9 = 9x + 9$
- La incógnita se encuentra en una fracción: $2 = \dfrac{3x - 9}{4x - 6}$

Tomando en cuenta el tipo de ecuación y las operaciones opuestas se tienen los siguientes métodos de solución.

La incógnita solo se encuentra en un solo lado de la igualdad

Para ejemplificar este método resolvamos la ecuación: $5x - 30 = -45$. El proceso de despeje es el siguiente:

1. Aplicar propiedad aditiva, sumando 30 en ambos miembros de la igualdad. Se realizan las respectivas sumas.

$$\begin{aligned} 5x - 30 + 30 &= -45 + 30 \\ 5x &= -45 + 30 \\ 5x &= -15 \end{aligned}$$

2. Aplicar propiedad multiplicativa, multiplicando por un quinto (equivalente a dividir entre 5) ambos miembros de la igualdad. Se realizan las respectivas divisiones.

$$\frac{5}{5}x = \frac{-15}{5}$$
$$x = \frac{-15}{5} = -3$$

3. Se tiene la solución

$$x = -3$$

4. Se comprueba, para ello se sustituye el valor encontrado en la ecuación inicial y si satisface la igualdad entonces el valor encontrado es el correcto

$$5(-3) - 30 = -45$$
$$-15 - 30 = -45$$
$$-45 = -45$$

La incógnita solo se encuentra en un lado o miembro de la igualdad

Como ejemplo resolvamos la ecuación $4x - 9 = 2x + 18$. El proceso de solución es el siguiente:

1. Colocar del lado izquierdo de la igualdad, a la incógnita y del lado derecho los valores numéricos, con operaciones opuestas.

$$4x - 9 = 2x + 18$$
$$4x - 2x = 18 + 9$$

2. Reducir términos semejantes.

$$2x = 27$$

3. **Trasponer** los términos con operación opuesta. Se tiene la solución.

$$x = \frac{27}{2} = 13.5$$

4. Se comprueba, para ello se sustituye el valor encontrado en la ecuación inicial y si satisface la igualdad entonces el valor encontrado es el correcto.

$$4(13.5) - 9 = 2(13.5) + 18$$
$$54 - 9 = 27 + 18$$
$$45 = 45$$

Trasponer: mover de lugar un elemento de la igualdad, hacia el lado contrario.

La incógnita se encuentra en una fracción

Resolvamos la ecuación: $\frac{2}{3} = \frac{3x - 6}{-x + 3}$. El proceso de despeje es el siguiente:

1. Subir los términos de los denominadores a través de las operaciones opuesta.

$$\frac{2}{3}=\frac{3x-6}{-x+3}$$

2. Se realizan operaciones y se reducen, colocando todas las incógnitas del lado izquierdo de la igualdad y a la derecha los valores numéricos, (con operaciones opuestas +,-).

$$2(-x+3)=3(3x-6)$$
$$-2x+6=9x-18$$

3. Se reducen términos semejantes

$$-2x-9x=-18-6$$
$$-11x=-24$$

4. Se quitan los términos que faltan para despejar a x, con operación opuesta. Se tiene la solución.

$$x=\frac{-24}{-11}=2.18$$
$$x=2.18$$

   Para comprobar, se sustituye el valor de x en la ecuación inicial.

$$\frac{2}{3}=\frac{3(2.18)-6}{-2.18+3}$$
$$0.66\simeq 0.66$$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Realiza en tu libreta las operaciones necesarias para resolver lo solicitado en los ejercicios 1 y 2. Finalmente en una plenaria, presenta las respuestas al grupo y escucha sus opiniones.

1. Coloca en el paréntesis la letra de la ecuación correspondiente para hacerle corresponder con su solución:

   a) $4=\dfrac{-5x+8}{2x-6}$ ( ) $x=-5$

b) $\frac{3}{2}=\frac{-7x+9}{3x}$ ( ) $x=3$

( ) $x=\frac{13}{2}$

c) $10x-4=12x+6$ ( ) $x=-8$

d) $2x-8=5$ ( ) $x=6$

e) $\frac{1}{2}=\frac{3x}{5x-8}$ ( ) $x=\frac{32}{13}$

( ) $x=\frac{18}{23}$

2. A través de una ecuación lineal con una incógnita plantea los siguientes problemas, resuelve las ecuaciones y comprueba tu solución.

a) Jorge produjo 8 toneladas de café más que Carlos y entre ambos produjeron en total 30 toneladas. ¿Cuál es la cantidad de toneladas que produjo Carlos?

b) Luis, Jorge y Carlos son tres hermanos, Luis es mayor que Jorge un año, mientras que Jorge es mayor que Carlos cuatro años ¿Cuáles son las edades de Luis, Jorge y Carlos, si se sabe que sus tres edades suman 105?

c) Carlos vendió café durante tres días, cada día ganó la mitad de lo que gano el día anterior. ¿Cuánto ganó el primer día si su ganancia total fue $1330?

d) Si un recolector de café ganó esta quincena $120 más de lo que ganó su amigo y la suma de ambos sueldos es $4380 ¿Cuánto ganó cada uno?

e) De un bulto de café, la señora Lupita ha vendido la cuarta parte a Lolita y 15 kg. a la señora Sofía, después de estas dos ventas le quedan en el bulto 45 kg ¿Cuántos kg. de café tenía el bulto al inicio?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Representación gráfica de una ecuación lineal

La clave para poder representar gráficamente una ecuación lineal es considerar la relación existente entre dos variables, de tal forma que una de ellas depende de la otra. La interpretación de una ecuación como una función nos permitirá comprender este tipo de relaciones.

¿Es lo mismo ecuación que función? Una primera diferencia, muy importante, es la época de origen de ambas nociones; mientras que el concepto de ecuación se utiliza desde al menos 300 años aC y estudiado por los griegos en ese tiempo, la noción matemática de función empezó a desarrollarse en el siglo XIV tomando como base las ideas de medición y representación gráfica de las variaciones de ciertas magnitudes como la temperatura en los cuerpos y la velocidad de un móvil.

Estudiar de manera global el comportamiento de un fenómeno considerando todas sus posibles variaciones es la finalidad principal del uso de funciones; en cambio, las ecuaciones se aplican de forma local para describir o calcular la dimensión de una magnitud en un instante determinado.

La variabilidad es el concepto que logró romper el enfoque estático de la matemática, para mostrarte esto de manera sencilla analicemos la siguiente noticia publicada el 03 de abril de 2013 en los periódicos del D.F: “Este miércoles aumentan las tarifas del transporte público en el D.F., la tarifa de micros, autobuses y metrobús aumentarán un peso, mientras que el banderazo de taxi libre será de $8.74 y $1.07 más por cada 250 metros o 45 segundos”.

Centrémonos en el kilometraje, suponiendo que el tráfico es fluido (algo prácticamente imposible en el D.F. durante las horas pico) ¿Cuánto cobrará un taxista por cada kilómetro de viaje? En efecto, $4.28 (1.07 x 4 = 4.28).

Si tenemos $100, ¿qué distancia podría recorrer en este tipo de taxis? Para responder esta pregunta, consideremos x para representar la incógnita, la distancia recorrida. Así la ecuación que modela el problema es: $4.28x + 8.74 = 100$. Luego:

$$x = \frac{100 - 8.74}{4.28} = 21.32$$

Es decir, con \$100 se podrían recorrer 21.32 kilómetros.

Lo que hicimos fue plantear y resolver una ecuación lineal con una incógnita, pensando sólo en la posibilidad de tener \$100. Ahora, pensemos en la variabilidad de la cantidad de dinero que necesitan las personas usuarias de este tipo de taxis para recorrer: 5, 10, 15 y 20 km

En la ecuación: $4.28x + 8.74 = 100$ habría que sustituir x por cada uno de los kilometrajes para obtener el monto a pagar por cada cliente, ya no será 100, el costo de cada viaje será distinto, será una variable que representaremos por y, de tal manera que:

$$4.28x + 8.74 = y$$

A continuación se muestran los valores de y correspondientes a 5, 10, 15 y 20 km.

Kilometraje $\rightarrow x$
Costo $\rightarrow y$

$$4.28x + 8.74 = y$$

$x = 5$	$x = 10$	$x = 15$	$x = 20$
$y = 4.28x + 8.74$	$y = 4.28x + 8.74$	$y = 4.28x + 8.74$	$y = 4.28x + 8.74$
$y = 4.28(5) + 8.74$	$y = 4.28(10) + 8.74$	$y = 4.28(15) + 8.74$	$y = 4.28(20) + 8.74$
$y = 30.14$	$y = 51.54$	$y = 72.84$	$y = 94.34$

Observa que lo hecho anteriormente consistió en sustituir los valores de x y calcular los de y a través de la función dada. A este proceso se le conoce como tabulación y con él podremos obtener el gráfico en el plano cartesiano ubicando las parejas de valores de distancia y costo:

Tabla 2.

Kilometraje x (km)	Costo y (\$)
5	30.14
10	51.54
15	72.84
20	94.34

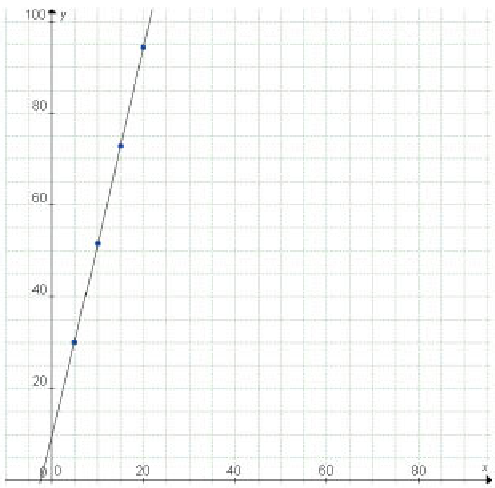


Figura 6.3.

Las funciones lineales tienen la forma $f(x) = ax + b$.

Donde $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la razón de cambio y $b \rightarrow (0, b)$ la intersección con el eje y.

Para graficar cualquier función lineal, el proceso a seguir es:

Primer paso. Despejar y (variable dependiente) en términos de x (variable independiente)

Segundo paso. Realizar una tabla para la función lineal, dando algunos valores a x y realizar operaciones para encontrar el valor de y.

Tercer paso. Ubicar los puntos (x, y) de la tabla en el plano cartesiano y unirlos.

La gráfica de una función lineal puede utilizarse para resolver ecuaciones lineales que le correspondan a ella.

Ejemplo: Si consideramos que un productor de café siembra las cerezas de este grano y sabe que en promedio se producen 11500 kg por hectárea, con esta información contesta la siguiente pregunta, ¿cuántos hectáreas debe plantar de cereza de café para cubrir un pedido de 60 mil kilogramos, si se ha asociado con su compadre que ya tiene en existencia 2500 kg?

Solución:

Si x representa el número de hectáreas necesarias a cultivar de cereza para surtir el pedido, la expresión que representa el problema es:

$$11500x + 2500 = 60000$$

Para resolver esta ecuación a través del gráfico de la función, hacemos lo siguiente:

Expresamos y (número de kg recolectados de cereza) en términos de x:

$$11500x + 2500 - 60000 = 0$$
$$11500x - 57500 = y$$

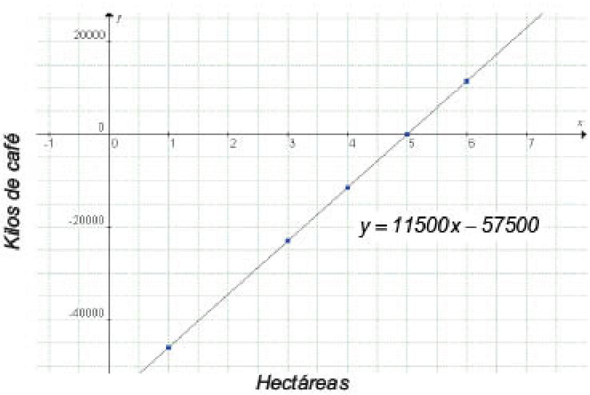


Figura 6.4

Tabulamos la función:

x (hectáreas)	*y (kg)*	*(x, y)*
1	*-46000*	*(1, −46000)*
3	*-23000*	*(3, −23000)*
4	*-11500*	*(4, −11500)*
5	*0*	*(5,0)*
6	*11500*	*(6, 11500)*

Resolviendo la ecuación por método algebraico obtenemos la misma solución:

$$11500x + 2500 = 60000$$
$$11500x = 57500$$
$$x = \frac{57500}{11500} \quad x = 5$$

En la tabla y la gráfica, observa que la solución es x = 5 hectáreas, es decir, en 5 hectáreas se producirán 5(11500) = 57500 kg de café más los 2500 kg del compadre dan un total de 60000 kg, justamente los solicitados en el pedido correspondiente.

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Hemos estudiado la relación entre una ecuación y una función lineal, en los siguientes ejercicios y problemas te proponemos consolidar el dominio de dicha relación.

Instrucciones: Lee con detenimiento los enunciados del 1 al 4 realizando en tu libreta las operaciones necesarias para resolver lo que se solicita en cada caso.

1. Sergio, es un recolector de café, ha sido contratado por jornadas de 10 horas de trabajo diarias, por este tiempo la paga que le ofrecen es de \$80. Si trabaja horas extras se las pagaran a razón de \$20 cada una.

Con la información anterior, llena la tabla siguiente:

Horas extras trabajadas al día: *x*	0	1	2	3	4	5	6	7
Pago por día: *y* *y = 80 + 20x*								

Grafica en el siguiente plano cartesiano las coordenadas determinadas en la tabla anterior de horas extras trabajadas al día contra la paga diaria.

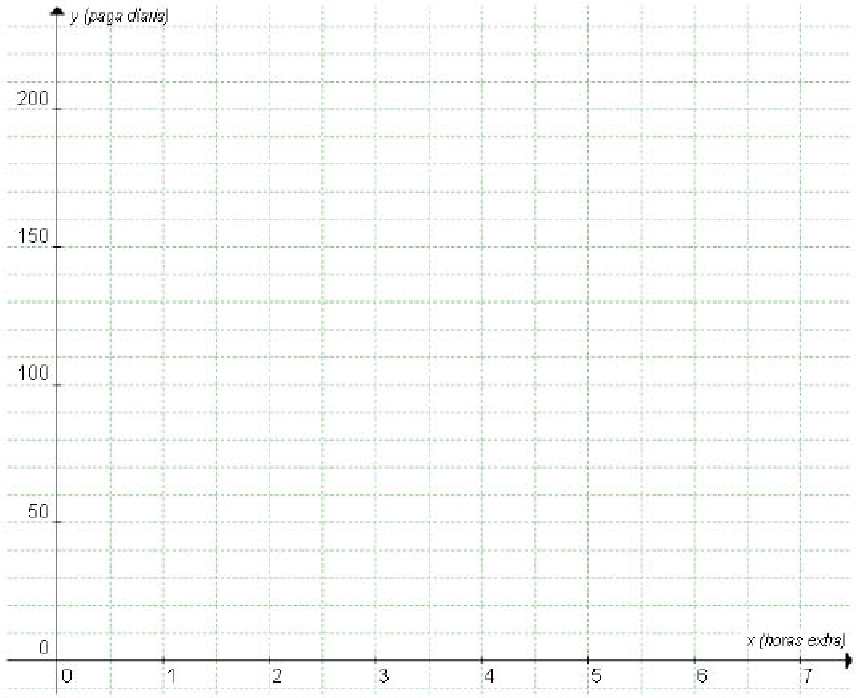


Figura 6.5.

Observa la tabla y la gráfica anterior para contestar las siguientes preguntas:

a) Si Sergio desea ganar en un día $200, ¿cuántas horas deberá trabajar ese día?

b) ¿Cuántas horas extra máximas podría trabajar Sergio en un día? Recuerda que una persona necesita mínimo de 6 horas para descansar.

c) La paga de Sergio de un día fue de $160, ¿cuántas horas extras trabajó dicho día?

2. Los siguientes dos problemas resuélvelos a través del gráfico correspondiente y también utilizando el procedimiento algebraico:

a) Si el productor de café tiene que sembrar un total de 5 hectáreas y tiene sembrado 2500 árboles, ¿cuántos árboles le restan por sembrar, si por cada hectárea se siembran 2000 árboles?

b) Si ahora tiene sembrado 3800 árboles y por cada hectárea en promedio se siembran 1950 árboles, la ecuación resultante es $1950x + 3800 = 9750$, ¿cuántas hectáreas faltan por sembrar? y ¿cuántos árboles se plantarían?

3. Observa el siguiente gráfico que representa la depreciación mensual del valor comercial de una computadora usada las 24 horas del día en una empresa para contestar las siguientes preguntas:

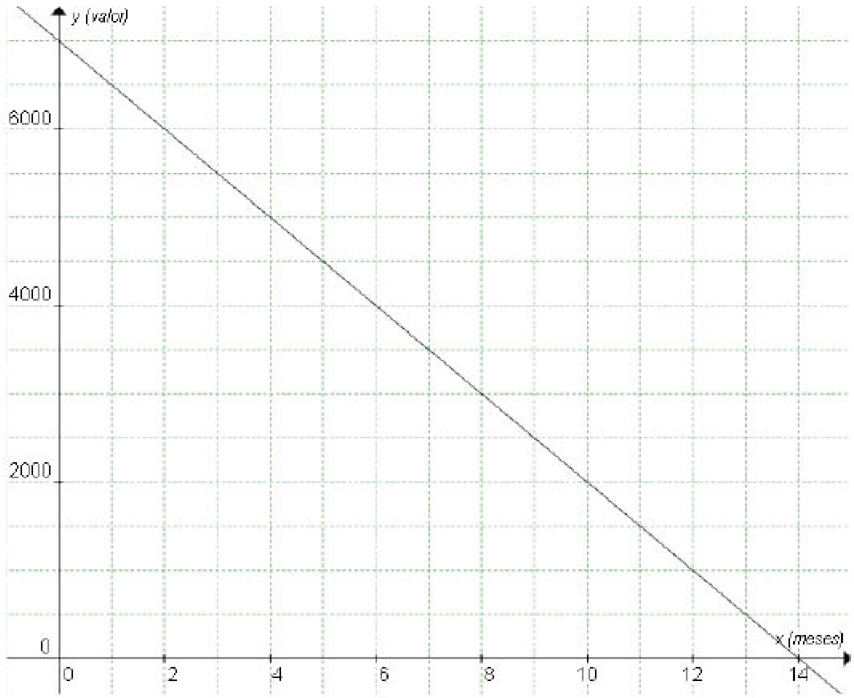


Figura 6.6.

a) ¿Cuál es el valor comercial de la computadora cuando esta nueva?

b) ¿Cuánto se deprecia mensualmente la computadora?

c) Determina la función que relaciona el valor comercial como una variable dependiente del tiempo medido en meses.

d) ¿Cuál es el valor comercial cuando han transcurrido seis meses?

e) Si el valor comercial de la computadora es sólo de $2000, ¿cuántos meses ha estado en uso?

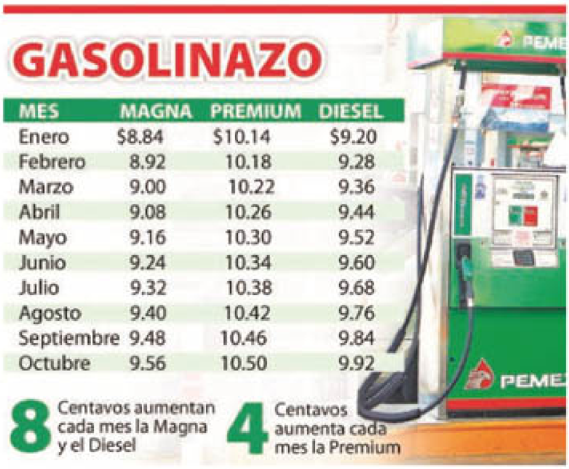
Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

El “gasolinazo” en México significa que cada mes el precio de las gasolinas aumentan de manera proporcional ¿Te has preguntado porque se lleva a cabo este incremento? y ¿tiene relación este fenómeno con el manejo de ecuaciones y gráfico de funciones lineales? Para dar respuesta a las preguntas observa la figura 6.7 y anota en las líneas siguientes tus conclusiones sobre ello.


GASOLINAZO

MES	MAGNA	PREMIUM	DIESEL
Enero	$8.84	$10.14	$9.20
Febrero	8.92	10.18	9.28
Marzo	9.00	10.22	9.36
Abril	9.08	10.26	9.44
Mayo	9.16	10.30	9.52
Junio	9.24	10.34	9.60
Julio	9.32	10.38	9.68
Agosto	9.40	10.42	9.76
Septiembre	9.48	10.46	9.84
Octubre	9.56	10.50	9.92

Figura 6.7. Precios de la gasolina por mes.

....

....

....

....

....

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Actividad 4

Producto de aprendizaje: tríptico comercial

Son folletos que tienen la finalidad de informar respecto de un tema en particular, normalmente son de tamaño carta y se doblan en tres partes iguales.

Instrucciones:

- Con ayuda de su profesor (a) integren equipos de tres integrantes con la finalidad de trabajar colaborativamente en la elaboración de un tríptico comercial.
- El tema a abordar es el del café, pueden seleccionar cualquier aspecto interesante y positivo que sea de su interés, mismo que sirva para destacar las propiedades de este grano.
- El tríptico deberá contener el resultado de la investigación que realices respecto a la producción y consumo del café en nuestro país, con la intención de promoverlo de manera atractiva para el lector.
- Deberán utilizar al menos tres ecuaciones y tres gráficos de funciones lineales que representen de manera aproximada algunas partes del proceso de cultivo o de producción o la venta de este grano.
- Los gráficos deberán estar vinculados con la representación de del aspecto que hayan decidido abordar.
- La información escrita en el tríptico debe tener en todo momento la intención de promover el consumo de café y, sobre todo enfatizando que el producido en México mantiene un buen reconocimiento internacional desde hace ya algunas décadas.
- El material sugerido es: hojas de tamaño carta, fuentes de información, y una computadora con algún programa graficador. En caso de no contar con una computadora, puedes realizar tus gráficos de manera manual.
- Preparen su tríptico comercial para ser expuesto a todos sus compañeros de grupo y, posteriormente, entregarlo a su profesor(a) para su correspondiente evaluación.

Recomendaciones para la elaboración del triptico:

- Cuiden que la información de su tríptico este referenciada, incluyan las fuentes de información consultadas.
- Busquen que el diseño del folleto no quede "cargado" de información, deberán lograr el equilibrio entre texto e ilustraciones.
- El ingenio y creatividad para enaltecer las propiedades del café y utilizar ecuaciones y funciones lineales serán el punto central a evaluar.

Actividad 5

Producto de aprendizaje: elaboración de tu problemario

Esta actividad consiste en conformar tu problemario con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las tres actividades presentadas y en la actividad de reflexión, a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del problemario, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: tríptico comercial

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Información fundamentada.			
	Utiliza un sistema de referencia, por ejemplo APA, para citar tres fuentes de información consultadas.			
Presentación	Material tamaño carta dividido en tres partes iguales.			
	Formato atractivo tanto de texto, como de imágenes y **gráficos.**			
	Creatividad en la elaboración del tríptico comercial.			
	Escritura clara de la información, ecuaciones y **gráficos.**			
Dominio Conceptual y Procedimental	**Identifica la relación entre** ecuaciones, funciones y tema cafetalero.			
	Presenta en el tríptico al menos tres ecuaciones y **gráfica de funciones lineales**			
	Demuestra de forma precisa y coherente que las soluciones de las ecuaciones lineales sirven para resolver una problemática real respecto de la producción o comercialización del café.			
Actitudes	Presenta el trabajo con orden y limpieza			
	Trabaja de forma colaborativa.			
	Muestra respeto al compartir y escuchar ideas.			
	Respeta las opiniones de otros.			
Total de puntos		**13**		

Si en la lista de cotejo lograste los **13 puntos**, considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **10 a 12 puntos** es **Bien**, de **7 a 9** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 7** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de: nombre de la escuela, estudiante, asignatura, bloque, título del poblemario, semestre, grupo, fecha.			
	Actividades: orden y limpieza. El planteamiento de la actividad a tinta. Proceso de solución a lápiz.			
	Presenta índice.			
Planteamiento de ecuaciones	Identifica correctamente el tipo de ecuación a utilizar.			
Procedimientos	Utiliza el método solicitado.			
	Escribe todos los pasos.			
Solución	Comprueba las soluciones obtenidas.			
	Las interpreta de acuerdo al contexto.			

Gráfico de funciones	Realiza tabulaciones obteniendo correctamente al menos tres coordenadas			
	Localiza en el plano cartesiano coordenadas de puntos para formar líneas rectas.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Escucha con respeto las opiniones de los demás.			
	Sigue con atención instrucciones y las interpreta.			
Total de puntos		**13**		

Si en la lista de cotejo lograste los **12 a 13 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **10 a 12 puntos** es **Bien**, de **7 a 9** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 7** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque VI

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque VII

Resuelves ecuaciones lineales II

Introducción

El hombre ha enfrentado desde sus inicios una serie de dificultades relacionadas con su vida, como su alimentación, vestido, sustento, traslado, por mencionar algunas, por lo cual ha buscado estrategias que le permitan representar la realidad de lo que vive, en una expresión algebraica fácil de manipular, para poder darle solución.

El álgebra es la rama de las matemáticas encargada de traducir el lenguaje común de los problemas en una ecuación o un sistema de ecuaciones y proporciona diversos métodos para resolverlos. Los **babilonios** fueron unas de las primeras civilizaciones en plantear sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por ejemplo, para hallar la longitud del largo y del ancho de terrenos, dado su perímetro y área. La simbología para el problema es a través de un sistema de ecuaciones, con los términos que se muestran en el siguiente ejemplo:

$$\frac{1}{4}\text{anchura} + \text{longitud} = 7 \text{ manos}$$
$$\text{longitud} + \text{anchura} = 10 \text{ manos}$$

Babilonia: fue una antigua ciudad de la Baja Mesopotamia. Ganó su independencia durante la Edad Oscura, tras lo cual se convirtió en capital de un vasto imperio bajo el mandato de Hammurabi (siglo XVIII aC). Desde entonces se convirtió en un gran centro político, religioso y cultural.

Los métodos de solución de estos sistemas en sus inicios fueron a través del tanteo sistemático, basándose en la prueba y error, es decir dándole valores a las incógnitas hasta llegar a encontrar los números que cumplían con la igualdad (Collete, 1985).

Sin embargo, estos sistemas de ecuaciones no son solo propios de épocas pasadas, en la actualidad siguen vigentes, se encuentran inmersos en la vida cotidiana, ejemplo de ello se muestra en la siguiente situación.

El gasto en trasportación que Iván realiza para ir a la escuela, durante dos semanas se describe a continuación:

En la primera semana toma 5 veces la ruta 1 y 7 veces la ruta 2 generándole un gasto de $ 89.50. En la segunda semana toma 7 veces la ruta 1 y 6 veces la ruta 2, teniendo un gasto de $ 93.00. Para que Iván conozca el precio del pasaje de cada ruta deberá plantear dos expresiones algebraicas denominadas ecuaciones con dos incógnitas. En donde los costos del pasaje de la ruta 1 y ruta 2 se representan por las incógnitas x, y las cuales son iguales al gasto por semana. Las ecuaciones que se generan son las siguientes:

$$\text{Ruta 1} \rightarrow 5x + 7y = 89.50$$
$$\text{Ruta 2} \rightarrow 7x + 6y = 93.00$$

Las dos expresiones algebraicas forman un conjunto de ecuaciones llamado sistema. El resolver el sistema permitirá descubrir el costo del pasaje de cada ruta de transporte.

El objetivo de este bloque VII es conocer la estructura de los sistemas de ecuaciones lineales de 2 incógnitas por 2 ecuaciones (2 × 2), sus elementos así como los métodos para resolverlos.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida	• *Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Identificas cantidades o magnitudes en su contexto y las representas a través de un sistema de ecuaciones lineales, dando significado al concepto de incógnitas y el aprendizaje de los distintos métodos de solución, desarrollando la habilidad de observación, análisis y resolución de problemas.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Clasificación según su solución. • Métodos de solución: determinantes, reducción, igualación y sustitución. • Su representación gráfica. • Solución de los sistemas lineales por método gráfico. • Solución de Problemas aplicando sistema de ecuaciones lineales.	• Representa la relación entre cantidades a través de un sistema de ecuaciones lineales. • Conoce y aplica los distintos métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales. • Resuelve problemas contextualizados. • Construye y deduce la importancia del gráfico de un sistema de ecuaciones lineales.

Procedimentales	• Deduce y resuelve un sistema de ecuaciones lineales, aplicando los métodos de solución para resolver situaciones de la vida cotidiana.	• Realiza ejercicios. • Resuelve problemas contextualizados y analiza los resultados obtenidos. • Observa e interpreta gráficas.
Actitudinales	• Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza. • Comparte sus ideas y acepta las de sus compañeros. • Identifica el alcance del trabajo colaborativo.	• Elaboración y exposición de actividades y trabajos de manera ordenada y con limpieza. • Expresa sus ideas y acepta con respeto las de sus compañeros.

¿Qué tiempo vas a emplear?

El tiempo necesario para cumplir el propósito de este bloque son ocho horas, es conveniente utilizar cuatro horas para la comprensión temática y cuatro horas para la realización de las actividades y el desarrollo del proyecto final.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque obtendrás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Portafolio de evidencias
- Cartel tutorial

Portafolio de evidencias. Lo podrás hacer en una libreta o en un cuaderno, que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones que te permitan llegar a soluciones de los problemas que se te presenten en las actividades de este bloque. Estos deben mostrar un orden y limpieza.

Cartel tutorial. En equipos de trabajo, elaborarán unos carteles donde expliquen el planteamiento de un problema de la vida real a través de un sistema de ecuaciones 2 x 2. Deberán empezar por la identificación y definición de variables involucradas en el problema siguiendo con la construcción de las dos ecuaciones que formaran el sistema y el procedimiento con al menos dos métodos de solución para resolver el sistema de ecuaciones.

Para iniciar, reflexiona

Retomando el ejemplo de la introducción: el gasto en trasportación que Iván realiza durante dos semanas, se describe a continuación:

Figura 7.1.

En la primera semana toma 5 veces la ruta 1 y 7 veces la ruta 2 generándole un gasto de $ 89.50. En la segunda semana toma 7 veces la ruta 1 y 6 veces la ruta 2, teniendo un gasto de $ 93.00. Para que Iván conozca el precio del pasaje de cada ruta deberá plantear dos expresiones algebraicas denominadas ecuaciones con dos incógnitas. En donde los costos del pasaje de la ruta 1 y ruta 2 se representan por las incógnitas x, y las cuales son iguales al gasto por semana. Las ecuaciones que se generan son las siguientes:

$$\text{Ruta 1} \rightarrow 5x + 7y = 89.50$$
$$\text{Ruta 2} \rightarrow 7x + 6y = 93.00$$

¿Cómo resolver este problema? Retoma lo aprendido en los módulos anteriores y complementa la siguiente tabla.

Instrucciones: Sustituye cada valor de x, y de y en cada ecuación; este es un primer acercamiento a la solución del problema.

x	y	$5x + 7y$	$7x + 6y$
4	5.5	5(___) + 7(___) = ________	7(___) + 6(___) = ________
5	6.5	5(___) + 7(___) = ________	7(___) + 6(___) = ________
6	7.5	5(___) + 7(___) = ________	7(___) + 6(___) = ________
7	8.5	5(___) + 7(___) = ________	7(___) + 6(___) = ________
5	6.0	5(___) + 7(___) = ________	7(___) + 6(___) = ________
6	8.5	5(___) + 7(___) = ________	7(___) + 6(___) = ________
7	9.9	5(___) + 7(___) = ________	7(___) + 6(___) = ________
6	8.0	5(___) + 7(___) = ________	7(___) + 6(___) = ________

Una vez completa la tabla contesta las siguientes preguntas:

¿Qué valores de x y de y sustituidos en $5x + 7y$, dan como resultado 89.50?

x = __________ y = __________

¿Qué valores de x y de y sustituidos en $7x + 6y$, dan como resultado 93.00?

x = __________ y = __________

¿Estos valores que representan para Iván?

____

Si observas el proceso para encontrar la solución del sistema de ecuaciones es largo y con muchas operaciones. Se te invita a conocer el tema sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y desarrolles la habilidad de resolver problemas a través de este tipo de sistemas de manera breve y concreta.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Para lograr las competencias de este bloque, es importante identificar las fortalezas y debilidades de los conocimientos adquiridos en tu educación secundaria y los bloques anteriores.

Instrucciones: Lee cuidadosamente, determina lo que se te pide en cada caso. No olvides, escribir en tu libreta los procesos de solución de manera ordenada y con limpieza.

1. En los siguientes enunciados identifica cuál es la variable independiente y dependiente y escríbelo en la línea.

a) El pago de la luz y el consumo de kilowatts/hora.
b) El gasto en el pasaje y el número de combis por tomar.
c) La producción total de leche por semana y los litros diarios.

____

2. Si Pedro va a la tienda y pagó con un billete de $ 1000 del cual le dieron de cambio $ 40 y compró refrescos que cuestan $ 24 cada uno, ¿cuántos refresco compró?

Para este problema contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Quién es la variable dependiente e independiente?

b) Si x representa el número de refrescos ¿qué ecuación representa esta situación?

c) ¿Qué tipo de ecuación resultó?

d) Encuentra el valor de x

e) Realiza la tabla de la ecuación, para valores de x: 10, 20, 30, 40, 50. Posteriormente dibuja el gráfico. Utiliza el espacio del recuadro siguiente:

f) ¿Qué valor tiene la intersección de la gráfica con el eje x, y qué representa para el problema?

3. Para los siguientes terrenos donde se desconocen algunos elementos encuentra el total de metros cuadrados de pasto que se necesitan para cubrirlos, si ambos tienen el mismo perímetro.

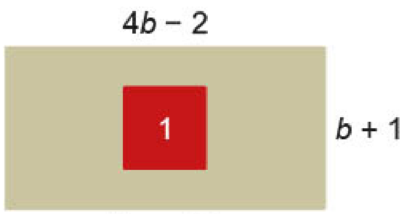


Figura 7.2.

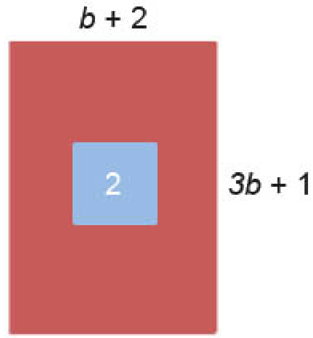


Figura 7.3.

$P =$ .... $P =$ ....

¿Qué tipo de ecuación se tiene? ....

Resolviendo el valor de b es: ....

La medida del terreno 1 es: .... terreno 2: ....

¿Cuántos metros cuadrados de pasto se requieren para cubrir cada terreno?

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Observa los puntos que se te otorgan por cada sección de la evaluación, si obtuviste **16 a 12 puntos** considera tu resultado como **Bien**, de **11 a 7** como **Regular** y si fueron **menos de 7** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades de aprendizaje. Refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: Aritmética, áreas de figuras geométricas, operaciones con expresiones algebraicas, ley de signos, propiedades de los números reales y solución de ecuaciones lineales.

Aprende más

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las tostadas son un emblemático símbolo de la comida Mexicana, platillo típico poblano; el cual puede ser de pollo, carne de res, queso o tinga. Para los equipos de la escuela resulta una actividad de festejo después de cada partido ir a comer unas ricas tostadas.

Figura 7.4.

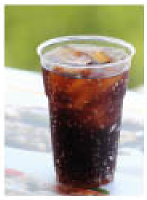


Figura 7.5.

El equipo de futbol compró 6 tostadas y 8 refrescos por $108 y el equipo de básquet pagó $146.5 por 8 tostadas y 11 refrescos. El equipo de la porra llego más tarde y pregunto a los integrantes de los equipos ¿Cuál es precio de cada tostada y de cada refresco? Como respuesta sólo recibió la información anterior, halla el precio individual tanto de las tostadas como de los refrescos. La solución se plantea a continuación.

Sea t precio de la tostada y r el precio del refresco:

Gasto del equipo de futbol $\rightarrow \$\ 6t + 8r = 108$
Gasto del equipo de básquet $\rightarrow \$\ 8t + 11r = 146.5$

Por lo consiguiente, se tiene el sistema: $\begin{cases} 6t + 8r = 108 \\ 8t + 11r = 146.5 \end{cases}$

A la agrupación de dos ecuaciones de grado uno con dos incógnitas se le llama *sistema lineal de dos por dos* (2 × 2). Cuya forma general es:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$$

Donde las incógnitas son x y y son las variables desconocidas y los coeficientes de la ecuación son A, B, C, D, E y F.

Esto permite concluir que del problema del costo de las tostadas y refresco, resulta un sistema de ecuaciones lineales de dos por dos.

Otros ejemplos de sistemas lineales 2 × 2:

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 5y = 36 \\ -3x + y = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - 4y = 12 \end{cases}$$

Para hallar las posibles soluciones del sistema lineal 2 × 2 que resultó del problema de las tostadas y otros que resulten de distintas situaciones de la vida cotidiana, se cuenta con diversos métodos de solución, el primero de ellos es el de Determinantes.

Método de determinantes

Para describir el método, es importante expresar al sistema como un arreglo matricial y el cálculo de los determinantes. Para ello, retomando el sistema:

$$\begin{cases} 6t + 8r = 108 \\ 8t + 11r = 146.5 \end{cases} \quad \text{La representación matricial aumentada} \quad \left|\begin{array}{c|c} 6t + 8r & 108 \\ 8t + 11r & 146.5 \end{array}\right|$$

El *arreglo matricial* es una organización rectangular de 2 renglones por 2 columnas de cantidades tomadas de los coeficientes de cada ecuación del sistema.

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} A & B & C \\ D & E & F \end{array}\right] \ \textit{Renglones}$$

Columnas

El *determinante* es el arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

El cual se representa por $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det$ y se define como $ad - bc$.

Para encontrar las soluciones es preciso el cálculo de tres determinantes:

El *determinante principal* se obtiene con los coeficientes de las incógnitas:

$$\det_p = \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} = AE - DB$$

Para el *determinante auxiliar en x*, se intercambia la columna de los coeficientes de la variable *x* por en los términos constantes del sistema:

$$\det_x = \begin{vmatrix} C & B \\ F & E \end{vmatrix} = CE - FB$$

Por último, el *determinante auxiliar en y*, se reemplazan los coeficientes de la variable *y*, por los valores contantes del sistema:

$$\det_y = \begin{vmatrix} A & C \\ D & F \end{vmatrix} = AF - DC$$

Por consiguiente:

$$\det_t = \begin{vmatrix} 108 & 8 \\ 146.5 & 11 \end{vmatrix} = 108(11) - 146.5(8) = 16$$

$$\det_r = \begin{vmatrix} 6 & 108 \\ 8 & 146.5 \end{vmatrix} = 6(146.5) - 8(108) = 15$$

El determinante principal, auxiliar en x y en y, permiten encontrar la solución del sistema de ecuaciones. Así, se tiene que las soluciones para t y r están dadas por los siguientes cocientes.

$$t=\frac{\det_t}{\det_p}=\frac{16}{2}=8 \qquad\qquad r=\frac{\det_r}{\det_p}=\frac{15}{2}=7.5$$

Lo anterior representa \$8 el precio de la tostada y \$7.5 el precio del refresco.

El siguiente procedimiento sintetiza el método de *determinantes*, dado un sistema lineal de 2 × 2:

$$\begin{cases} Ax+By=C \\ Dx+Ey=F \end{cases}$$

Procedimiento de solución:

1. Calcular los determinantes.

$$\det_p=\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}=AE-DB$$

$$\det_x=\begin{vmatrix} C & B \\ F & E \end{vmatrix}=CE-FB$$

$$\det_y=\begin{vmatrix} A & C \\ D & F \end{vmatrix}=AF-DC$$

2. Obtener el valor para x dividiendo el determinante en x entre el principal.

$$x=\frac{\det_x}{\det_p}$$

3. Se encuentra la solución para y, realizando la división del determinante de y entre el principal.

$$y=\frac{\det_y}{\det_p}$$

4. Comprobar soluciones.

Otro método para resolver estos sistemas de ecuaciones, es el de reducción que enseguida se explica.

Método de reducción

Si ahora, se tiene que las chicas de porras pidieron 5 huevos preparados y 9 jugos, junto con unos compañeros de escuela que pidieron 3 huevos y 7 jugos, las porristas y sus compañeros pagaron \$119 y \$81, respectivamente. ¿Cuál es el costo del huevo y del jugo?

Si x representa el costo del huevo preparado y y el precio del jugo, se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 9y = 119 \\ 3x + 7y = 81 \end{cases}$$

Para resolverlo por reducción se siguen los siguientes pasos:

1. Se multiplican las ecuaciones, por un valor de tal forma que se elimine alguna de las incógnitas.

$$\begin{cases} (-3)(5x + 9y = 119\ ) \\ \ (5)(3x + 7y = 81\ \ ) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15x - 27y = -357 \\ \ 15x + 35y = 405 \end{cases}$$

2. Se suman ambas ecuaciones

$$\begin{cases} -15x - 27y = -357 \\ \ 15x + 35y = 405 \end{cases}$$

$$8y = 48$$

3. Se despeja la incógnita y se encuentra su valor.

$$y = \frac{48}{8} = 6$$

4. Esta cantidad se sustituyen en cualquiera de las dos ecuaciones

$$5x + 9(6) = 119$$

$$5x + 54 = 119$$

5. Se despeja lo otra incógnita, para hallar su valor.

$$x = \frac{119 - 54}{5} = 13$$

6. Se comprueba.

$$x = 13$$

Así, el costo del huevo es de \$13 y el jugo de \$6.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas. Posteriormente presenta los procedimientos y soluciones a tus compañeros, atendiendo sus opiniones.

1. La diferencia de las edades de Pedro y Luis es 12 años y el doble de su suma es igual a 156, ¿qué edad tiene cada uno? Si p es la edad de Pedro y l la edad de Luis, encuentra el sistema y resuelve por el método de determinantes.

2. Se tienen $1,130 en 178 monedas de 10 y de 5. ¿Cuántas monedas de 10 y 5 son? Representa a x número de monedas de 10 y y el número de monedas de 5 (utiliza el método de determinantes).

3. Todos los días un estudiante camina y trota para ir a la escuela. Camina en promedio 5 km/h y trota 9 km/h. Si la distancia de la casa a la escuela es 8 km y su recorrido lo realiza en una hora ¿Qué distancia recorre el estudiante corriendo y caminando? (Usa el método de reducción).

4. Un alumno realizó una evaluación de 50 preguntas. Cada respuesta correcta vale 2 puntos. Por cada respuesta incorrecta o no respondida se le quitan un punto; si obtuvo 64 puntos, ¿cuántas respuestas contestó bien? ¿Cuántas preguntas contestó mal o no respondió? (Utiliza el método de determinantes).

5. Si se van variando el número de preguntas y la puntación en algunas evaluaciones como las del problema anterior, se generan los siguientes sistemas de ecuaciones, resuelve cada uno de ellos por el método que más se te facilite.

a) $\begin{cases} x+y=80 \\ 1.5x-0.5y=60 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+2y=40 \\ 2.5x-y=22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=60 \\ 2x-0.5y=85 \end{cases}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Método de igualación

Las chalupas son otro antojito típico poblano, que es parte de la alimentación mexicana. La familia Ruiz y la familia Pérez fueron a cenar chalupas con doña Lolita.

Figura 7.6.

La primera familia pidió 8 órdenes de chalupas y 4 tazas de café pagando \$128. La segunda familia solicitó 10 órdenes de chalupas y 6 tazas de café pagando \$168. Al vecino de ambas familias le recomiendan las chalupas de doña Lolita, comentándole la información anterior pero no le dicen el precio unitario ¿Cuánto cuesta cada chalupa y cada taza de café? La solución es la siguiente:

Si x representa el costo de las chalupas y y el costo del café, esta situación tiene como representación el siguiente sistema de ecuaciones lineales de 2 × 2.

$$\begin{cases} 8x+4y=128 \\ 10x+6y=168 \end{cases}$$

Para hallar el valor de x y y, te presento otro método que se conoce como *igualación*. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Se despejan de cada ecuación la incógnita que tu elijas, en este caso fue y.

$$8x+4y=128$$
$$4y=128-8x$$
$$y=\frac{128-8x}{4}=32-2x$$
$$10x+6y=168$$
$$y=\frac{168-10x}{6}=28-5/3x$$

2. Se igualan ambos despejes.

$$32-2x=16-x$$

3. Se realizan las operaciones necesarias para despejar la incógnita que se tiene.

$$32-2x=28-5/3x$$
$$1/3x=32-28$$
$$x=4(3)=12$$

4. Se sustituye este valor en alguno de los dos primeros despejes, para hallar el valor de la segunda incógnita.

$$y = 32 - 2x$$

$$y = 32 - 2(12) = 32 - 24 = 8$$
$$y = 8$$

Con lo anterior es posible contestar al vecino de las dos familias, *el costo de la orden de chalupas es de $12.00 y el café de $8.00.*

Otro proceso de solución de sistemas de ecuaciones lineales es el descrito a continuación.

Método de sustitución

La leche es un alimento importante en nuestra alimentación. Según el periódico "El Sol de México" anunció que nuestro país ocupa el séptimo lugar mundial en producción de leche (García, 2013).

Figura 7.7.

La granja de don Raúl realiza cada hora un envasado de 100 litros de leche en dos presentaciones, de 1.5 litros y de 2.5 litros, si en total llenan 52 botellas, ¿cuántas botellas de cada capacidad tienen?

Si x representa el número de botellas de 1.5 l y y el número de botellas de 2.5 l, el problema se modela con el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ 1.5x + 2.5y = 100 \end{cases}$$

El proceso de solución por sustitución es el siguiente:

1. Se despeja cualquiera de las incógnitas de alguna de las dos ecuaciones.

$$x + y = 52$$
$$y = 52 - x$$

2. Se sustituye este valor en la segunda ecuación.

$$1.5x + 2.5(52 - x) = 100$$

3. Se realizan operaciones y se despeja la segunda incógnita.

$$1.5x + 130 - 2.5x = 100$$
$$-x + 130 = 100$$
$$x = 130 - 100 = 30$$

4. Se sustituye este valor en el primer despeje, para encontrar el segundo valor desconocido.

$$y = 52 - x = 52 - 30 = 22$$

Se concluye el proceso

$$x = 30 \quad y = 22$$

Por lo tanto, el número de botellas de 1.5 litros es 30 y de 2.5 litros son 22. Comprobando esto se tiene 30 + 22 = 52 y que 1.5(30) + 2.5(22) = 45 + 55 = 100, se cumple las dos condiciones de problema.

El último de los métodos a estudiar en este bloque, para resolver sistema de ecuaciones lineales 2 × 2 es el siguiente.

Método gráfico

Recordar del bloque VI que es posible graficar una ecuación lineal en el plano cartesiano, para el caso de sistemas lineales 2 × 2 se graficarán ambas ecuaciones, obteniendo como resultando el trazo de dos rectas. Para realizar el gráfico de cada una de las ecuaciones del sistema, es necesario:

1. Despejar a y de ambas ecuaciones.
2. Hacer una tabla para ambas ecuaciones con los mismos valores de x.
3. Graficar ambas rectas con el mismo plano.
4. La solución es el punto de intersección de ambas rectas.

Figura 7.8.

Es importante tomar en cuenta que hay una clasificación para los sistemas lineales 2 × 2, según el tipo de solución.

Figura 7.9.

Así, retomando el sistema de la leche:

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ 1.5x + 2.5y = 100 \end{cases}$$

Para resolverlo por el método gráfico, se procede como sigue:

Despejando $y \rightarrow \; y = 52 - x$ y $y = 40 - 0.6x$

Tabulando y graficando:

x	$y = 52 - x$	$y = 40 - 0.6x$
10	42	34
15	37	31
20	32	28
25	27	25
30	22	22
35	17	19
40	12	16

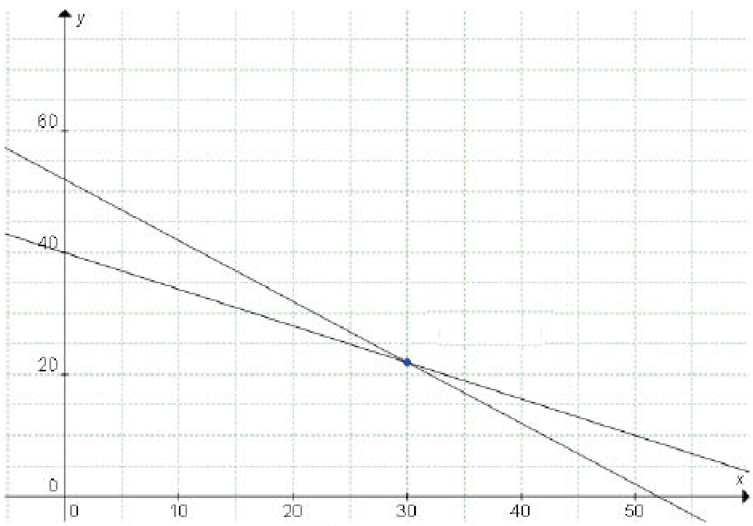


Figura 7.10.

Para este caso el sistema resulto compatible tiene una solución, pero ¿cuándo es que un sistema es incompatible? Obsérvese el siguiente caso.

$$\begin{cases} 2y - 6x = 4 \\ y - 3x = 6 \end{cases} \quad \text{despejando y} \quad \begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 3x + 6 \end{cases}$$

x	$y = 3x + 6$	$y = 3x + 2$
-3	-3	-7
-1	3	-1
0	6	2
2	12	8
4	18	14

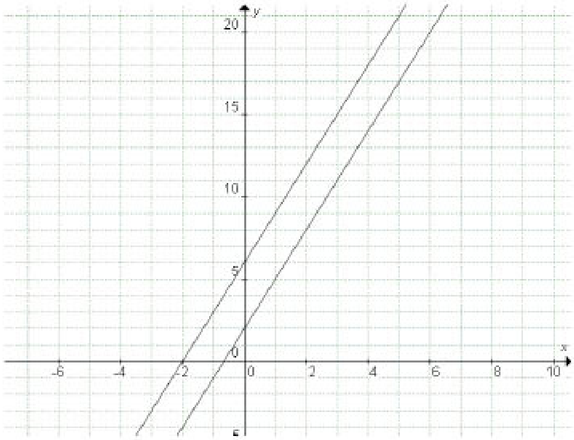


Figura 7.11.

Se observa en la gráfica que las rectas son paralelas y que no hay un punto en el que se intersecan, lo que permite concluir que el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

Otra situación que se puede tener al resolver un sistema de ecuaciones lineales, es que las soluciones sean indeterminadas, ejemplo de ello es las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ 8x - 4y = 10 \end{cases} \quad \text{despejando y} \quad \begin{cases} y = 2x - 2.5 \\ y = 2x - 2.5 \end{cases}$$

x	$y = 2x - 2.5$	$y = 2x - 2$
-2	-6.5	-6.5
-1	-4.5	-4.5
0	-2.5	-2.5
3	3.5	3.5
5	7.5	7.5

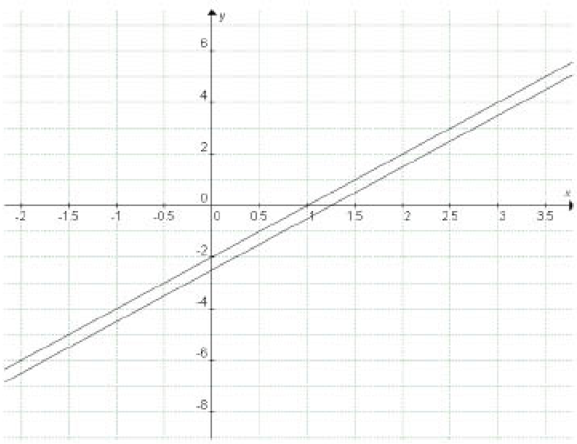


Figura 7.12.

Es claro que las dos ecuaciones son equivalentes, y por tanto, los valores coinciden en todos sus puntos y en la gráfica una recta queda sobre la otra, indicando esto que tiene un número infinito de soluciones.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Lee y aplica lo aprendido, para resolver las siguientes problemáticas. Recuerda realizar el proceso con limpieza y orden.

1. Aplicando el método de sustitución encuentra el valor de la cantidad desconocida para cada problema.

a) Un granjero tiene conejos y gallinas si cuenta las cabezas son 60, y si cuenta las patas son 190 patas, ¿cuántos conejos y gallinas tiene?

b) Un productor de huevo empaca 1110 huevos en paquetes de 12 y 18 huevos, si se rompen 6 a la hora de empacar, ¿cuántos paquetes de cada cantidad tiene, si en total son 80 paquetes?

c) Si el doble de la edad de Julia y la de su hermana suman 50 años y la diferencia es de 4 años, ¿qué edad tiene Julia y su hermana?

2. Si la cantidad de conejos y gallinas van variando se producen las siguientes ecuaciones, resuélvelas con el método que más te acomode.

a) $\begin{cases} 2x+2y=180 \\ 2x+4y=240 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=50 \\ 4x+8y=268 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=75 \\ 2x+4y=440 \end{cases}$

3. Utilizando el método gráfico resuelve los siguientes problemas:

a) En un cine, 10 entradas de adulto y 9 de niño cuestan \$512 y 17 de niño y 15 de adulto \$831. ¿Qué precio tiene la entrada de adulto y de niño?

b) Una tienda pagó al proveedor de huevos $ 822 por 27 cajas de huevo de 12 y 18 huevos cada paquete, si el costo del paquete de 12 cuesta $ 26 y el de 18 cuesta $ 34, ¿cuántas cajas de cada cantidad compró?

c) Para el problema anterior realizar un diagrama que muestre paso a paso como se resolvió.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Cómo se aplican los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en tu comunidad o población? Escribe de manera coherente y breve una aplicación.

....

....

....

....

....

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Producto de aprendizaje: cartel tutorial

Esta actividad movilizará los saberes aprendidos en el bloque, al proponer un problema de tu contexto y explicar a través de un cartel la manera de plantearlo a través de un sistema 2 × 2 y determinar su solución con los métodos estudiados.

Instrucciones:

- Elaborarán en equipo de tres integrantes un cartel para presentar un problema de la vida cotidiana, su representación a través de un sistema de ecuaciones, el proceso de solución de dicho sistema y la comprobación del mismo.
- Presenten un problema que se pueda modelar a través de un sistema 2 x 2.
- En hojas de su cuaderno hagan el bosquejo del planteamiento del problema investigado, seleccionen el método (de acuerdo a su preferencia) y encuentren la solución, para ello deberán desarrollar el procedimiento de solución hasta llegar a la comprobación correspondiente.
- En seguida reflexionen como deberán interpretar y verificar las dos soluciones obtenidas en función del contexto al que pertenezca el problema.
- Una vez hecho el bosquejo, consigan los materiales para realizar el cartel (se trata de un cartel atractivo y original que lo pueden hacer con cartulinas o en pliegos de papel bond). También necesitas un pizarrón, o unas hoja de papel bond para rota folios para llevar a cabo tus explicaciones del procedimiento de solución del sistema.
- Distribuyan las funciones a cada uno de los integrantes del equipo y realicen su cartel.
- Consideren que el cartel será mostrado a sus compañeros y entregado a su profesor(a) para su correspondiente evaluación.

Recomendaciones:

"Los tutoriales son sistemas instructivos de autoaprendizaje que pretenden simular al maestro y muestran al usuario el desarrollo de algún procedimiento o los pasos para realizar determinada actividad". Incluyen cuatro partes:

- *Parte introductoria:* se presenta los aspectos del tema para centrar la atención de los participantes.
- *Parte de orientación inicial:* se da a conocer lo aprendido de las sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- *Parte de aplicación:* se presenta ejemplos de los modelos matemáticos.
- *Parte de retroalimentación:* se presenta una recapitualación del tema tratado. (Galvis, 1992).

Consideren como tiempo mínimo 10 minutos y máximo 15 minutos, busquen que su proceso explicativo de principio a fin sea ágil, concreto y sin interrupciones.

Agrega ilustraciones del problema a resolver y que la resolución de su video sea óptima, asegurándote que lo puedas mostrar a tus compañeros.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad 4

Producto de aprendizaje: integrar tu portafolio de evidencias

Esta actividad consiste en Integrar tu portafolio de evidencias con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las seis actividades presentadas a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del portafolio de evidencias, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos.

Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.
Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para entregar tu portafolio de evidencias a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre de la escuela, asignatura, bloque, leyenda: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante, semestre, grupo y fecha de entrega) y un índice.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: cartel tutorial

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Contenido	Realizaron la investigación adecuada del problema a resolver.			
	Identificaron clara y adecuadamente las incógnitas.			
	Obtuvieron correctamente el sistema 2 x 2.			
	Resolvieron correctamente el sistema.			
Presentación	Mostraron el cartel con símbolos e imágenes visibles claramente.			
	Cumplieron con las cuatro partes del cartel tutorial			
	En la parte de aplicación del cartel se presenta: Problema, planteamiento, resolución y comprobación.			
Dominio conceptual y procedimental	Identificaron el tipo de problema como uno que se puede representar a través de un sistema 2 × 2.			
	Modelaron el problema a través de un sistema 2 × 2.			
	La explicación verbal y escrita del método de solución seleccionado corresponde a lo estudiado en el bloque.			
Actitud	Presentaron trabajos con orden, limpieza.			
	Trabajan de forma colaborativa.			
	Respetan las opiniones de otros.			
	Siguen con atención instrucciones y las interpreta.			
Total de puntos		14		

Si en la lista de cotejo lograste los **12 a 14 puntos** considera tu resultado como

Excelente y si lograste **9 a 11 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	El portafolio es entregado elaborado a mano, con limpieza y legibilidad.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden en los procedimientos.			
	Presenta índice.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	Actividades 1,2 y 3 sin error			
	Actividad de reflexión.			
Actitud	Comparte sus ideas y acepta las de sus compañeros.			
	Valora la importancia del orden y limpieza en los trabajos.			
	Realizó sus trabajos de forma colaborativa.			
Total de puntos		10		

Si en la lista de cotejo lograste los **10 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **8 a 9 puntos** es **Bien**, de **6 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque VII

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque VIII

Resuelves ecuaciones lineales III

Introducción

En el bloque anterior analizamos problemas que se resolvían con un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. La posibilidad de incógnitas de una ecuación lineal según los requerimientos de un problema puede aumentar, de una y dos que se han trabajado en los bloques anteriores, es posible encontrarse con tres cantidades desconocidas, por ejemplo cuando Lupita va a la tienda a comprar papas, refresco y una torta pagando $48.00, si se representa al precio de papas como x, al precio del refresco con y y z para el precio de la torta la situación se plasma en la ecuación lineal $x + y + z = 48$. Pero, si en la tienda se encuentra a su amigo Juan el cual compra una torta y un refresco por $37.00, que se simboliza por $y + z = 37$ y su primo Sergio compra dos refrescos y dos bolsas de papas pagando $46.00, $2x + 2y = 46$; de estas situaciones puede surgir la pregunta ¿Cuánto cuesta cada bolsa de papas, la torta y el refresco? Estas situaciones forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, x, y, z. Para dar respuesta a la pregunta es necesario resolver el sistema de ecuaciones lineales 3×3 obtenido de la traducción del lenguaje común al leguaje algebraico. Al igual que como en la solución de sistemas lineales con dos incógnitas, es posible encontrar el valor de la variables desconocidas a través de métodos algebraicos y gráficos.

En este bloque VIII, el objetivo es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas, sus procesos de solución algebraicos y gráficos en la aplicación de problemas o situaciones de la vida cotidiana.

Los primeros sistemas de ecuaciones lineales de 3×3 aparecen en los siglos III y IV aC. con los matemáticos chinos quienes continuaron el pensamiento lineal de los babilonios. Ejemplo de ello es que en el tratado sobre el arte matemático publicado en la dinastía Han, aparece un sistema lineal y su método de solución conocido como la regla "fan-chen" o el método de eliminación. El problema que dio origen a un sistema de 3×3 es:

“Hay tres clases de granos: tres gravillas (montones) de primera clase, dos de segunda y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de la segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?”

Este problema originó el sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas, (x, y, z):

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

El arte matemático, obra de nueve capítulos, fue compuesta por el científico Chuan Tsanom en el año 152 aC, posteriormente en el siglo XVII la obra fue consultada por Gauss, quien más tarde propuso el método que hasta hoy lleva su nombre: método de Gauss, para dar solución a sistemas lineales de *n* incógnitas y *m* ecuaciones. (Collette, 1985).

8.1. El arte matemático.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*

Continúa...

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Identificas cantidades o magnitudes de la vida cotidiana y las representas a través de un sistema de ecuaciones lineal con tres incógnitas y aplica u método para resolver el sistema e interpreta los resultados obtenidos.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Sistema de Ecuación lineales con tres incógnitas: - Estructura - Métodos Determinantes, suma y resta, sustitución y gráfico. - Representación gráfica.	• Reconoce cantidades que se relacionan entre sí, las cuales se representan por sistema de ecuaciones lineales 3 × 3. • Analiza y comprende los procesos de solución. • Resuelve problemas contextualizados, haciendo uso de sistemas de ecuaciones lineales.

Procedimentales	• Utiliza el concepto de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas para representar situaciones de la vida cotidiana y aplica métodos de solución, para posteriormente realizar su representación gráfica y el análisis del mismo.	• Realiza ejercicios. • Resuelve problemas contextualizados y analiza los resultados obtenidos. • Observa e interpreta gráficas.
Actitudinales	• Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza. • Comparte su ideas y acepta las de sus compañeros. • Identifica el alcance del trabajo colaborativo.	• Exposición de actividades y trabajos de manera ordenada y con limpieza. • Expresa su ideas y acepta con respeto las d sus compañeros.

¿Qué tiempo vas a emplear?

El tiempo necesario para cumplir el propósito de este bloque es aproximadamente ocho horas, es conveniente utilizar cuatro horas para la comprensión temática y cuatro horas para la realización de las actividades y el desarrollo de la maqueta 3D.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque obtendrás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Problemario
- Maqueta 3D

Problemario. Lo elaborarás trabajando tanto en tu libro como en tu libreta con la resolución de problemas y ejercicios de manera individual y grupal. Al termino del bloque, integrarás tu problemario con las tres actividades que hallas realizado a lo largo del bloque, consulta la lista de cotejo que está ubicada al final del bloque, para tener idea clara de los criterios de evaluación que debes cubrir para entregarlo a tu profesor.

Maqueta 3D. Este proyecto consiste en diseñar una maqueta para representar un espacio tridimensional, como uno de los cuartos de tu casa, donde puedas localizar objetos a partir de sus coordenadas de tres entradas (x, y, z).

Para iniciar, reflexiona

¿Cómo ayudar a Lupita, Iván y Sergio para hallar el costo de las papas, el refresco y la torta? Dado que la situación problemática inicial tiene una simbología matemática a través de:

$$\begin{cases} x+y+z=48 \\ y+z=37 \\ 2x+2y=46 \end{cases}$$

Instrucciones: Para dar solución al sistema utiliza los elementos como las operaciones básicas suma y producto, para ir probando los valores de *x*, *y*, *z* hasta encontrar el que cumple las tres ecuaciones.

x	y	z	$x+y+z$	$y+z$	$x+y$
11	20	12			
10	20	11			
11	25	11			
11	25	12			
10	25	13			
11	25	10			

De tus operaciones ¿cuáles son los valores para *x*, *y*, *z* que cumplen con las tres ecuaciones? ¿Fue posible encontrar la solución al sistema? Efectúa las operaciones y procesos en tu cuaderno, coloca tu respuesta a continuación:

....

....

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Para lograr las competencias de este bloque, es importante identificar las fortalezas y oportunidades de aprendizaje que posees, como resultado de tus conocimientos y habilidades adquiridas en tu educación secundaria y los bloques anteriores.

Instrucción: Lee cuidadosamente, analiza y determina lo que se te pide en cada caso. Recuerda escribir en tu libreta los procesos de solución de manera ordenada y con limpieza.

1. Escribe 3 ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales 2×2, los cuales cumplan con: uno compatible, otro que sean incompatible y uno indeterminado. (3 puntos)

2. De la pregunta anterior, escribe con tus propias palabras que significa cada uno de los tres tipos de sistemas de ecuaciones 2×2. (3 puntos)

3. El perímetro del terreno de Ulises es igual a 100 metros y el de Toño 112 metros, la siguientes figuras muestran los valores de las dimensiones de cada terreno.

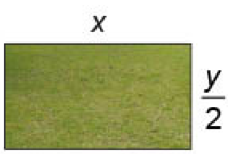


Figura 8.2.

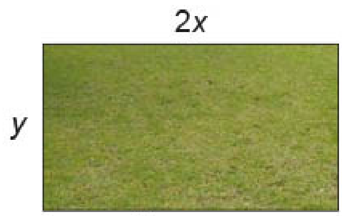


Figura 8.3.

Tomando en cuenta la información anterior, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué representa x y y?

b) Determina la expresión algebraica que representa el perímetro de cada terreno ¿Qué relación encuentras entre las expresiones obtenidas?

c) ¿Cómo se llama al sistema formado por esas expresiones?

d) ¿Qué tipo de métodos puedes aplicar para resolver el problema?

e) ¿Cuál es el valor de y y x? ¿Qué método usaste para resolver el sistema?

f) Si por cada metro cuadrado se siembran dos árboles ¿cuántos árboles contendrá cada terreno?

g) Realiza una tabla para x = 8, 10, 12, 14,16, 18, 20 metros y con las dos ecuaciones.

h) Traza la gráfica de las ambas ecuaciones.

i) ¿Qué representa el punto de intersección de ambas rectas?

j) ¿Cuál es tu conclusión?

(19 puntos)

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Observa los puntos que se te otorgan por cada sección de la evaluación, si obtuviste **25 a 19 puntos** considera tu resultado como **Bien**, de **18 a 12** como **Regular** y si fueron **menos de 12** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades de aprendizaje. Refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: Aritmética, áreas de figuras geométricas, operaciones con expresiones algebraicas, ley de signos, propiedades de los números reales y solución de ecuaciones lineales.

Aprende más

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Así como los babilonios, los griegos y chinos plantearon en su época sistemas de tres ecuaciones e inventaron métodos para darles solución. Te invitamos ahora a utilizar lo estudiado en los bloques anteriores para plantear un sistema que represente o modele la siguiente situación real.

La edad de tres amigos es 25 años, además la edad del tercero menos el segundo es 3 y el tercero menos el primero es 2. ¿Cuál es la edad de cada amigo? Si x representa la edad del menor, y la edad del mediano y z la edad de la mayor, esta situación se puede modelar con un sistema de tres ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=25 \\ 0x-y+z=3 \\ -x+0y+z=2 \end{cases}$$

Al conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas de grado uno, es a lo que se le conoce como un *sistema lineal de 3 × 3*. La estructura es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3 \end{cases}$$

Otros ejemplos de este tipo de sistemas:

$$\begin{cases} 2x+5y=23 \\ x-y-z=18 \\ 2x-y+3z=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} t+z+w=20 \\ t+3w=12 \\ 3t-z+w=30 \end{cases} \qquad \begin{cases} p+q+t=23 \\ 2p+2q=24 \\ p-t=18 \end{cases}$$

Es importante recordar que al igual que en los sistemas de ecuaciones lineales de dos por dos, si tienen una sola solución son *compatibles*, si tiene infinitas soluciones son *indeterminados* o si no hay solución son *incompatibles*.

Método de determinantes

Al igual que en el método de determinantes de 2 × 2, se tiene que definir como encontrar los determinantes det_p, det_x, det_y y det_z, retomando la representación matricial del problema de las edades, obtenemos:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

El *determinante principal* es:

$$det_p = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right| = (1)(-1)(1) + (0)(0)(1) + (-1)(1)(1) - (1)(-1)(-1) - (1)(0)(1) - (1)(1)(0)$$

$$det_p = -3$$

Determinante en *x:*

$$det_x = \left|\begin{array}{ccc} 25 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 25 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 25 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 25 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| = 25(-1)(1) + 3(0)(1) + 2(1)(1) - 1(-1)(2) - 1(0)(25) - 1(1)(3)$$

$$det_x = -24$$

Determinante en *y:*

$$det_y = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 25 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 25 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 25 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 25 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right| = 1(3)(1) + 0(2)(1) + (-1)(25)(1) - 1(3)(-1) - 1(2)(1) + 1(25)(0)$$

$$det_y = -21$$

Determinante en z:

$$\det_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 25 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 25 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 25 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 25 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)(2) + 0(25) - 1(1)(3) - 25(-1)(-1) - 3(0)(1) - 2(1)(0)$$

$$\det_z = -30$$

Una vez obtenidos los determinantes, se procede a calcular el valor de las variables desconocidas:

$$x = \frac{\det_x}{\det_p} = \frac{-24}{-3} = 8 \qquad y = \frac{\det_y}{\det_p} = \frac{-21}{-3} = 7 \qquad z = \frac{\det_z}{\det_p} = \frac{-30}{-3} = 10$$

Por lo tanto las edades de son 8, 7 y 10 años que sumados dan 25 años. Esto permite concluir que el sistema es compatible en una solución única.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Lee con atención los problemas y responde a lo se te solicita, aplica el método aprendido anteriormente. Al concluir comparte con tus compañeros las soluciones obtenidas y escucha las opiniones de ellos.

1. El Sr. Juan fue a la fonda de doña Lola, pidió 2 tostadas, 2 jugos y una memela pagando $54.00, se encontró a su compadre que comió 1 jugo y 4 memelas por $44.00 y a su tía que pagó $67.00 por 3 tostadas y 2 jugos ¿Cuál es el precio de cada tostada, memela y el jugo? Si deseo comprar 6 tostadas ¿cuánto pagaré?

2. Un niño ha estado ahorrando dinero en tres distintos y pequeños costales, el primero tiene la cantidad de $58.00, el segundo $41.00 y el último con $35.00. Si los costales contienen tres distintas monedas de diferente denominación con

las siguientes cantidades de monedas para cada costal: en el primer costal (6,8 y 10); en el segundo costal (3 y 10); y en el tercer costal (7, 4 y 1) ¿Cuál es la denominación de cada moneda?

3. Si en el problema anterior se varía el total de dinero y el número de monedas de manera tal que se determinan los siguientes dos sistemas de ecuaciones, encuentra la denominación de las monedas para cada uno de los sistemas resultantes de estos cambios.

a) $\begin{cases} 2x+3y+z=26 \\ 3x+0y+2z=35 \\ ox+4y+z=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y+2z=12 \\ 4x+2y+4z=10 \\ 7x+y+6z=12 \end{cases}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Método eliminación reducción (suma y resta)

Consideremos el mismo problema que involucra la edad de tres amigos, pero ahora supongamos que la suma de sus edades es 65 años además, la edad del tercero menos la edad del segundo es 2 años y la edad del tercero menos la edad del primero es 8 años. ¿Cuál es la edad de cada amigo?

Si x representa la edad del primero; y la edad del segundo y z la edad del tercero el problema se modela con el siguiente sistema de ecuaciones lineales 3 × 3:

$$\begin{cases} x+y+z=65 \\ -y+z=2 \\ -x+z=8 \end{cases}$$

Dado un sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas es posible encontrar una solución, infinitas soluciones o ninguna solución, en este apartado se describe el método de suma y resta. En seguida te presentamos los pasos a seguir:

1. Multiplica la primera y segunda ecuación por un número de tal forma que al sumar las dos ecuaciones, una variable se elimine, en este caso z.

$$\begin{cases} x+y+z=65 \\ (-y+z=2)(-1) \end{cases}$$

$$x+2y=63 \quad \textbf{(1)}$$

2. Ahora se toman la segunda y tercera ecuación para multiplicarse por un número de tal manera que al sumarlas se elimine la variable z.

$$\begin{cases} -y+z=2 \\ (-x+z=8)(-1) \end{cases}$$

$$x-y=-6 \quad \textbf{(2)}$$

3. Multiplica por un número las ecuaciones resultantes, marcadas con 1 y 2, para sumarlas y eliminar la variable x, posteriormente despejar y.

$$\begin{array}{ll} x+2y=63 & x+2y=63 \\ (x-y=-6)(-1) & -x+y=6 \end{array}$$

$$3y=69$$

$$y=\frac{69}{3}=23$$

4. Sustituye y en la ecuación 2 y despejar x.

$$x-y=-6$$
$$x-23=-6$$
$$x=-6+23=17$$

5. Sustituye y y x en alguna de las ecuaciones principales del sistema y despejar z.

$$x+y+z=65$$
$$17+23+z=65$$
$$z=65-40=25$$

Las edades son: $x=17, \quad y=23, \quad z=25$

Este sistema resulto ser compatible, ya que se encontró una solución.

Con la intención de que practiques y consolides el método para resolver un sistema de ecuaciones lineales 3 × 3, observa un ejemplo más:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

1. Multiplica la primera y segunda ecuación por un número de tal forma que al sumar las dos ecuaciones una variable se elimine.

$$\begin{cases}(3x+2y+z=1)(5)\\(5x+3y+4z=2)(-3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}15x+10y+5z=5\\-15x-9y-12z=-6\end{cases}$$

$$y-7z=-1$$

2. ahora se toman las segunda y tercera ecuación se multiplican por un número de tal manera que al sumarlas se elimine la variables y.

$$\begin{cases}(5x+3y+4z=2)(1)\\(x+y-z=1)(-5)\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x+3y+4z=2\\-5x-5y+5z=-5\end{cases}$$

$$-2y+9z=-3$$

3. Multiplica por un número las ecuaciones resultantes, marcadas con 1 y 2, para sumarlas y eliminar la variable y y posteriormente despejar z.

$$(y-7z=-2)(2) \quad 2y-14z=-2$$
$$(-2y+9z=-3)(1) \quad -2y+9z=-3$$

$$-5z=-5$$

$$z=\frac{-5}{-5}=1$$

4. Sustituye z en la ecuación 2 y despejar y.

$$-2y+9z=-3$$
$$-2y'+9(1)=-3$$
$$-2y=-3-9$$
$$y=\frac{-12}{-2}=6$$

5. Sustituye y y z en alguna de las ecuaciones principales del sistema y despejar x.

$$3x+2y+z=1$$
$$3x+2(6)+1=1$$
$$3x+13=1$$

6. Se obtienen y comprueban las soluciones.

$$x=\frac{1-13}{3}=\frac{-12}{2}=-4$$

Un sistema con una única solución, por lo tanto, compatible.

$$x=-4 \quad y=6 \quad z=1$$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Lee, recuerda y aplica lo aprendido para resolver los siguientes problemas, aplicando el método de eliminación. Al concluir comparte con tus compañeros las soluciones obtenidas y escucha las opiniones de ellos.

1. Un granjero tiene tres granjas y tres presentaciones distintas de huevo, la siguiente tabla muestra las ventas de cada presentación y granja.

Granja	12 huevos	18 huevos	30 huevos	Venta
El girasol	10	12	5	\$858
Los polluelos	8	9	11	\$1039
El buen gallo	12	8	9	\$994

Según los datos anteriores ¿Cuál es el costo de cada presentación?

2. Un artesano durante tres semana anoto las ventas de llaveros, porta retratos y ceniceros. La venta por semana fue:

1ra. Semana: 8 llaveros, 3 porta-retratos y 7 ceniceros, por \$486.
2da. Semana: 4 porta-retratos y 2 ceniceros, por \$270.
3ra. Semana: 5 llaveros y 4 porta-retratos, por \$240.

a) ¿Cuál es el precio de cada producto?

b) Si desea realizar un incremento de 5% sobre el precio de cada artesanía ¿Cuál es el nuevo costo de cada artículo?

3. Don Pedro un granjero productor de leche tiene un rancho en el cual elaboran tres presentaciones distintas de envasado de leche, si la siguiente tabla muestra el llenado de botellas por etapas.

Encuentra los datos en la página siguiente.

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	
2	1	2	Botella 1
1	3	2	Botella 2
1	1	5	Botella 3
11.5	14.3	21.9	Litros

a) ¿Qué elementos matemáticos te permitirán resolver el problema?

b) ¿Cuál sería el modelo algebraico para representar esta situación?

c) ¿Cuál es la capacidad, en litros, de cada botella?

4. Tres compuestos se combinan para formar 3 tipos de fertilizantes. Una unidad de fertilizante del tipo 1 requiere 10 kg del compuesto A, 30 kg del compuesto B y 60 kg del compuesto C. Una unidad del tipo II requiere 20 kg del compuesto A, 30 kg del B y 60 kg del compuesto C. Para la unidad del III requiere 50 kg del A, y 50 kg del C. Si se tiene disponible 1600 kg del A, 1200 kg del B y 3200 del C.

   ¿Cuántas unidades de los tres tipos de fertilizantes se pueden producir si se usa todo el material químico disponible?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales de 3 incógnitas

Recuerda que en el bloque VII, un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas se representa gráficamente con dos rectas que pueden ser paralelas o cruzarse en un punto o coincidir en todos sus puntos, originando con ello que el sistema no tenga solución o una solución o infinitas soluciones.

Así como un sistema de ecuaciones lineales 2 × 2 se plasma gráficamente en un plano cartesiano de dos dimensiones a través de los ejes X y Y, para plasmar la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 3 × 3 se necesita el sistema cartesiano tridimensional de Fermat que consiste en un espacio formado por la intersección de tres rectas en un ángulo de 90°, los ejes X, Y y Z.

La representación gráfica de una ecuación lineal con dos variables es una línea recta, pero la representación gráfica de una ecuación lineal con tres variables no resulta ser una recta, sino un plano.

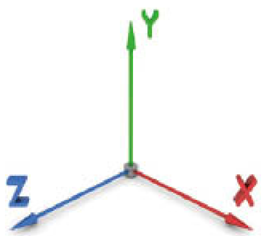


Figura 8.4.

Plano: región del espacio que posee dos dimensiones, contiene infinitos puntos y rectas.

Ejemplo de distintos planos que no son más que ecuaciones lineales con tres incógnitas, son las paredes de tu escuela o de tu casa.

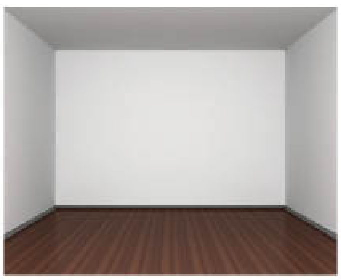


Figura 8.5.

La gráfica de la ecuación $x + 2y - z = 4$ representa el plano de la siguiente figura.

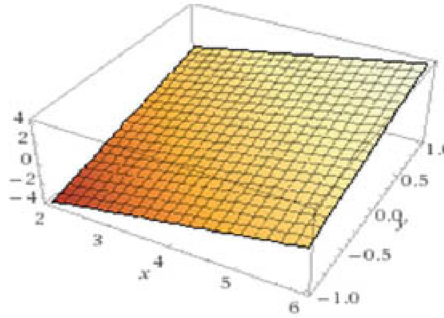


Figura 8.6.

Se observa de los gráficos de distintos planos que estos se intersectan en una recta o en un plano o en un punto, lo cual permite visualizar las posibles soluciones, recuerda que en los sistemas lineales de dos por dos la intersección o no intersección proporcionaba la solución o no solución del sistema, por consiguiente se tiene que un sistema lineal 3 × 3 cuenta con:

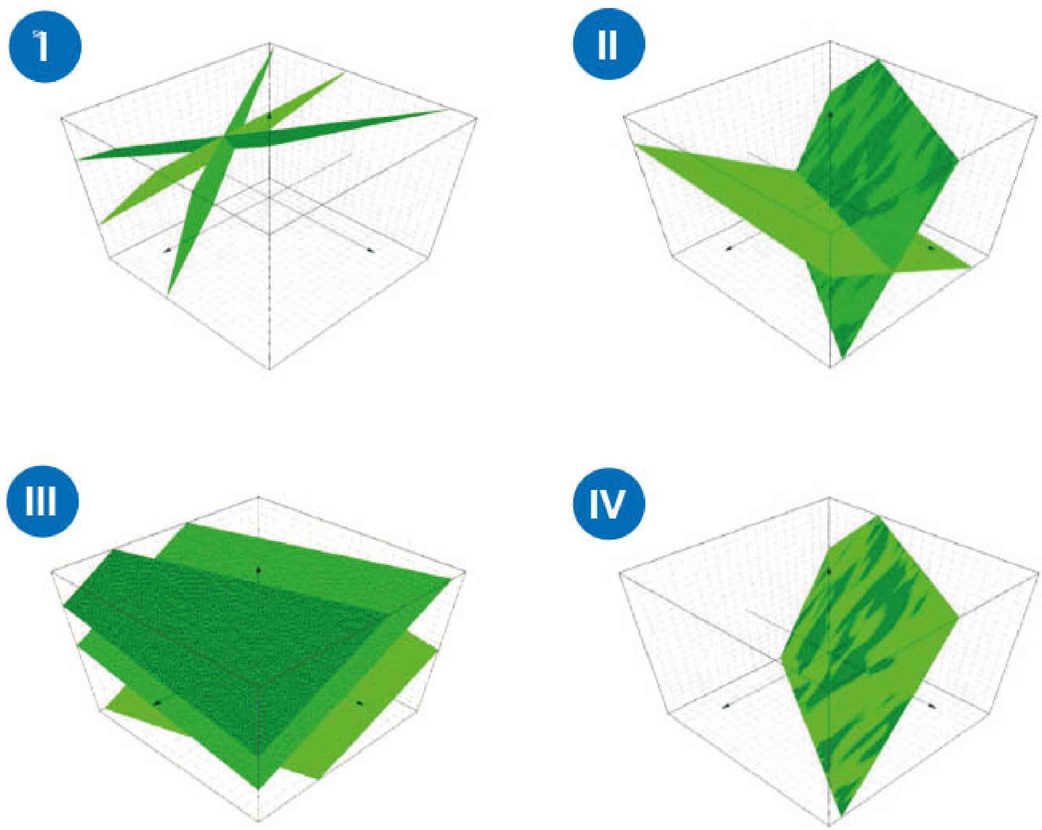


Figura 8.7. Soluciones de un sistema lineal 3 × 3.

Para graficar un sistema lineal de tres por tres:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Y poder encontrar el valor de las incógnitas, primero se despeja de las tres ecuaciones la misma variable, puede ser cualquiera de las tres, en este caso, despejaremos a la variable z.

$$\begin{cases} z=1-3x-2y \\ z=0.5-1.25x-0.75y \\ z=-1+x+y \end{cases}$$

Posteriormente se grafican en el plano tridimensional (x, y, z).

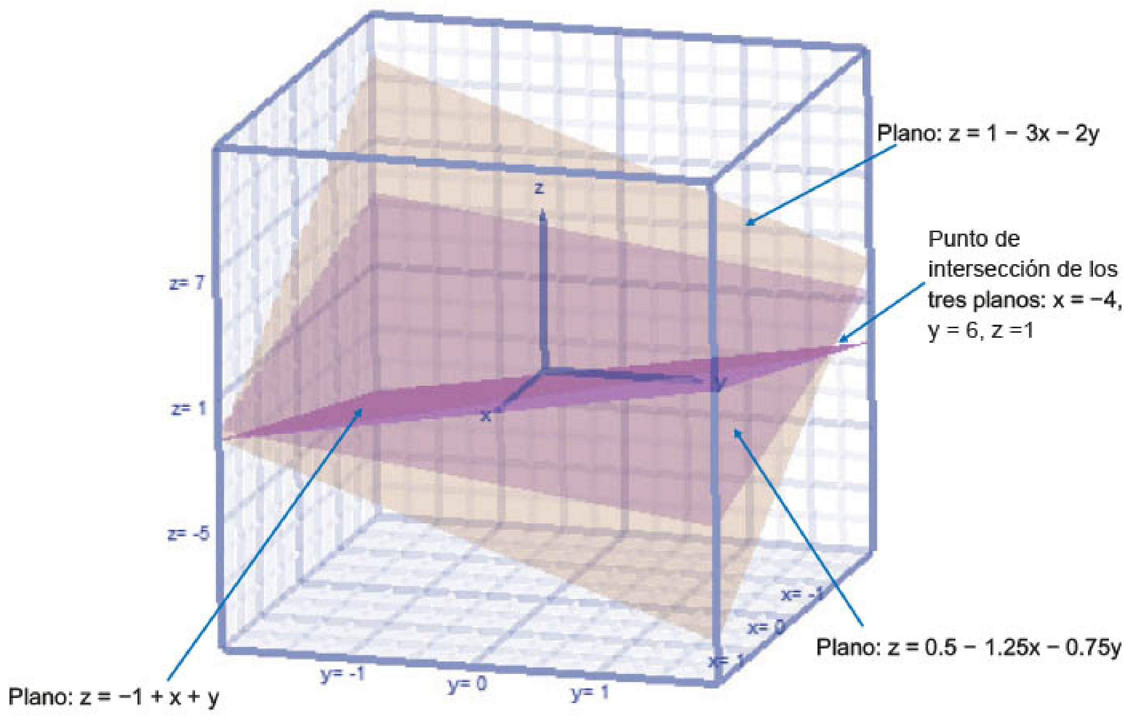


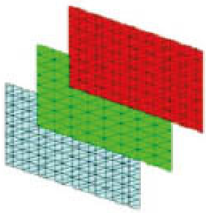
Figura 8.8.

Al observar el grafico de los planos, se tiene que el punto de intersección de los tres planos resulta ser el punto (−4, 6, 1). Concluyendo que el sistema es compatible.

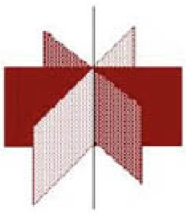
Aplica lo aprendido

Actividad 3

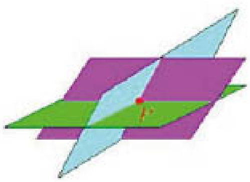
Instrucciones: Lee con atención la siguiente indicación y responde lo se te solicita. Al concluir comparte con tus compañeros las soluciones obtenidas y escucha las opiniones de ellos. Para cada uno de los siguientes gráficos escribe si tiene una solución única o no tiene solución o infinitas soluciones o una recta como solución.



a) ....



b) ....



c) ....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Cómo se aplican un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas en problemas de la vida cotidiana? Expone de manera coherente y breve.

....

....

....

....

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Actividad 4

Producto de aprendizaje: maqueta 3D

Se trata de hacer tangible el manejo simultáneo de tres variables a través de una maqueta que represente un espacio tridimensional para localizar en él objetos a través de sus coordenadas de tres entradas.

Instrucciones:

- Elaborarán en equipos de tres integrantes una maqueta de dimensiones (largo, ancho y espesor) 40 x 40 x 40 cm. Debe ser un cubo, pero sólo con tres paredes o con las seis que conforman un hexaedro pero tres de ellas deberán ser transparentes para poder apreciar la ubicación de objetos dentro de ella.

- Investiguen el procedimiento para ubicar objetos en un espacio tridimensional a través de sus coordenadas de tres entradas.
- Establezcan, al menos cinco, coordenadas de objetos que pueden ubicarse en un espacio tridimensional, pueden ser una lámpara, un ventilador, una televisión o hasta el cuadro de tu fotografía colgado en la pared de tu cuarto. Puedes seleccionar otros espacios distintos al de una habitación de tu hogar, quizá prefieras escoger el aula de una escuela o una sala de cine, entre otros que se les ocurran.
- Los materiales que utilicen, preferentemente reciclados, pueden ser diversos y quedan libres a tu elección.
- Preparen la exposición de su maqueta explicando la importancia de poder ubicar objetos en espacios tridimensionales y, también narren, en un reporte, el proceso de construcción de su maqueta con las complicaciones a las que se enfrentaron para lograrla.

Actividad 5

Producto de aprendizaje: elaboración de tu problemario

Esta actividad consiste en conformar tu problemario con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las tres actividades y tu actividad de reflexión presentadas a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del problemario, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para presentar tu problemario a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre, de la escuela, asignatura, del estudiante, bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha de entrega) y un índice.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: maqueta 3D

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Contenido	Realizó la construcción de una maqueta para representar un espacio tridimensional ubicando cinco objetos en ella.			
	El reporte fue coherente, ordenado y limpio, dejando claro el proceso seguido en la elaboración de su maqueta.			
Presentación	La estructura de la maqueta es sólida y firma.			
	Las medidas de largo, ancho y espesor se respetaron, 40 cm cada una.			
	El diseño permite observar el interior de la maqueta y apreciar la ubicación de los cinco objetos seleccionados.			
	Las coordenadas presentadas son congruentes con la localización de los objetos en el espacio tridimensional.			
Actitudes	La exposición del proyecto es clara y precisa mostrando interés por compartir su trabajo.			
	Su comportamiento es respetuoso tanto hacia el interior del equipo como hacia los demás compañeros.			
Total de puntos		8		

Si en la lista de cotejo lograste los **8 a 7 puntos**, considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **6 a 5 puntos** es **Bien**, de **4** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 4** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de: nombre de la escuela, estudiante, asignatura, bloque, título del poblemario, semestre, grupo, fecha.			
	Las actividades incluidas muestran orden y limpieza. El planteamiento de la actividad a tinta. Proceso de solución a lápiz.			
	Presenta índice.			
Planteamiento de ecuaciones	Identifica correctamente el tipo de ecuación a utilizar.			
Procedimientos	Utiliza el método solicitado.			
	Escribe todos los pasos.			
Solución	Comprueba las soluciones obtenidas.			
	Las interpreta de acuerdo al contexto.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Respeta las opiniones de otros			
	Sigue con atención instrucciones y las interpreta.			
Total de puntos		11		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 10 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque VIII

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque IX

Resuelves ecuaciones cuadráticas I

Introducción

Al plantear un enunciado a una expresión con letras, números, símbolos y operaciones y si ésta la igualamos a otra expresión o un número a la que denominamos ecuación es como la traducción de un lenguaje a otro. Esta comparación, usada por Newton en su **Arithmetica Universalis**, puede ayudar a aclarar la naturaleza de ciertas dificultades con que a menudo se encuentran tanto los estudiantes como los profesores. Las dificultades de traducción obedecen, por ejemplo, al mal uso y la diversidad de la simbología matemática, en muchas ocasiones la expresión: “el doble de un número” la asociamos con la expresión x^2 cuando en realidad la correcta es: $2x$ o también $x + x$.

Plantear una ecuación significa expresar en símbolo matemáticos una condición formulada con palabras; es una traducción de un lenguaje corriente al lenguaje de fórmulas matemáticas.

Para traducir una frase del idioma inglés al francés se necesitan dos cosas. Primero comprender totalmente la frase en idioma inglés y segundo, estar familiarizados con las formas de expresión peculiares de la lengua francesa. La situación es muy semejante cuando tratamos de expresar en símbolos matemáticos una condición propuesta en palabras. En primer lugar, tienes que comprender totalmente la condición de la frase y en segundo lugar, debes estar familiarizado con las formas de expresión matemática.

Para el planteamiento y resolución de ecuaciones cuadráticas, en este noveno bloque te presentamos una serie de actividades que te ayudarán a consolidar tu aprendizaje del álgebra.

En los tres bloques anteriores estudiamos como tema central las ecuaciones lineales y de este estudio se desprendió el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, tanto de dos como de tres ecuaciones. El objetivo, en términos generales, es el mismo: determinar los valores asociados a las variables de tal modo que las ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas se satisfagan, es decir, se cumplan las igualdades correspondientes.

Arithmetica Universalis: obra basada en las notas de clase de Newton donde se estudia la notación algebraica, la relación entre geometría y álgebra, así como la solución de ecuaciones. Publicada en 1707.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Modelas y resuelves problemas de tu entorno, por medio de la solución de ecuaciones cuadráticas, tanto completas como incompletas.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Ecuaciones cuadráticas - Completas - Incompletas	• Identificas el modelo de una ecuación cuadrática con una variable. • Formulas o planteas problemas de su entorno.
Procedimentales	• Identificas el modelo algebraico de una ecuación cuadrática con una variable. Comprendes los métodos de solución de una ecuación cuadrática completa e incompleta. • Resuelves ecuaciones cuadráticas aplicando distintos métodos. • Interpretas las soluciones de una ecuación cuadrática. • Formulas y resuelves problemas diversos de tu entorno por medio de la solución de ecuaciones cuadráticas. Interpretas las soluciones de un problema a través de su conexión con el mundo real.	• Recuperas y generalizas los métodos de solución de ecuaciones lineales. • Realizas ejercicios aplicando los métodos: despeje, factorización y fórmula general para resolver una ecuación cuadrática. • Analizas y presentas el proceso para llegar a la solución de ecuaciones cuadráticas. • Expresas el procedimiento y solución de problemas.

Actitudinales	• Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza. Promueve el trabajo colaborativo. • Respeta las opiniones de los demás e interpreta instrucciones.	• Realizas y expones trabajos con criterios de orden y limpieza. • Respetas y escuchas las opiniones y/o argumentos de otras personas. Compartes ideas mediante productos, principalmente al hacer trabajo colaborativo. • Sigues con atención e interpretas instrucciones tanto de forma oral como escrita.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera ocho horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices dos horas para revisar los contenidos temáticos y seis horas para realizar las actividades propuestas y la elaboración del memorama de crucigramas cuadráticos.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque obtendrás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Problemario
- Memorama de crucigramas cuadráticos

Problemario. Lo elaborarás trabajando tanto en tu libro como en tu libreta con la resolución de problemas y ejercicios de manera individual y grupal. Al termino del bloque, integrarás tu problemario con las cinco actividades que hallas realizado a lo largo del bloque, consulta la lista de cotejo que está ubicada al final del bloque, para tener idea clara de los criterios de evaluación que debes cubrir para entregarlo a tu profesor.

Memorama de crucigramas cuadráticos. Este juego lo elaborarás con los ejercicios de los acertijos cuadráticos y ecuaciones cuadráticas que modelan a los acertijos que irás resolviendo a lo largo del bloque. Las indicaciones las podrás ver en la actividad número 6, te invitamos a que revises los criterios de evaluación que debes considerar para presentarlo y entregarlo a tu profesor, estos están indicados en la sección de evaluación del bloque.

Para iniciar, reflexiona

Las ecuaciones cuadráticas ¡desde los babilonios!

Al igual que en el bloque VI, donde te mostramos que ya habías resuelto ecuaciones lineales desde la primaria, ahora te mostraremos que también en la primaria o en la secundaria resolviste ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.

Para que te convenzas, observa y resuelve los siguientes ejercicios:

1. Encuentra el elemento perdido en:

a) $(\quad)^2 - 5 = 20$

b) $\frac{3}{4} - \left(\frac{\square}{\square}\right)^2 = \frac{1}{2}$

c) $(\quad)^2 + (\quad)^2 = 100$ (Teorema de Pitágoras)

2. Adivina el número de naranjas que hay en un costal, la pista es que al elevar al cuadrado dicho número de naranjas y restarle cuatro docenas te da como resultado 33.

¿Suficiente con estos ejemplos? De manera implícita e informal, aprendiste en la Primaria el concepto de ecuación cuadrática. Ahora en el desarrollo de este bloque, utilizaremos lo que ya hemos estudiado a partir del bloque VI, es decir, ampliaremos las propiedades y métodos de solución de una ecuación lineal para una ecuación cuadrática.

Los babilonios, en el periodo del 600 aC al 300 dC, desarrollaron ampliamente conceptos y procedimientos algebraicos tales como los relacionados con las ecuaciones, se nota en sus escritos que casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizá por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado. Los matemáticos griegos, del periodo 100 dC al 300 dC, tampoco tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y dirigieron su mayor atención hacia el estudio de las ecuaciones de segundo grado e incluso las de grado tres.

Esperamos que en tu caso, tampoco tengas problemas con el manejo de las ecuaciones ni lineales ni cuadráticas, para ello te sugerimos hacer uso de todas tus habilidades matemáticas desarrolladas hasta el momento, recordando que siempre serán útiles los conocimientos por muy antiguos que estos parezcan.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Para facilitar el estudio de las ecuaciones cuadráticas es importante que tengas ya desarrollada tu habilidad en el manejo de operaciones algebraicas y en la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

Instrucción: En equipos de tres participantes lean los siguientes problemas y resuélvelos poniendo en práctica tus conocimientos, habilidades y una actitud de respeto, que muestre tu disposición entusiasta hacia el trabajo colaborativo.

1. En un experimento de nutrición, una persona debe consumir exactamente 500 mg de potasio, 75 g de proteína y 1150 unidades de vitamina D cada día. Los únicos alimentos que consumirá son: Fortex, Esbelta y Redumax. Los siguientes datos representan las cantidades de esos nutrientes por onza de cada alimento.

	Fortex	Esbelta	Redumax
Potasio (mg)	50	75	10
Proteína (g)	5	10	3
Vitamina D (unid)	90	100	50

¿Cuántas onzas de cada producto debe consumir la persona para cumplir con lo indicado por el experimento?

2. En la ecuación $2(x + 5) + n = 4x - 8$, ¿qué número real debe ser n para que la solución sea -2?

3. En el museo interactivo “piensa y actúa”, los boletos cuestan \$40 para adultos y \$15 para niños. Cierto domingo se vendieron 225 boletos y con ello se juntaron \$5000, ¿cuántos boletos para adulto y niño se vendieron ese día?

4. El papá de Fausto quiere construir una alberca rectangular, si debe cumplir con

un perímetro de 22 m y sabe que su largo es 2 metros mayor que el doble de su ancho, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la alberca?

5. Relaciona las siguientes columnas, utilizando flechas para hacer corresponder la expresión algebraica con su correspondiente factorización:

$x^2 - 11x - 12$	$(3k + 2x - y)(3k - 2x + y)$
$25x^2 - 10xy + y^2$	$(x + 3y)(2x - 5)$
$36x^4k^6 - 121$	$(3x - 2y)(2x + y)$
$2x^2 + 6xy - 5x - 15y$	$(x - 6)(x + 2)$
$9k^2 - 4x^2 + 4xy - y^2$	$(5x - y)2$
$6x^2 - xy - 2y^2$	$(x - 12)(x + 1)$
	$(6x^2k^3 - 11)(6x^2k^3 - 11)$

6. Determina la solución de las siguientes ecuaciones:

$$3x + \frac{x}{5} - 5 = \frac{1}{5} + 5x$$

$$(3x - 1)^2 = 8x^2 + (x - 2)(x - 3)$$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Si de la evaluación anterior respondiste correctamente de **5 a 6 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, de **3 a 4** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de **4** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando, en las secciones anteriores, los siguientes conceptos: ecuaciones de primer grado, sistema de ecuaciones simultáneas con dos y tres variables y operaciones algebraicas básicas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Ecuaciones cuadráticas incompletas triviales

En este bloque utilizaremos las operaciones aritméticas y algebraicas básicas (suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz), ellas son la base del proceso para resolver ecuaciones, tanto lineales como cuadráticas.

Para demostrarte lo anterior, te invitamos a resolver los siguientes acertijos matemáticos:

a) Encuentra el número de peras en una canasta, ese número al elevarlo al cuadrado te da como resultado cero.

b) Determina el número que al elevarlo al cuadrado y multiplicarlo por nueve te dé como resultado cero.

c) ¿Cuál es el número cuyo cuadrado multiplicado por menos seis te da como resultado cero?

¿La respuesta que encontraste para todos los acertijos fue la misma? ¿Acaso cero? Así es, la respuesta para estos acertijos es cero. Quizás te estés preguntando: ¿y esto a que se debe?

Analicemos algebraicamente el trasfondo de los tres acertijos, nombremos al número desconocido en los tres casos como x, su traducción algebraica sería:

a) $x^2 = 0$ b) $9x^2 = 0$ c) $-6x^2 = 0$

Las tres ecuaciones que hemos obtenido se pueden resolver únicamente si a la variable representada por x le asignamos el valor cero.

Ésta solución la podemos obtener con los principios o normas que rigen un despeje de ecuaciones, observa:

a) En $x^2 = 0$, al despejar x, obtenemos: $x = \sqrt{0}$, $x = 0$

b) En $9x^2 = 0$, el $9x$ despeje resulta: $x = \sqrt{\frac{0}{9}}$, $x = 0$

c) En $-6x^2 = 0$, el despeje resulta: $x = \sqrt{\frac{0}{-6}}$, $x = 0$

En general, la ecuación $ax^2 = 0$ con tiene como solución: $x = \sqrt{\frac{0}{a}}$,

Las ecuaciones cuadráticas de este tipo siempre tendrán como solución el número cero, por esta razón se les llama ecuaciones cuadráticas incompletas triviales.

Una *ecuación cuadrática incompleta trivial* sólo tiene el término cuadrático igualado a cero.

Su forma general es: $ax^2 = 0$
Su solución siempre es cero.

Aprende más

Ecuaciones cuadráticas incompletas puras

En esta sección avanzaremos en el estudio de las ecuaciones cuadráticas incompletas, este tipo de ecuaciones lo podemos utilizar en situaciones donde desconocemos algunos datos para llegar a la solución, por ejemplo:

Para una huerta, es común medir el terreno a utilizar en hectáreas. Si se ha destinado un terreno cuadrangular con una superficie de una hectárea ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados?

Figura 9.1.

En otras palabras, ¿Cuál es el número que al elevarlo al cuadrado da como resultado 10000?

Si llamas a cada lado del terreno cuadrangular como x, para representar al número desconocido obtenemos la ecuación:

$$x^2 = 10000$$

Despejando x:

$$x = \sqrt{10000}$$
$$x = \pm 100$$
$$x_1 = +100, x_2 = -100$$

Factorización de una diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Observa que, matemáticamente, las dos soluciones: 100 y −100 cumplen que al elevarlas al cuadrado se obtiene 10000.

Pero, considerando nuestro problema de hallar la longitud de cada lado del terreno cuadrangular, la opción que se ajusta a la realidad es:

$$x_1 = +100$$

Es decir, cada lado del cuadrado mide 100 metros.

Otra manera de resolver la ecuación cuadrática $x^2 = 10000$ se basa en la factorización de una diferencia de cuadrados:

Primero igualamos a cero:

$$x^2 - 10000 = 0$$

Factorizando como diferencia de cuadrados, obtenemos:

$$(x-100)(x+100) = 0$$

Para que el resultado de una multiplicación sea cero, al menos uno de sus factores tiene que ser cero. A lo anterior se le conoce como Factor Cero.

Teorema del Factor Cero: operación de igualar a cero cada factor:

$$a \cdot b = 0$$

entonces

$$a = 0 \text{ ó } b = 0$$

Aplicando el Teorema del Factor Cero:

$$x - 100 = 0 \text{ ó } x + 100 = 0$$
$$x_1 = 100 \text{ ó } x_2 = -100$$

Hemos obtenido las mismas soluciones que cuando se aplicó la raíz cuadrada.

En general una ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$ se puede resolver despejando x.

Una *ecuación cuadrática incompleta pura* se forma por un término elevado al cuadrado más un término independiente igualado a cero.

Su forma general es: $ax^2 + c = 0$ donde $a \neq 0$ y $c \neq 0$

Para resolverlas utiliza el despeje o factorización de una diferencia de cuadrados.

Sus soluciones son: $x = \pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

Aplica lo aprendido

Actividad 1

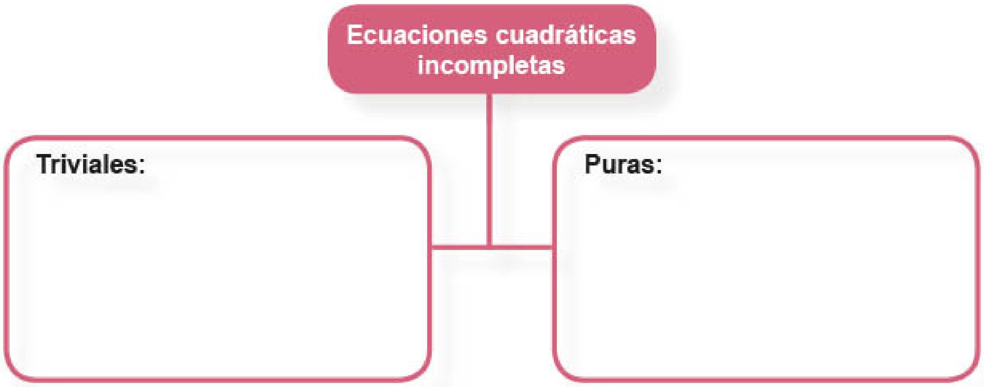
Hasta aquí hemos estudiado dos tipos de ecuaciones cuadráticas incompletas las de tipo trivial y puras.

Instrucciones: Sigue con atención las indicaciones que se te presenten en los numerales del I al IV para consolidar tu aprendizaje:

I. Identifica y clasifica las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas en triviales y puras, posteriormente escríbelas en el recuadro que le corresponde, utilizando su forma general:

$$6x^2-36=0 \qquad 0=-8x^2 \qquad x^2-121=0 \qquad 4x^2-4=54$$

$$-12x^2=-32x^2 \qquad -7.5+8x^2=52.5-4x^2$$



II. Modela o plantea los siguientes problemas a través de una ecuación cuadrática, determina la solución de cada ecuación e interpreta los resultados en función del contexto del problema. Los procedimientos y operaciones los harás en tu cuaderno:

En una frutería:

a) El número de piñas inicial elevado al cuadrado menos siete es igual a 137. ¿Cuántas piñas había inicialmente?

b) Las sandías eran, al inicio, 15 más que el número de piñas, ¿cuántas sandías había al inicio?

c) La cantidad de melones elevado al cuadrado más 13 es igual a 209, ¿cuántos melones había originalmente?

III. Georgina observa detenidamente los precios en el puesto de frutas y se confunde con ellos, algunos no están escritos de forma convencional, ayúdala contestando las preguntas siguientes:

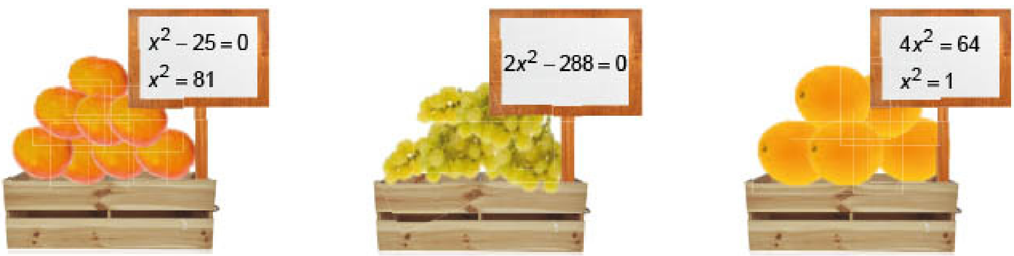


Figura 9.2.

a) El precio del kilogramo de uva verde es igual al producto de las soluciones positivas de las ecuaciones mostradas en su cartel. ¿Cuánto deberá pagar Georgina si desea comprar 1.750 kg de uvas verdes?

b) El kilogramo de naranjas equivale a la suma de las soluciones positivas mostradas en su cartel. ¿Cuánto dinero necesita Georgina para comprar siete kilogramos de naranjas?

c) Los duraznos son los más caros, por un kilogramo de ellos se deben pagar cuatro veces la raíz positiva de la ecuación mostrada en su cartel. Si Georgina quiere comprar tres kilogramos y medio de duraznos, ¿cuánto debe pagar por ellos?

IV. Con el fin de ejercitar el procedimiento estudiado, determina las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $6x^2 - 36 = 0$	d) $4x^2 - 4 = 54$
b) $0 = -8x^2$	e) $-12x^2 = -32x^2$
c) $x^2 - 121 = 0$	f) $-7.5 + 8x^2 = 52.5 - 4x^2$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Construye las primeras tarjetas para tu memorama de acertijos cuadráticos. De los ejercicios que has resuelto en esta actividad 1 en su número II, elabora tarjetas de papel o de cartulina de 5 x 13 cm. En una tarjeta escribe el acertijo, en la segunda tarjeta el modelo matemático (ecuación cuadrática) y en la tercera tarjeta la solución. Con tu creatividad inventa 2 acertijos diferentes con sus respectivas ecuaciones y soluciones. Elaborarás los cinco primeros tríos (15 tarjetas) de tu memorama.

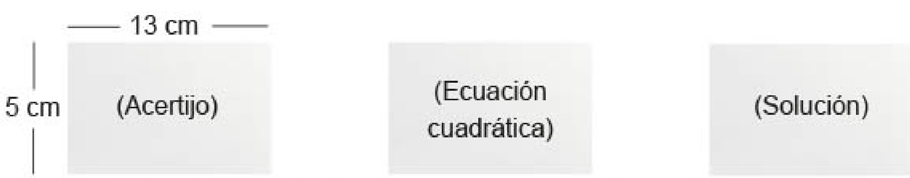


Figura 9.3. Ejemplo de tarjetas para memorama de acertijos cuadráticos.

Aprende más

Ecuaciones cuadráticas incompletas mixtas

El tercer y último tipo de ecuación cuadrática incompleta es el mixto, en esta sección estudiaremos su forma general y la manera de encontrar sus soluciones. Para ello te invitamos a analizar la siguiente situación:

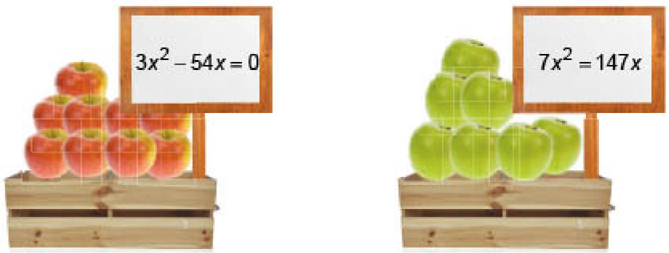


Figura 9.4.

El precio, en pesos, de cada kilogramo de manzana verde o roja es igual a la solución distinta de cero de las ecuaciones cuadráticas mixtas mostradas en cada caso.

¿Qué resulta más caro? ¿Comprar un kilogramo de manzanas rojas o verdes? Para poder contestar la pregunta anterior, resolvamos las ecuaciones cuadráticas escritas en cada caso, observa que ambas tienen un término cuadrático y un término lineal dependiendo de la misma variable representada por x. Haremos uso del caso de factorización por término común que ya estudiamos en el bloque IV.

Factorización de un binomio con término común: $ax^2 + bx = x(ax + b)$

Para resolver la ecuación $7x^2 = 147x$ Igualamos a cero:

$$7x^2 - 147x = 0$$

Factorizamos considerando a $7x$ como el factor común, obteniendo:

$$7x(x - 21) = 0$$

Aplicando el Teorema del Factor Cero:

$$7x = 0 \text{ ó } x = 21$$

Por lo tanto, resolviendo ambas ecuaciones lineales obtenemos:

$$x_1 = 0 \text{ ó } x_2 = 21$$

Interpretando las soluciones, deducimos que el precio de las manzanas verdes es de $21.00

De manera similar, resolvamos la ecuación $3x^2 - 54x = 0$ para determinar el precio de las manzanas rojas. Tomando a $3x$ como factor común obtenemos:

$$3x(x - 18) = 0$$

Por tanto, aplicando el Teorema del Factor Cero y despejando:

$$x_1 = 0 \text{ ó } x_2 = 18$$

El precio de las manzanas rojas es de $18.00

Una *ecuación cuadrática incompleta mixta* tiene un término cuadrático y un término lineal igualados a cero. Su forma general es:

$$ax^2 + bx = 0 \text{ con } a \neq 0 \neq b$$

Para resolverlas utiliza el caso de factorización a través del factor común. Una de sus soluciones siempre será cero.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Con ésta sección, cubrimos el estudio de los tres tipos de ecuaciones cuadráticas incompletas que existen (triviales, puras y mixtas).

Instrucciones: Para reafirmar tu aprendizaje de cómo resolver ecuaciones cuadráticas incompletas mixtas realiza los siguientes ejercicios; al concluirlos comparte con tus compañeros los resultados y respeta las opiniones de los demás.

Descubre la frase escondida:

____ ____ ____ ____   ____ ____ ____ ____ ____ ____

1 2 3 4   5 6 7 8 9 10

Para lograrlo debes resolver las ecuaciones del recuadro, ello te hará saber qué letra está asignada a su solución distinta de cero.

Ecuación	Solución distinta de cero	Letra asignada
$13x^2 - 39x = 0$		M
$x^2 - x = 0$		C
$3x^2 = 21x$		U
$-5x^2 + 50x = 0$		S
$65x = 13x^2$		F
$-9x^2 + 72x = 0$		T
$84x = 21x^2$		E
$22x - 11x^2 = 0$		O
$14x^2 - 84x = 0$		R
$9x = x^2$		A

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Ecuaciones cuadráticas completas

En esta sección estudiaremos los elementos y soluciones de las ecuaciones cuadráticas completas, retomaremos la factorización de trinomios de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

Esta forma es la base del método de solución más usado para este tipo de ecuaciones. Analicemos la siguiente situación:

Figura 9.6. Monumento "El Colotero" en Álamo Temapache.

Álamo Temapache es un municipio de Veracruz reconocido como la "capital mundial de los cítricos" por su producción anual de cerca de un millón de toneladas de naranjas.

Un cultivador de naranjas de esta zona compra un pequeño terreno rectangular con 3 metros más de largo que de ancho y con una superficie de 70 metros cuadrados para utilizarlo como bodega; desea construir las paredes y necesita saber el perímetro del terreno. ¿Cuántos metros lineales debe considerar para la barda?

Para problemas relacionados con la Geometría resulta conveniente trazar un bosquejo y así obtener una idea más clara de la situación involucrada en el problema. En este caso, el bosquejo sería el siguiente:

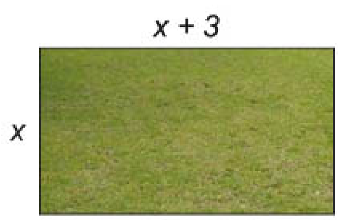


Figura 9.7.

Llamemos a la longitud desconocida del ancho x, así, $x + 3$ representa la longitud del largo. Y como el área del terreno es de 70 m^2 multiplicamos la base por la altura para obtener:

$$x(x + 3) = 70$$

$$\text{Multiplicando: } x^2 + 3x = 70$$

$$\text{Igualando a cero: } x^2 + 3x - 70 = 0$$

Observa que la ecuación anterior ya no corresponde a ninguna de las formas generales de las ecuaciones cuadráticas incompletas ya estudiadas, se trata de una ecuación cuadrática completa, tiene tres términos llamados: cuadrático, lineal e independiente.

Para resolver este tipo de ecuaciones utilizaremos la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

Retomando la ecuación $x^2 + 3x - 70 = 0$ la resolveremos de la siguiente manera:

Factorizando la expresión en el miembro izquierdo tenemos:

$$(x + 10)(x - 7) = 0$$

Usando el teorema del factor cero:

$$x + 10 = 0 \text{ ó } x - 7 = 0$$

Despejando en ambas ecuaciones x, las soluciones son:

$$x = -10 \text{ ó } x = 7$$

Interpretando las dos soluciones, descartamos la negativa (porque no hay distancias o extensiones negativas) y verificaremos que $x = 7$ es la adecuada para dar solución al problema planteado.

Es decir, el ancho del terreno rectangular será de 7 metros y el largo de 10 metros lo cual cumple con los 70 metros cuadrados de área.

Por lo tanto, el perímetro del terreno será de 2(7) + 2(10) = 34 metros lineales.

Una *ecuación cuadrática completa* tiene tres términos: cuadrático, lineal e independiente igualados a cero. Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a,\ b,\ c \text{ diferentes de cero}$$

Para resolverlas utiliza la factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Ahora que hemos estudiado los tres tipos de ecuaciones cuadráticas incompletas y el correspondiente a las completas, te invitamos a realizar los siguientes ejercicios para reafirmar tus destrezas.

Instrucciones: Sigue con atención las indicaciones que se presentan en los numerales del I al III. Realiza tu trabajo con orden y limpieza.

I. Clasifica las siguientes ecuaciones cuadráticas, escribiendo dentro del paréntesis:

- C, si se trata de una ecuación cuadrática completa.
- M, si se trata de una ecuación cuadrática mixta.
- P, si se trata de una ecuación cuadrática pura.
- T, si se trata de una ecuación cuadrática trivial.

( ) $x^2+9x+18=0$

( ) $8x-12x^2=0$

( ) $-x^2+7x-10=0$

( ) $-10x+4x^2=0$

( ) $72-2x^2=0$

( ) $x^2+8-6x=0$

( ) $2x^2=0$

( ) $5x^2-20=0$

( ) $0=-4x^2$

( ) $-9x-3x^2=0$

II. A través de una ecuación cuadrática para cada caso, plantea y resuelve los siguientes problemas, al concluirlos comparte tus soluciones con tus compañeros y escucha las opiniones de ellos, es posible que te ayuden a mejorar tus soluciones:

1. Un arquitecto diseñó el plano de construcción para una frutería en un terreno que tiene lo triple de largo que de ancho. Si el área del terreno es de 147 m^2.

   a) Realiza un bosquejo, a escala, del terreno correspondiente.
   b) Escribe la ecuación cuadrática que modela el problema. ¿De qué tipo es?
   c) ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

d) Calcula el perímetro de la frutería
e) ¿Cuántos metros mide la diagonal del terreno destinado a la frutería?

2. Raúl y Leonel son hermanos, la diferencia de sus edades es de cuatro años. El producto de sus edades es igual a 165.

   a) Escribe la ecuación cuadrática que modela el problema. ¿De qué tipo es?
   b) ¿Qué edad tiene cada uno?
   c) ¿Hace cuántos años, Saúl tenía el doble de edad que Leonel?
   d) ¿Hace cuántos años, Leonel tenía la mitad de la edad de Saúl?
   e) ¿Dentro de cuántos años, la suma de sus edades será 62 años?

3. A un publicista le solicitan crear folletos cuadrangulares de dos tamaños distintos para la propaganda de un nuevo restaurante, si la longitud del lado del folleto pequeño se aumenta en 6 cm, su área se cuadruplica.

   a) Escribe la ecuación cuadrática que modela el problema. ¿De qué tipo es?
   b) ¿Cuál es la medida del lado del folleto inicial?
   c) ¿Cuál es el área de ambos folletos?
   d) ¿Cuál es la diferencia entre los perímetros de los folletos?

4. El área de una estructura triangular utilizada para sostener el techo de una bodega mide 30 m^2. La altura es de 7 m mayor que la base:

   a) Realiza un bosquejo que represente el problema
   b) Escribe la ecuación cuadrática que modela el problema. ¿De qué tipo es?
   c) ¿Cuánto mide su base y su altura?
   d) ¿De qué tipo es el triángulo de la estructura?, ¿equilátero, isósceles o escaleno? ¿Por qué?

5. Adriana desea alfombrar la parte central de una sala de juntas que mide 12 m de largo por 9 m de ancho, pero quiere dejar un pasillo del mismo ancho por los cuatro lados, de manera que la superficie alfombrada mida 60 m^2.

   a) Realiza un bosquejo que represente el problema
   b) Escribe la ecuación cuadrática que modela el problema. ¿De qué tipo es?
   c) ¿Cuáles son las dimensiones de la alfombra?
   d) ¿Qué ancho tendrá el pasillo?
   e) ¿Cuál es el área de todo el pasillo?

III. Determina, por factorización, las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas completas.

   a) $x^2 - 3x = 10$

b) $11x - 21 = -2x^2$
c) $x^2 - 8x + 7 = 0$
d) $6x^2 - 15x - 2x - 45 = 0$
e) $84 + x^2 = -19x$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Construye otras 15 tarjetas para tu memorama de acertijos cuadráticos. De los cinco problemas que has resuelto en este actividad 3 en su número II, elabora tarjetas de papel o de cartulina de 5 x 13 cm. En una tarjeta escribe el acertijo, en la segunda tarjeta el modelo matemático (ecuación cuadrática) y en la tercera tarjeta la solución.

Aprende más

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Para resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática, incompleta o completa, existe un recurso muy valioso: la formula general. Para obtener esta fórmula es importante recuperar el concepto de Trinomio Cuadrado Perfecto, ya que al completarlo y factorizarlo podemos obtener las soluciones de cualquier ecuación cuadrática, ya sea completa o incompleta.

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

Método completando el Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP). Recordemos que si tenemos una expresión de la forma:

$$x^2+bx \text{ al sumar } \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Es decir, el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x*, completaremos el TCP. Teniendo entonces que:

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

Aplicando este concepto resolvamos la ecuación anterior por este método:

$$x^2-6x+5=0$$

Pasando el término independiente al segundo miembro de la ecuación:

$$x^2-6x=-5$$

Completando el Trinomio Cuadrado Perfecto. Sumando: $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$x^2-6x+9=-5+9$$

Factorizando el TCP:

$$(x-3)^2=4$$

Despejando:

$$x-3=\pm\sqrt{4}$$
$$x-3=\pm2$$

Las ecuaciones resultantes:

$$x-3=2 \qquad \text{ó} \qquad x-3=-2$$

Despejando:

$$x_1=5 \qquad \text{ó} \qquad x_2=1$$

De manera general, resolvamos la siguiente ecuación completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$ax^2+bx+c=0$$

Observa lo escrito en color rojo, es lo que se va realizando en cada paso de acuerdo a las explicaciones anteriores:

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para resolver cualquier ecuación cuadrática, ya sea incompleta o completa puedes utilizar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde *a*, *b* y *c* son los coeficientes del término cuadrático, lineal e independiente respectivamente.

Antes de aplicar la fórmula, debes escribir la ecuación cuadrática a resolver en su forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: Los siguientes ejercicios tienen la intención de consolidar tu identificación de los cuatro tipos de ecuaciones cuadráticas y, que a cualquiera de ellas seas capaz de aplicarle la fórmula general para encontrar sus soluciones.

I. El Profesor Juan Carlos que me da Química y Matemáticas, me pidió lleve a mi práctica los siguientes materiales, agua, tierra, alcohol y cal. Pero me dice que para encontrar las cantidades de cada sustancia, tengo que reducir las siguientes ecuaciones a su forma general:

$$ax^2+bx+c=0,\ ax^2+bx=0,\ ax^2+c=0 \text{ ó } ax^2=0$$

Además, clasificarlas según corresponda, e indicar a qué tipo pertenecen y resolverlas por fórmula general. ¿Qué cantidad tengo que llevar de cada sustancia?

a) Agua: $(y+1)^2=2(y-3)$ litros

b) Tierra: $2(x^2+4x-1)=3(x-1)^2$ kilogramos

c) Alcohol: $2(m-2)^2=8(1-m)$ litros

d) Cal: $5(a^2+3a-1)=5(2a-1)$ kilogramos

II. A través de la fórmula general, resuelve y comprueba las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x-2)^2+2=x$

b) $15v^2=8+2v$

c) $\dfrac{z-1}{z+3}+\dfrac{z-2}{z+1}=1$

d) $2(p+2)^2-(p-1)^2=2p+7$

e) $q+\frac{10}{q}=6$

f) $s^2+4s=5$

g) $6m+3=2m^2$

h) $\sqrt{2x^2-1}=x$

i) $y^2-cy-6c^2=0$ considera a c como constante

j) $z^4-20z^2+64=0$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas

Siempre que elevamos cualquier número real al cuadrado obtenemos como resultado un número positivo, por ejemplo:

$$(-5)^2=25 \qquad (0.31)^2=0.961 \qquad \left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

Es decir, no existe un número real cuyo cuadrado sea un número negativo. Observemos la situación anterior al intentar resolver la siguiente ecuación cuadrática pura:

$$x^2+1=0\text{, equivalente a: } x^2=-1$$

Resolver esta ecuación implica encontrar un valor para x que elevado al cuadrado dé como resultado −1. Dentro de los números reales este valor no existe.

Para resolver este tipo de ecuaciones se definen otro tipo de números llamados complejos los cuales se basan en la unidad imaginaria i cuyo cuadrado:

$$i^2 = -1$$
$$i = \sqrt{-1}$$

Un número complejo tiene una parte real y una imaginaria, su forma es:

$$a + bi$$

Donde a y b son números reales, a representa la parte real y b la imaginaria.

$a + bi$ → Si $b = 0$, el número complejo sólo es real .

$a + bi$ → Si $a = 0$, el número complejo sólo es imaginario.

Es decir, todos los números reales son complejos. El conjunto de los números reales es subconjunto del de los números complejos.

Números:

$\mathbb{C} \rightarrow$ Complejos
$\mathbb{R} \rightarrow$ Reales
$i \rightarrow$ Imaginarios

De esta manera, la solución de la ecuación $x^2 = -1$ es $x = i$

Analicemos la ecuación pura $6x^2 + 24 = 0$

Despejando:

$$x^2 = -\frac{24}{6}$$

Obteniendo el valor de x:

$$x = \sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2\sqrt{-1}$$

Por definición de i, tenemos que $x = \pm 2i$

Por lo tanto, las dos soluciones son: $x_1 = 2i$ y $x_2 = -2i$

Ahora, analicemos una ecuación cuadrática completa $x^2 - 6x + 10 = 0$

Recordemos la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes $a = 1,\ b = -6,\ c = 10$:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

Resolviendo operaciones:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 1\sqrt{-1}$$

Aplicando la definición de *i*: $x = 3 \pm 1i$

Por tanto las dos soluciones son: $x_1 = 3 + i$ y $x_2 = 3 - i$

Aprende más

Discriminante de una ecuación cuadrática

Con frecuencia, desafortunadamente, el significado asociado a la palabra discriminar es el de rechazar o "hacer menos" a una persona por sus características físicas, tales como su estatura, color de piel o peso. Sin embargo, discriminar también significa diferenciar o distinguir una cosa de otra.

Una ecuación cuadrática escrita en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$, tiene como discriminante:

$$D = b^2 - 4ac$$

El discriminante nos servirá para distinguir su tipo de soluciones. Sin resolver una ecuación cuadrática, a través de su discriminante sabremos si sus soluciones son reales o complejas.

Si observamos, podremos reconocer al discriminante como una parte de la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En la siguiente tabla mostramos los tres casos del valor del discriminante.

Discriminante	Raíces
D = 0	Si el discriminante es cero, su raíz es cero y ambas raíces resultan el mismo número, entonces sólo tiene una raíz real.
D > 0	Si el discriminante es positivo, entonces su raíz cuadrada es un número real y se generan dos raíces reales distintas.
D < 0	Si el discriminante es negativo, su raíz cuadrada es imaginaria, produciéndose dos raíces complejas

Un caso interesante es el que resulta de analizar el discriminante de ecuaciones cuadráticas incompletas del tipo mixto, observa:

Dada $ax^2+bx=0$, su discriminante $D=b^2-4ac$ se reduce a $D=b^2$ (recuerda que en una ecuación mixta el término independiente es igual a cero) y como b^2 siempre será positivo, entonces no existen raíces complejas para este tipo de ecuaciones.

Del caso trivial $ax^2=0$ tenemos que su discriminante es $D=0$, por tanto este tipo de ecuaciones tampoco tendrán raíces complejas, además ya sabemos que su solución siempre es cero.

Así, podemos decir que los dos tipos de ecuaciones cuadráticas que pueden tener raíces complejas son las completas y las incompletas puras.

Por ejemplo, para la ecuación pura $3x^2+18=0$

Su discriminante tiene el valor: $D=(0)^2-4(3)(18)=-216$

Como el discriminante es negativo, la ecuación tiene dos raíces complejas.

Para la ecuación completa $x^2 - 3x + 5 = 0$

Su discriminante tiene el valor:

$$D = (-3)^2 - 4(1)(5) = -11$$

Como el discriminante es negativo, la ecuación tiene dos raíces complejas.

Aplica lo aprendido

Actividad 5

Instrucciones: Lee con atención los ejercicios de los números I, II y III sigue sus indicaciones y en forma colaborativa encuentra las soluciones.

I. En los siguientes ejercicios identifica las raíces reales e imaginarias, realiza las operaciones indicadas entre ellas (considera sólo la raíz positiva en todos los casos), y escribe la letra dentro del paréntesis que le corresponda como su resultado.

a) $\sqrt{-81} + \sqrt{4} - 2\sqrt{25} + \sqrt{-64}$	( )	-4
b) $3\sqrt{-121} + 5\sqrt{-60} - \sqrt{200}$	( )	$-8 + 17i$
c) $\dfrac{4\sqrt{-1}\sqrt{-9}}{\sqrt{9}}$	( )	$\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$
d) $\dfrac{\sqrt{-27} + \sqrt{-12}}{\sqrt{-81}}$	( )	$33i + 10\sqrt{15}i - 10\sqrt{2}$

II. Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones cuadráticas y determina el tipo de sus soluciones.

Ecuación	Valor del discriminante	Tipo de soluciones
$x^2 - 2x + 1 = 0$	....	....
$2x^2 - 2x - 3 = 0$	....	....
$3x^2 - 4x + 2 = 0$	....	....
$3x^2 - x + 5 = 0$	....	....
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	....	....

III. Determina las soluciones, reales o complejas, de las siguientes ecuaciones:

a) $6x^2 - 2x = -54 - 2x$

b) $2x^2 + 5x = 5x - 32$

c) $3x^2 - x + 5 = 0$

d) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

e) $x^2 - 2x - 3 = 0$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad
¿De qué te das cuenta?

A la plaza principal de una ciudad o población con sus calles aledañas se le denomina primer cuadro, ¿te has preguntado por qué lleva ese nombre? y ¿al mencionar cuadro tendrá alguna relación con las ecuaciones cuadráticas? Para dar respuesta a las preguntas observa la figura 9.8 y anota en el siguiente espacio, tus conclusiones sobre ello.

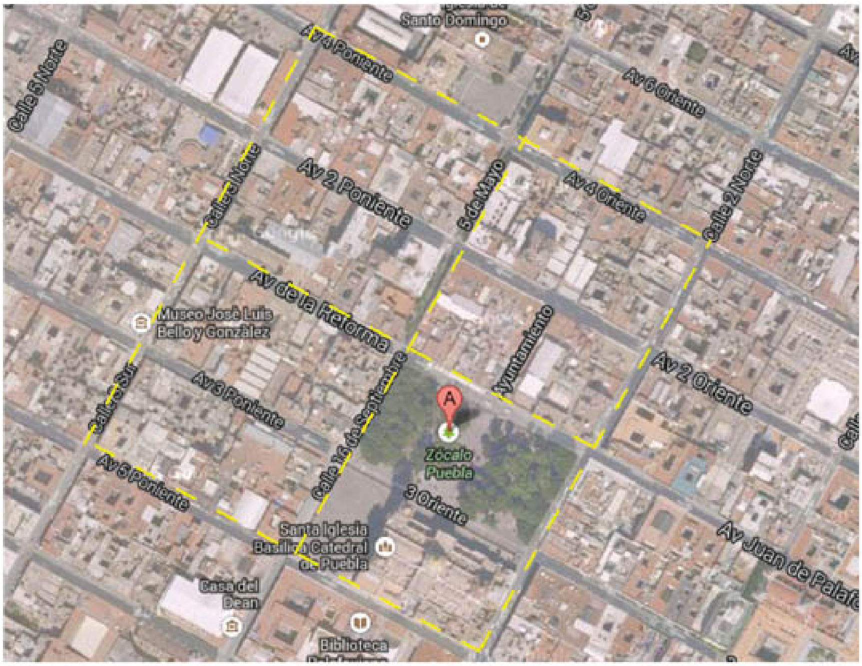


Figura 9.8.

....

....

....

....

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Actividad 6

Producto de aprendizaje: memorama de acertijos cuadráticos

Instrucciones:

- Realizarás 30 tarjetas rectangulares, en diez de ellas escribirás acertijos matemáticos realizados en la actividad número uno; en otras diez, las ecuaciones cuadráticas que modelan los acertijos anteriores, tanto completas como incompletas y; en las diez restantes, escribirás sus correspondientes soluciones.

- En tarjetas de cartulina o papel de 5 x 13 cm. elabora tus primeros tríos (15 tarjetas) con los ejercicios que resolviste en la actividad 1 en su numeral II, en una tarjeta escribe el acertijo, en la segunda tarjeta el modelo matemática (ecuación cuadrática) y en la tercera la solución.

- En segundo trio de tarjetas lo realizarás con los cinco problemas de la actividad número tres en su numeral II, recuerda escribir en una el acertijo, en la siguiente el modelo matemático y en otra tarjeta la solución.

- Una vez hecho tu memorama, jugarás con otros compañeros en parejas, colocando “boca abajo” sus 30 tarjetas (60 en total).

- Revuelvan las tarjetas y enseguida un jugador escoge tres, si las tres que escogió contienen: una el acertijo, en la segunda el modelo matemático o la ecuación cuadrática y en la tercera la solución de la ecuación, tiene derecho a escoger otras tres tarjetas, pero si éstas no mantienen relación entre ellas las coloca boca abajo en el mismo lugar y deben procurar recordar cuales eran las cartas, cediendo el turno a su compañero.

- El siguiente jugador selecciona tres tarjetas, con la ventaja de que si puso atención en las tarjetas que volteo su compañero anterior puede escoger alguna de ellas y seleccionar otras dos, si las tres tarjetas que seleccionó no muestran el acertijo, la ecuación y la solución, las volverá a colocar en el mismo lugar boca abajo.

- El jugador que consiga más tríos “acertijo-ecuación-solución” será el ganador.

Recomendaciones:

- Cuiden, con la ayuda del profesor, que las tarjetas tengan el mismo diseño.
- Jueguen al final del bloque, una vez que ya dominen los métodos de solución de una ecuación cuadrática.
- Justifiquen el procedimiento a través del cual se pueden obtener las soluciones de cada ecuación cuadrática.

Actividad 7

Producto de aprendizaje: elaboración de tu problemario

Esta actividad consiste en conformar tu problemario con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las tres actividades y tu actividad de reflexión presentadas a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del problemario, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para presentar tu problemario a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre, de la escuela, asignatura, del estudiante, bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha de entrega) y un índice.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: memorama de acertijos cuadráticos

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Contenido	Relación congruente entre acertijo, ecuación y soluciones (10 tríos).			
	Tarjetas con diseño muy bien definido.			
Presentación	Material manipulable (30 tarjetas).			
	Creatividad en la elaboración de las tarjetas.			
	Escritura clara de acertijo, ecuaciones y soluciones.			
	Identifica el tipo de ecuación de cada tarjeta.			
Dominio Conceptual y Procedimental	Presenta en las tarjetas los tres tipos de ecuaciones cuadráticas (completas, incompletas y mixtas).			
	Demuestra de forma precisa y coherente el procedimiento matemático para resolver ecuaciones cuadráticas para llegar al resultado correcto.			
	Presenta trabajos con orden, limpieza.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Respeta las opiniones de otros.			
	Sigue con atención instrucciones y las interpreta.			
Total de puntos		8		

Si en la lista de cotejo lograste los **12 puntos**, considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **9 a 11 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de: nombre de la escuela, estudiante, asignatura, bloque, título del poblemario, semestre, grupo, fecha.			
	Actividades: orden y limpieza. El planteamiento de la actividad a tinta. Proceso de solución a lápiz.			
	Presenta índice.			
Planteamiento de ecuaciones	Identifica correctamente el tipo de ecuación a utilizar.			
Procedimientos	Utiliza el método solicitado.			
	Escribe todos los pasos.			
Solución	Comprueba las soluciones obtenidas.			
	Las interpreta de acuerdo al contexto.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Respeta las opiniones de otros.			
	Sigue con atención instrucciones y las interpreta.			
Total de puntos		11		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 10 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque IX

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque X

Resuelves ecuaciones cuadráticas II

Introducción

En la vida cotidiana encontramos muchos objetos en movimiento a nuestro alrededor, la Física estudia el tiro parabólico como un ejemplo de movimiento realizado por un cuerpo en dos dimensiones o sobre un plano. Algunos ejemplos de cuerpos cuya trayectoria corresponde a un tiro parabólico son: proyectiles lanzados desde la superficie de la Tierra o desde un avión, el de una pelota de fútbol al ser despejada por el portero, el de una pelota de golf al ser lanzada con cierto ángulo respecto al eje horizontal y hasta en la simulación del movimiento de video juegos actuales.

Las funciones cuadráticas son utilizadas en diversas disciplinas como en la Física, Economía, Biología, Arquitectura. Son útiles para describir movimientos con aceleración constante, trayectoria de proyectiles, ganancias y costos de empresas, variación de la población de una determinada especie que responde a este tipo de ecuación, y obtener así información sin necesidad de recurrir a la experimentación.

¿Es lo mismo ecuación que función?

En el bloque VI, al explicar cómo realizar el gráfico de una función lineal a partir de una ecuación, dimos respuesta a esta pregunta. Para graficar una función cuadrática utilizaremos las mismas ideas, interpretaremos a una ecuación cuadrática como el estudio local de una situación en a los más dos momentos dados, en aquellos donde obtiene sus soluciones o raíces; y la función cuadrática la consideraremos como el análisis global de la misma situación abordada.

Ecuación y función están estrechamente ligadas, en el bloque VI ya abordamos la relación entre ecuación de primer grado y función lineal, en este bloque X analizaremos a detalle la relación entre ellas haciendo uso de gráficos parabólicos en el plano cartesiano para mostrar en ellos el comportamiento de una función cuadrática y las soluciones de una ecuación cuadrática.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.*

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Modelas gráficamente las funciones cuadráticas y resuelves problemas de tu entorno, como el cálculo de trayectorias parabólicas descritas por distintos móviles, por ejemplo los proyectiles (piedras) lanzadas por una catapulta.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Funciones cuadráticas • Parábola	• Identifica el gráfico de una función cuadrática. • Formula y resuelve problemas de su entorno.
Procedimentales	• Identifica la relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas. • Reconoce la ecuación cuadrática en dos variables como una función cuadrática. • Identifica que toda función cuadrática es una parábola, que puede ser cóncava hacia arriba o abajo. • Transforma la función cuadrática a la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$, así obteniendo las coordenadas del $V(h, k)$ para trazar su gráfica. • Interpreta que las intersecciones de la parábola con el eje X son las soluciones de la ecuación cuadrática y que dependen del valor del discriminante $\sqrt{b^2-4ac}$ para ser reales o imaginarias.	• Relaciona las ecuaciones cuadráticas con las funciones de segundo grado a través del trazo de parábolas. • Analiza el comportamiento de las parábolas para determinar su vértice y raíces y con ello, resolver problemas. • Aborda situaciones que involucren dos variables para modelarlas a través de una tabla o gráfico de una función.
Actitudinales	• Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza. Promueve el trabajo colaborativo. Respeta las opiniones de los demás, reflexiona sobre lo que escucha, expresa sus puntos de vista e interpreta instrucciones.	• Realiza y expone trabajos con criterios de orden y limpieza. • Respeta y escucha las opiniones y/o argumentos de otras personas, compartir ideas mediante productos, principalmente al hacer trabajo colaborativo. • Sigue con atención e interpreta instrucciones tanto de forma oral como escrita.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera ocho horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices dos horas para revisar los contenidos temáticos y seis horas para llevar a cabo tu evaluación diagnostica, las cuatro actividades propuestas y la construcción, en equipo, de su catapulta 100 g.

Evaluación del aprendizaje: productos

Durante este bloque obtendrás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Problemario
- Catapulta 100 g

Problemario. Lo elaborarás trabajando tanto en tu libro como en tu libreta con la resolución de problemas y ejercicios de manera individual y grupal. Al termino del bloque, integrarás tu problemario con las cuatro actividades que hallas realizado a lo largo del bloque, consulta la lista de cotejo que está ubicada al final del bloque, para tener idea clara de los criterios de evaluación que debes cubrir para entregarlo a tu profesor.

Catapulta. En equipo construirás una catapulta que logre lanzar un proyectil del 100 g. a una distancia de 3, 5 y 10 m. primero sin ningún obstáculo de por medio y después por encima de un obstáculo de una altura de 2 m. Las indicaciones las podrás ver en la actividad número cuatro. Te invitamos a que revises los criterios de evaluación que debes considerar antes de presentar tu producto de aprendizaje al Profesor, estos los podrás encontrar al final del bloque en la sección de evaluación.

Figura 10.1.

Para iniciar, reflexiona

¡Parábolas por todos lados!

A Los primeros estudios de las curvas que después se llamarían cónicas fueron hechos por el griego Menecmo (370-325 aC) al tratar de resolver el problema de la duplicación del cubo, donde demuestra la existencia de una solución mediante el corte de una parábola con una hipérbola, lo cual es confirmado posteriormente por Proclo y Eratóstenes.

Sin embargo, el primero en usar el término parábola fue el griego Apolonio de Perge (260- 200 aC) en su tratado *Cónicas*, obra más importante de él donde se muestra el estudio más avanzado (para su época) de las tangentes a secciones cónicas. Entre las valiosas aportaciones de Apolonio se encuentra su descubrimiento de que en un espejo parabólico se reflejan los rayos emitidos desde su foco en forma paralela, hecho utilizado actualmente en las antenas satelitales.

Figura 10.2.

El hombre, a lo largo de la historia, ha utilizado las propiedades de la parábola en distintos ámbitos, a continuación describimos algunos de ellos para ejemplificar esta situación, aunque tú puedes encontrar muchos más en los lugares menos pensados, la parábola se encuentra en todos lados.

En la balística, ciencia que estudia el movimiento de los cuerpos pesados lanzados al espacio, es determinante para lograr la precisión del lanzamiento de proyectiles. Desafortunadamente el desarrollo de esta ciencia ha perseguido fines bélicos, pero sus principios se han aplicado en otro tipo de actividades, prueba de ello se tiene en el área de la comunicación al invertir grandes cantidades de dinero en el lanzamiento de satélites al espacio.

Para lograr expresiones artísticas se ha usado la parábola, al diseñar fuentes donde varios chorros de agua salen desde distintos puntos a la misma velocidad pero con distintas direcciones para formar una familia de parábolas que al ser iluminadas causan efectos ópticos muy gratos para el espectador.

En la ingeniería civil, en la construcción de puentes se han puesto en práctica las propiedades de resistencia de la parábola, puesto que con su forma se logran estructuras fuertes y sólidas.

Figura 10.3.

Otra aplicación de la parábola se da en actividades deportivas como es el caso de básquet bol donde se ha analizado la trayectoria que describe el balón al realizar un tiro libre encontrando que en el rango de 60 a 70° son los mejores ángulos de salida (cuando el balón abandona la mano del tirador) para lograr en enceste

A lo largo de las actividades de este bloque analizaremos los elementos de la parábola y su relación con las ecuaciones cuadráticas para poder modelar y resolver problemas de nuestro entorno.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Para facilitar el estudio de las funciones cuadráticas es importante que tengas ya desarrollada tu habilidad de identificar y resolver ecuaciones cuadráticas, además de que con ellas, seas capaz de modelar problemas de diversa índole, así como interpretar las soluciones obtenidas.

Instrucción: Lee con atención los siguientes ejercicios y problemas para resolverlos poniendo en práctica tus conocimientos, habilidades y una actitud de perseverancia que muestre tu disposición entusiasta hacia el trabajo colaborativo.

1. Clasifica las siguientes ecuaciones cuadráticas, escribiendo en los paréntesis la letra correspondiente para relacionar la ecuación con su nombre:

a) $3x^2 - 7x = 4x$ trivial	( ) Ecuación cuadrática
b) $-7 = 4x^2 - 10$	( ) Ecuación cuadrática pura
c) $3x - 2 = -2x^2 + 12$	( ) Ecuación cuadrática mixta
d) $8x - 4 = 7x^2 + 4(2x - 1)$	( ) Ecuación cuadrática completa

2. Un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7000 m^2, calcula la dimensión de su largo.

3. La diagonal de un folleto publicitario rectangular mide 10 cm. Halla la medida de su ancho, si el ancho mide 2 cm menos que el largo.

4. El papá de Fausto quiere construir una alberca rectangular, si debe cumplir con un perímetro de 22 m y sabe que su largo es 2 m mayor que el doble su ancho, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la alberca?

5. Relaciona las siguientes columnas, utilizando flechas para hacer corresponder cada ecuación cuadrática con sus respectivas soluciones:

$x^2 - 11x - 12 = 0$	$x_1 = -4i \quad x_2 = 4i$
$5x^2 + 3x = -3x - 1$	$x_1 = -.4 + 1.74i \quad x_2 = -.4 - 1.74i$
$3(x^2 + 16) = 0$	$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$
$x(5x + 4) = -16$	$x_1 = -.2 \quad x_2 = -1$
$12 = 6(x^2 + 3x + 2)$	$x_1 = 12 \quad x_2 = -1$
	$x_1 = -2.5 \quad x_2 = 0$

6. En una fábrica de playeras, el costo de producción de n playeras está dado por la función: $C = f(n) = 35n + 500$ pesos.

   a) ¿Cuál es el costo de producción de 100 playeras?

   b) Si se cuenta con $1200.00 para invertirlos en la producción de este tipo de playeras. ¿Cuántas se podrán fabricar?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Si de la evaluación anterior respondiste correctamente de **5 a 6 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, de **3 a 4** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de **4** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades. Refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: ecuaciones y funciones lineales y ecuaciones de segundo grado.

Aprende más

Parábola, gráfico de funciones cuadráticas

Cuando lanzamos un objeto su trayectoria podría ser recta si no existiera el efecto de la gravitación para hacerle caer, una parábola es la curva simétrica que representa esta trayectoria, como se muestra en la situación siguiente:

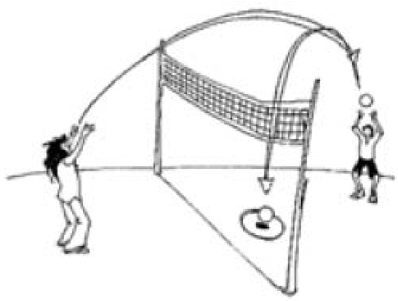


Figura 10.4.

Supongamos que en un partido de voleibol se ha calculado que la distancia *d*, en metros, a la que se encuentra el balón sobre el piso en el tiempo t segundos está dada por:

$$d(t) = -4.9t^2 + 9.8t$$

De la misma manera que tabulamos y graficamos una función lineal lo haremos para esta función cuadrática, asignaremos valores a la variable independiente tiempo (t) y calcularemos a través de la regla de correspondencia los valores de d y con estos se tendrán las coordenadas para localizarlas en un plano cartesiano.

Tabla 1.

Variable independiente (t)	Variable dependiente $d(t) = -4.9t^2 + 9.8t$	Coordenadas (t, d)
0	0	(0, 0)
0.5	3.675	(0.5, 3.675)
1	4.9	(1, 4.9)
1.5	3.675	(1.5, 3.675)
2	0	(2, 0)

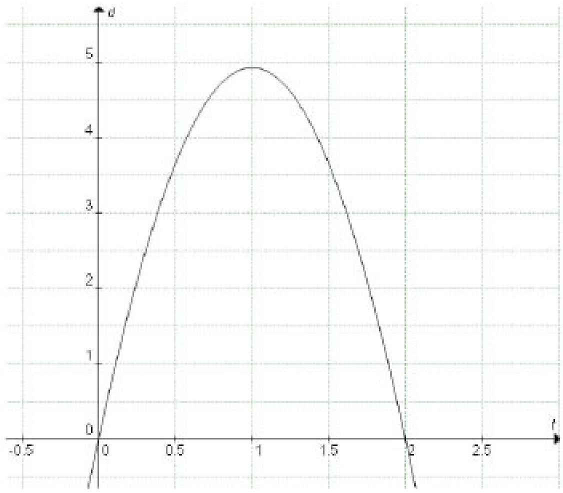


Figura 10.5.

El uso de la parábola es diverso, pues en muchas ciencias se aplica, como en la Física ya que su forma corresponde a las trayectorias ideales de los cuerpos que se mueven bajo la influencia de la gravedad.

Tres elementos de una parábola son: vértice, eje de simetría y brazos o ramas.

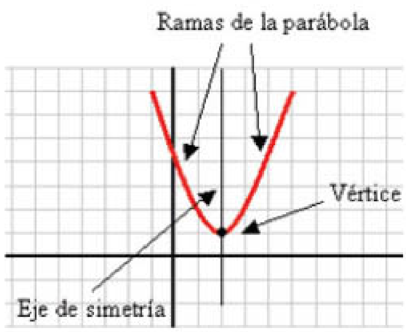


Figura 10.6.

El *vértice* es el punto máximo o mínimo de la parábola dependiendo de su orientación, la abscisa de este punto se puede calcular con la fórmula:

$$\frac{-b}{2a}$$

y la ordenada, evaluando la función de la parábola en éste valor, es decir:

$$v\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

El eje de simetría, que divide por la mitad a la parábola, se puede describir a través de la ecuación de la recta:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Retomando la gráfica de la función que describe la altura del balón de voleibol, su vértice lo podemos determinar haciendo uso de la formula anterior:

$$d(t) = -4.9t^2 + 9.8t$$

con:

$$a = -4.9 \qquad b = 9.8 \qquad c = 0$$

$$v\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = (1,\ 4.9)$$

Y el eje de simetría: $t = \frac{-b}{2a} = 1$ tal y como se muestra en el gráfico siguiente:

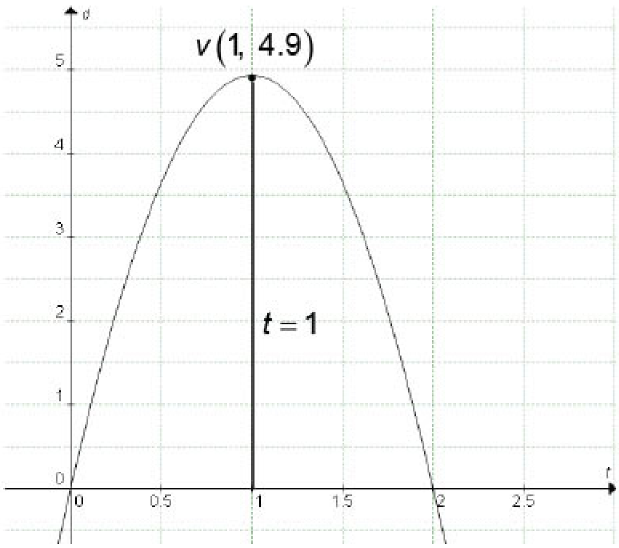


Figura 10.7.

La orientación de una parábola depende del signo del coeficiente del término cuadrático ax^2, si $a > 0$ parábola abre hacia arriba y si $a < 0$ parábola abre hacia abajo.

La relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas se establece a través de la parábola:

Ecuación $\rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

Función $\rightarrow y = ax^2 + bx + c$

Vértice: $v\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$

Eje de simetría: $x = \dfrac{-b}{2a}$

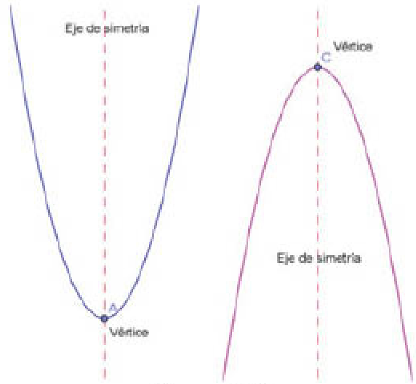


Figura 10.8.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Realiza los siguientes ejercicios.

I. Las siguientes funciones determinan la altura a la que se encuentran tres diferentes proyectiles en el tiempo (t):

$d = -4.9t^2 + 24 \qquad d = -4.9t^2 + 16 \qquad d = -4.9t^2 + 36$

a) Realiza sus tabulaciones considerando t = 1, 2, 3, 4 y 5 seg.

b) Grafica las tres funciones en un mismo plano cartesiano

c) ¿Cuál de los tres proyectiles alcanzará una mayor altura?

d) ¿Cuál de los tres proyectiles se encontrará mayor tiempo en el aire?

II. Determina y escribe la coordenada del vértice, la ecuación del eje de simetría y orientación de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 3x - 2$

b) $y = -3x^2 - 5x + 4$

c) $y = 3x^2 - 6x$

III. Realiza las gráficas de las parábolas propuestas en II.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Soluciones de ecuaciones cuadráticas identificadas en las parábolas

Hemos visto que una función cuadrática de la forma y = $ax^2 + bx + c$ tiene su representación gráfica en el plano cartesiano a través de una parábola. Cuando a se le asigna el valor cero obtenemos $0 = ax^2 + bx + c$ que es su correspondiente ecuación cuadrática, las soluciones de esta ecuación coinciden con los puntos de intersección entre la parábola y el eje X. Reconsiderando la situación analizada de la altura del balón de voleibol determinada por la función $d(t) = -4.9t^2 + 9.8t$, transformando su ecuación obtenemos $0 = -4.9t^2 + 9.8t$ cuyas soluciones obtenemos con el siguiente procedimiento.

Factorizando:

$$0 = -4.9t^2 + 9.8t$$
$$0 = -4.9t(t - 2)$$

Aplicando el teorema del factor cero:

$$-4.9t = 0 \qquad (t-2) = 0$$
$$t = 0 \qquad\qquad t = 2$$

Como se observa en el gráfico estos puntos, (0, 0) y (2, 0) son los que intersectan el eje X.

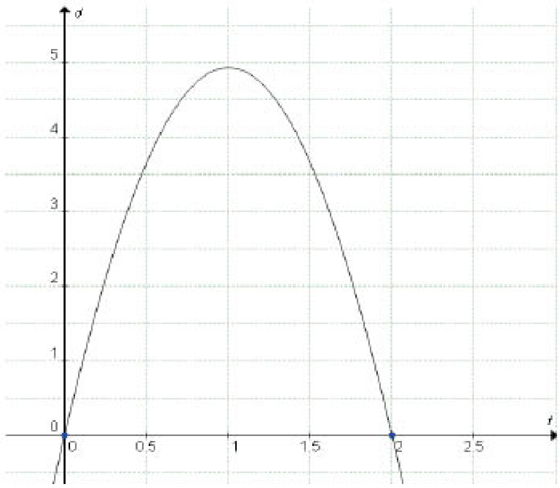


Figura 10.9.

En general, el gráfico de una función de la forma y = $ax^2 + bx + c$ tendrá cero, una o dos intersecciones con el eje X dependiendo del número de soluciones reales que tenga su ecuación correspondiente. Es decir, la parábola se podrá no intersectar con el eje X, o bien, lo hará en uno o dos puntos.

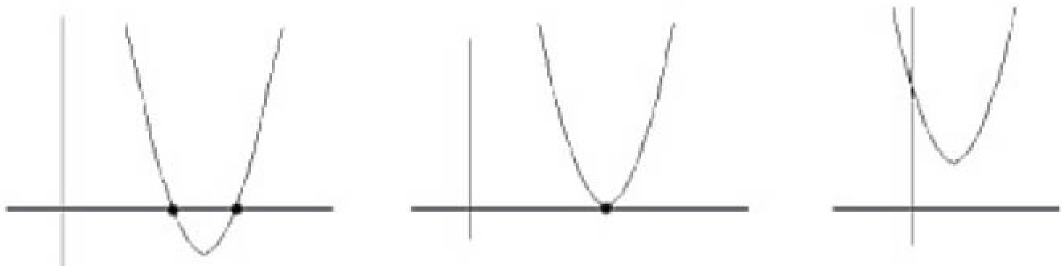


Figura 10.9.

En la imagen anterior, el gráfico de la izquierda muestra el gráfico de una función cuadrática cuya ecuación tiene dos soluciones reales, el gráfico de en medio corresponde a una función cuya ecuación tiene una sola solución real y el gráfico de la derecha representa una función cuya ecuación tiene soluciones complejas.

Retomaremos los casos de ecuaciones cuadráticas tanto incompletas como completas, también haremos uso del proceso de tabulación de una función para lograr el gráfico que les represente.

Iniciemos con las ecuaciones cuadráticas incompletas triviales, aquellas que sólo tienen el término cuadrático igualado a cero, por ejemplo $x^2 = 0$ como toda ecuación trivial sabemos que su solución es $x = 0$, para transformar esta ecuación a una función basta cambiar el cero por una segunda variable representada por y con la finalidad de lograr la relación entre esas dos variables.

Ecuación $x^2 = 0$, función $y = x^2$, de la misma manera que tabulamos y graficamos una función lineal lo haremos para esta función cuadrática, asignaremos valores a la variable independiente representada por x y calcularemos a través de la regla de correspondencia los valores de y y con estos se tendrán las coordenadas para poder localizarlas en un plano cartesiano.

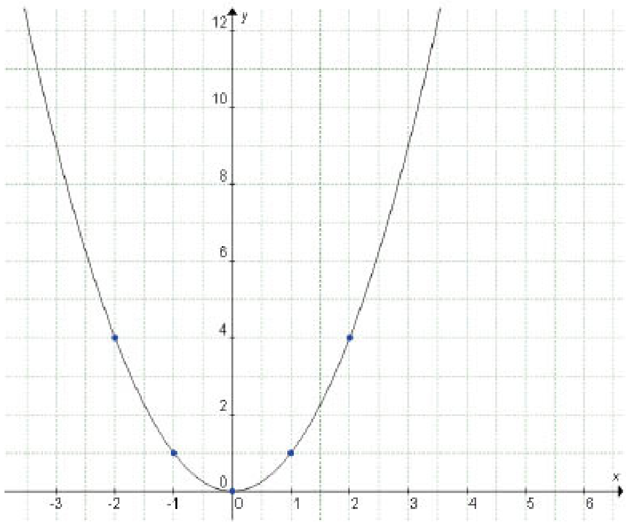


Figura 10.10.

Tabla 2.

Variable independiente x	Variable dependiente $y = x^2$	Coordenadas (x, y)
−2	4	(−2,4)
−1	1	(−1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	4	(2,4)

Nota que la parábola se intersecta con el eje X en el origen de coordenadas (0, 0), lo cual hace coincidir la abscisa de este punto con la solución de la ecuación $x^2 = 0$. Recuerda, si una ecuación cuadrática tiene una solución real entonces el gráfico de la función correspondiente se intersectará en un punto con el eje X.

Ahora abordemos el caso de las ecuaciones cuadráticas incompletas puras a través del análisis de la siguiente situación:

Determinemos el gráfico de la trayectoria que describe una pelota arrojada desde una altura de 25 m. La función $y = x^2 + 25$ determina la distancia entre la pelota y el piso en el tiempo x segundos.

Tabulemos y grafiquemos la trayectoria para x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Tabla 3.

Variable independiente x	Variable dependiente $y = -x^2 + 25$	Coordenadas (x, y)
0	25	(0, 25)
1	24	(1, 24)
2	21	(2, 21)
3	16	(3, 16)
4	9	(4, 9)
5	0	(5, 0)

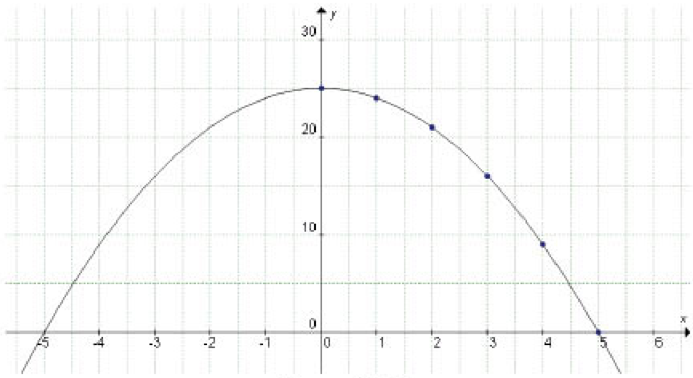


Figura 10.11.

Observa que para valores negativos de x, matemáticamente, la gráfica existe pero no tiene una interpretación real pues se interpretaría como retroceso en el tiempo, lo cual no es posible. Si resolvemos la ecuación pura $0 = -x^2 + 25$ obtenemos sus raíces $x_1 = 5$ y $x_2 = 5$ mismas que coinciden con las abscisas de los dos puntos de intersección con el eje X: (−5, 0) y (5, 0); dos raíces reales, dos intersecciones.

Para el caso de ecuaciones cuadráticas completas tenemos el siguiente planteamiento: la altura de un proyectil en metros, para t segundos está dada por:

$$y = -5x^2 + 40x + 1.2$$

Tabulemos y grafiquemos la trayectoria de su movimiento.

Tabla 4.

Variable independiente x	Variable dependiente $y = -5x^2 + 40x + 1.2$	Coordenadas (x, y)
0	1.2	(0, 1.2)
1	36.2	(1, 36.2)
2	61.2	(2, 61.2)
3	76.2	(3, 76.2)
4	81.2	(4, 81.2)
5	76.2	(5, 76.2)
6	61.2	(6, 61.2)
7	36.2	(7, 36.2)
8	1.2	(8, 1.2)

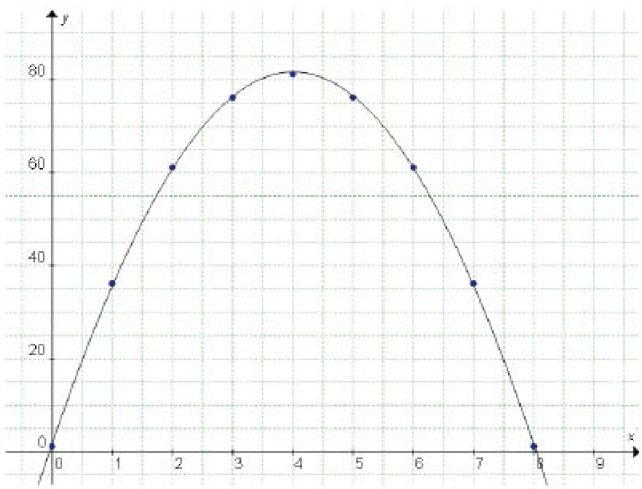


Figura 10.12.

Como se observa en la gráfica se tienen dos intersecciones de la parábola con el eje X en los puntos (0,0) y (8,0), cuyas abscisas son las soluciones reales de la ecuación respectiva.

Para el caso de ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas resolveremos la ecuación:

$$0 = x^2 + x + 4$$

Y graficaremos la función:

$$y = x^2 + x + 4$$

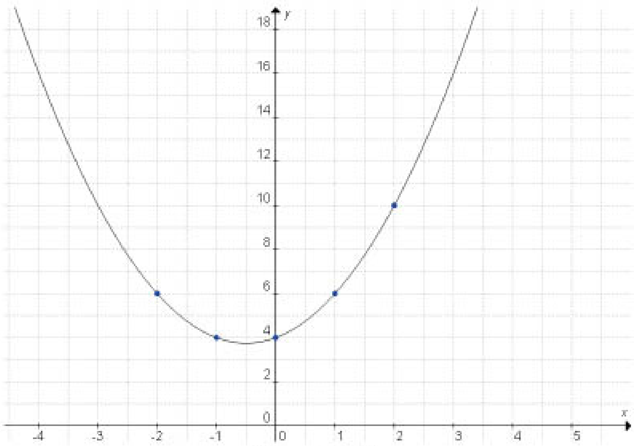


Figura 10.13.

Tabla 5.

Variable independiente x	Variable dependiente $y = x^2 + x + 4$	Coordenadas (x, y)
−2	6	(−2, 6)
−1	4	(−1, 4)
0	4	(0, 4)
1	6	(1, 6)
2	10	(2, 10)

Como observamos en la gráfica no existen intersecciones de la función con el eje X y al resolver la ecuación obtenemos las soluciones:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{15}i}{2} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{15}i}{2}$$

Las anteriores soluciones son complejas, por lo tanto, no aparecen en un eje de coordenadas de números reales.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Hasta aquí hemos estudiado dos tipos de ecuaciones cuadráticas incompletas las de tipo trivial y mixto.

Instrucciones (1): Realiza lo que se te indica en los tres casos para consolidar tu aprendizaje.

I. Sin realizar las gráficas de las funciones, completa lo siguiente:

Función	Discriminante de la ecuación respectiva	Número de intersecciones con el eje *X*	Coordenadas de las raíces
$y = 6x^2 - 36$	....	....	....
$y = -8x^2$	....	....	....
$y = x^2 - 121$	....	....	....
....	....	....	(–8,0) (-1,0)
....	$D = 3^2 - 4(1)(4)$	....	....

Instrucciones (2): Modela o plantea los siguientes problemas a través de una ecuación cuadrática, determina la solución de cada ecuación e interpreta los resultados en función del contexto del problema. Los procedimientos y operaciones los harás en tu cuaderno:

II. Observa con atención las parábolas en el siguiente plano cartesiano y relaciónalas con sus ecuaciones correspondientes escribiendo la letra del gráfico dentro del paréntesis ubicado a la izquierda de cada ecuación.

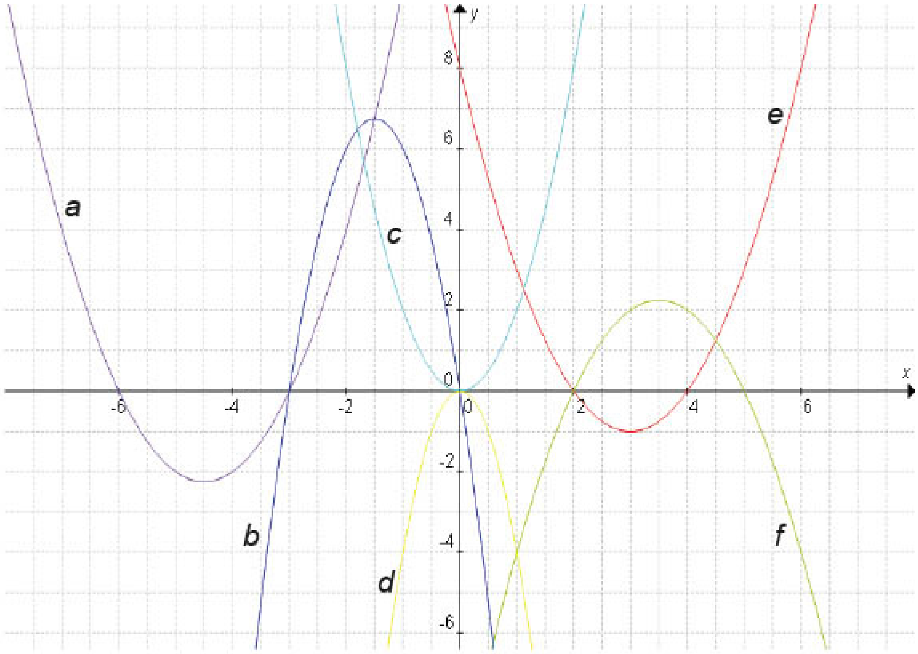


Figura 10.14.

( ) $x^2 + 9x + 18 = y$

( ) $x^2 + 8 - 6x = y$

( ) $2x^2 = y$

( ) $-x^2 + 7x - 10 = y$

( ) $y = -4x^2$

( ) $-9x - 3x^2 = y$

III. Las gráficas mostradas representan los costos y los ingresos por la producción y venta de balones de basquetbol por parte de la empresa Malten.

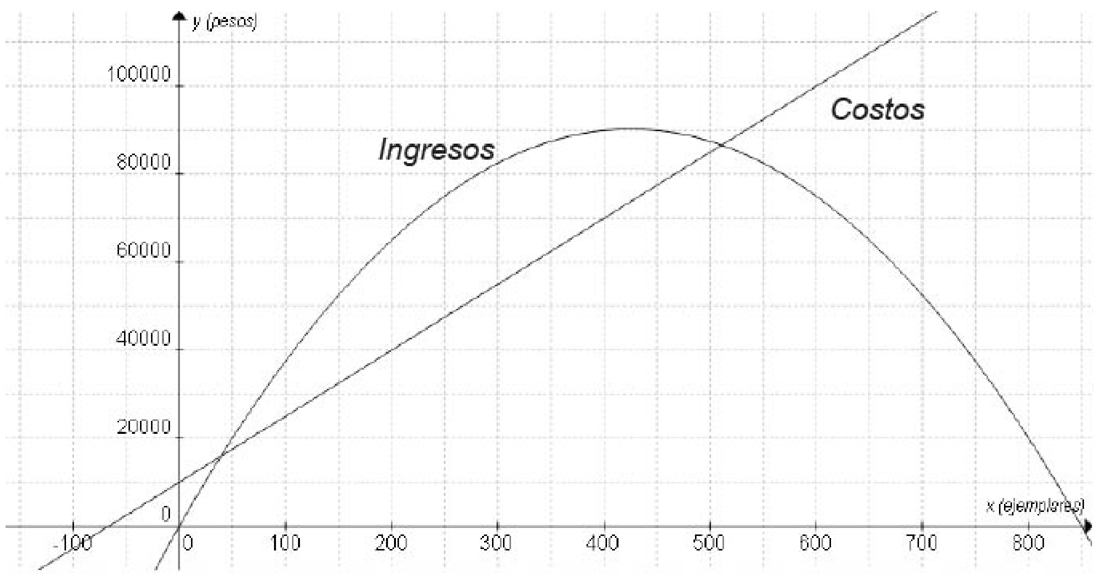


Figura 10.15.

a) ¿Cuál es el costo, el ingreso y la ganancia por producir y vender 0, 200, 400 y 600 balones?

b) ¿Cuál es el monto de balones que se deben ofertar para que se obtenga ganancia?

c) ¿Cuál es el ingreso máximo? ¿Cuántos balones se necesitan vender para lograr este?

d) ¿Con cuántos balones se logra la ganancia máxima?

e) ¿Cuál es el otro punto de intersección de la parábola con el eje X?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Transformación de y = $ax^2 + bx$ + c a y = $a(x - h)^2 + k$

En esta última sección el propósito central será transformar una función cuadrática expresada en forma general:

$$y = ax^2 + bx + c$$

A la forma estándar o de vértice:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Para mostrarte como se realiza dicha transformación, retomemos una vez más la función dada anteriormente para determinar la altura a la que se encuentra el balón en un partido de voleibol.

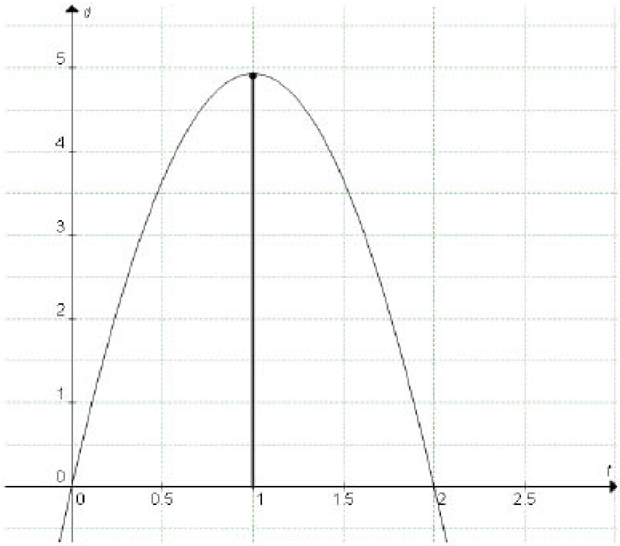


Figura 10.16.

La función propuesta equivalente a:

$$y = ax^2 + bx + c$$
es
$$d = -4.9t^2 + 9.8t$$

El procedimiento a seguir para llegar a la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$ es el siguiente:

Sacando factor común:

$$d = -4.9(t^2 + 2t)$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$d = -4.9(t^2 + 2t + 1) + 4.9$$

Factorizando el trinomio: $d = -4.9(t+1)^2 + 4.9$

Por comparación de esta función de forma estándar se pueden encontrar las coordenadas del vértice (h,k) que son $V(1, 4.9)$.

Con lo aprendido en el bloque IX y X se puede realizar el análisis de una función cuadrática que abarca los siguientes puntos:

Dada la función cuadrática $y = x^2 - 6x + 8$, determinaremos:

- Hacia donde se abre la gráfica de la función (concavidad). Observamos que:

$$a = 1 \qquad a > 0$$

Entonces la parábola abre hacia arriba.

- La intersección con el eje *Y*. Para obtener el punto donde se intersecta la parábola con el eje Y se asigna el valor de cero a la variable *x*:

$$y = 0^2 - 6(0) + 8 = 8$$

Por tanto, la intersección con el eje Y en este caso se da en el punto (0, 8).

- Las intersecciones con el eje X (ceros o raíces de la función). Se obtienen resolviendo la ecuación correspondiente:

$$0 = x^2 - 6x + 8$$
$$0 = (x-4)(x-2)$$
$$x_1 = 4 \qquad x_1 = 2$$

- La ecuación en la forma vértice o estándar:

$$y = x^2 - 6x + 8$$
$$y = (x^2 - 6x + 9) + 8 - 9$$
$$y = (x-3)^2 - 1$$

- Las coordenadas del vértice. Leyendo las coordenadas en la ecuación en la forma vértice: $V(3,-1)$.

- El valor máximo o mínimo de la función. En este caso es el valor mínimo y su valor es el de la ordenada del vértice: $y = -1$

- La ecuación del eje de simetría. $x = 3$

- Traza la gráfica de la función. A través de este análisis además de tener más claro el comportamiento de la función se puede obtener su gráfico sin necesidad de realizar la tabulación como se hizo en los ejercicios anteriores

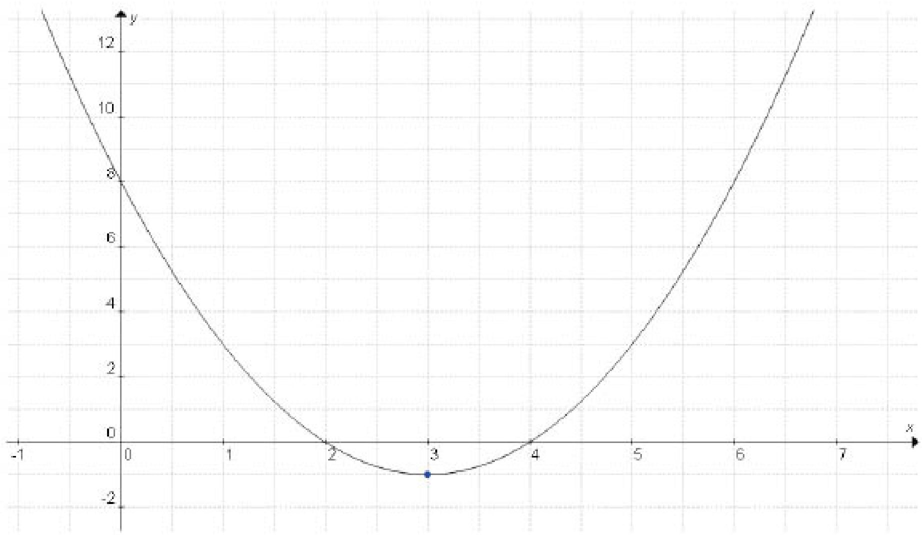


Figura 10.17.

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Realiza lo que se te indica en los tres casos para consolidar tu aprendizaje.

I. Descubre la frase escondida:

.....	.....	.....	.....	.....		.....	.....		.....	.....	.....	.....	.....	.....
5	$\frac{39}{26}$	2	$\frac{1}{2}$	3		$\frac{9}{2}$	$\frac{39}{26}$		5	$\frac{39}{26}$	1	$\frac{65}{26}$	$\frac{21}{6}$	$\frac{72}{18}$

Para lograrlo debes resolver las ecuaciones del recuadro, ello te hará saber qué letra está asignada a su solución distinta de cero.

Función	Abscisa del vértice	Letra asignada
$f(x)=13x^2-39x$		U
$f(x)=x^2-x$		D
$f(x)=3x^2-21x$		P
$f(x)=-5x^2+50x$		C
$f(x)=65x-13x^2$		R
$f(x)=-9x^2+72x$		O
$f(x)=84x-21x^2$		I
$f(x)=22x-11x^2$		E
$f(x)=14x^2-84x$		A
$f(x)=9x-x^2$		T

II. Realiza el Análisis de las siguientes funciones cuadráticas determinando los elementos estudiados:

a) $y = x^2 - x - 6$

- Hacia donde se abre la gráfica de la función (concavidad).
- La intersección con el eje y.
- Las intersecciones con el eje x (ceros o raíces de la función).
- La ecuación en la forma vértice o estándar.
- Las coordenadas del vértice.
- Valor máximo o mínimo de la función
- La ecuación del eje de simetría.
- Traza la gráfica de la función.

b) $y = -2x^2 + 13x - 20$

c) $y = 4x^2 - 16$

d) $y = x^2 - 4x + 7$

III. Ahora, a partir del gráfico mostrado a continuación del lanzamiento de dos proyectiles por la misma catapulta, identifica y escribe los elementos del análisis completo de dichas parábolas, básate en los ejercicios anteriores.

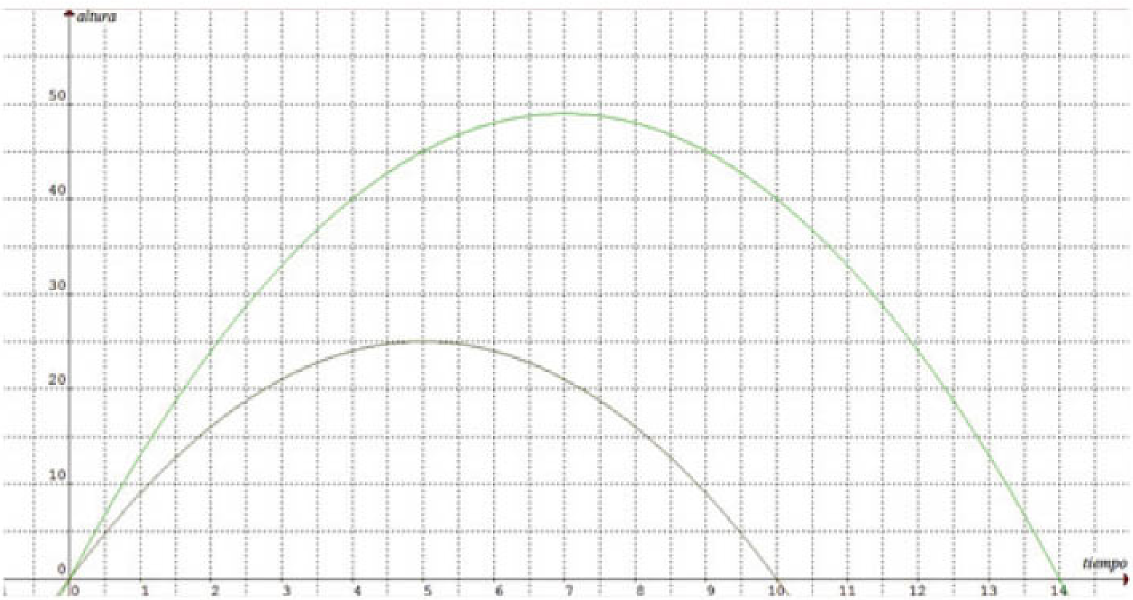


Figura 10.18.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Ahora que has finalizado el bloque X, es importante que reflexiones sobre lo que has aprendido. Anota en el siguiente espacio, tus conclusiones sobre ello. Incluye cuales han sido los conocimientos de este bloque en cuanto a las funciones cuadráticas, la parábola como su gráfico y la transformación de su forma general a su forma estándar. Menciona una ejemplo, distinto a los ya estudiados en el bloque, en el cual se registre una trayectoria parabólica.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Actividad 4

Producto de aprendizaje: catapulta 100 mg

Instrucciones: Es el momento de mostrar la efectividad de tu catapulta, recuerda que por equipos deberán lograr lanzamientos, de un proyectil de 100 g, a una distancia de 3, 5 y 10 m, primero sin obstáculos y luego deberán hacerlo por encima de un obstáculo de 2 m de altura.

Verifica que hayas seguido las recomendaciones hechas echas al inicio del bloque:

- Investiga qué es una catapulta, sus elementos esenciales y cómo funciona.
- Realiza un bosquejo previo del diseño que construirás.
- La elección de los materiales es libre, preferentemente usa reciclados de madera, cartón o metales.
- Ensayen tantas veces como sea necesario hasta lograr el dominio de fuerza y ángulo de lanzamiento para lograr las distancias requeridas, tanto horizontal como verticalmente. Elijan un proyectil "suave", que no dañe con su impacto.
- Justifiquen el procedimiento a través de las funciones cuadráticas que modelen la trayectoria parabólica del proyectil lanzado. Utilicen los mismos elementos de análisis aprendidos.
- Considera el tamaño de la catapulta en función de la masa del proyectil al lanzar, ni tan pequeño ni tan grande.
- Consulta los criterios e indicadores de evaluación que de debes cumplir en este trabajo, estos los encontrarás en la sección de evaluación ubicada al final del bloque.

Figura 10.18

Figura 10.19

Actividad 5

Producto de aprendizaje: elaboración de tu problemario

Esta actividad consiste en conformar tu problemario con los problemas y ejercicios que resolviste de manera individual o grupal en las tres actividades y tu actividad de reflexión presentadas a lo largo del bloque.

En tu libreta o cuaderno que hayas destinado para este producto de aprendizaje, colocarás cada uno de los ejercicios que se te indicaron que formarían parte del problemario, sólo asegúrate antes de colocarlos que los procedimientos y resultados sean correctos. Te sugerimos que el resultado final de cada ejercicio o problema lo puedas resaltar con una tinta de color diferente al color utilizado en el procedimiento.

Te invitamos a consultar la lista de cotejo que se encuentra en la sección de evaluación que se encuentra enseguida, para que consideres los criterios de evaluación que debes cubrir.

Para presentar tu problemario a tu Profesor, es importante que mantengas limpieza y orden, además coloca una carátula al inicio con tus datos (nombre, de la escuela, asignatura, del estudiante, bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha de entrega) y un índice.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: catapulta 100 mg

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Catapulta hecha con materiales apropiados y creativamente empleados.			
	La construcción de la catapulta es ordenada, atractiva y precisa.			
	Se reconoce la función de cada una de las partes de la catapulta.			
Dominio procedimental	Logran el lanzamiento de 3 metros del proyectil de 100 mg.			
	Logran el lanzamiento de 5 metros del proyectil de 100 mg.			
	Logran el lanzamiento de 10 metros del proyectil de 100 mg.			
	Logran el lanzamiento de 3, 5 o 10 metros del proyectil de 100 mg por encima de un obstáculo de 2 metros.			
Dominio conceptual	Se muestra el análisis de la parábola formada con el lanzamiento de 3 metros			
	Se muestra el análisis de la parábola formada con el lanzamiento de 5 metros			
	Se muestra el análisis de la parábola formada con el lanzamiento de 10 metros			
Actitud	Trabajar de forma colaborativa la catapulta y presentar su funcionamiento con disciplina y de forma organizada.			
Total de puntos		11		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos**, considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **9 a 10 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de: nombre de la escuela, estudiante, asignatura, bloque, título del poblemario, semestre, grupo, fecha.			
	Actividades: orden y limpieza. El planteamiento de la actividad a tinta. Proceso de solución a lápiz.			
	Presenta índice.			
Gráfico de funciones	Logra tabular una función cuadrática en al menos 5 puntos.			
	Localiza correctamente los puntos de la tabulación en un plano cartesiano.			
Procedimientos	Relaciona las soluciones de una ecuación cuadrática con las intersecciones del gráfico de una función con el eje X.			
	Es capaz de transformar una función en su forma general a su forma estándar			

Análisis del gráfico de funciones	Determina el vértice de una parábola como mínimo o máximo.			
	Reconoce la orientación de una parábola.			
	Determina las intersecciones con el eje X.			
	Determina la intersección con el eje Y.			
Total de puntos		**12**		

Si en la lista de cotejo lograste los **12 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **10 a 9 puntos** es **Bien**, de **8 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 7** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque X

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Glosario

- **Análisis numérico o cálculo numérico:** rama de las matemáticas que se encarga de diseñar algoritmos para, a través de números y reglas matemáticas simples, simular procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real.
- **Ángulo:** unidad de medida que nos permite conocer la amplitud con la que dos rectas se interceptan entre sí.
- **Área:** superficie comprendida dentro de un perímetro.
- **Binomio al cuadrado:** multiplicación de un binomio por sí mismo. Siendo un producto notable común.
- **Binomios con término común:** dos binomios que tienen un término igual.
- **Binomios conjugados:** dos binomios semejantes donde la única diferencia es un signo.
- **Coeficiente:** número que se escribe antes de una variable, indicando el número de veces que se ha sumado ésta.
- **Constante:** aquella magnitud cuyo valor es único.
- **Coordenadas cartesianas:** sistema de coordenadas formado por dos rectas que se interceptan perpendicularmente, llamadas también coordenadas rectangulares.
- **Discriminante:** cantidad subradical de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas cuya expresión es $b^2 - 4ac$, con la que se puede investigar el tipo de solución que tienen estas ecuaciones.
- **Ecuación cuadrática:** igualdad de segundo grado que se satisface con dos valores de la variable.
- **Ecuación lineal o de primer grado:** ecuación que contiene la incógnita a la primera potencia y en el numerador.
- **Ecuación:** igualdad donde sólo algún valor o algunos valores de la variable satisfacen a ésta.
- **Equidistante:** dos puntos que están a la misma distancia de otro tomado como referencia.
- **Estilo APA:** es el estándar adoptado por la Asociación Estadounidense de Psicología (APA) que los autores utilizan al momento de presentar sus documentos o textos para las revistas publicadas por la entidad.
- **Evaluación numérica:** consiste en sustituir por números cada una de las variables de una expresión (para los cuales está definida) y se realizan los cálculos a través de las operaciones indicadas.
- **Exponente:** número escrito arriba y a la derecha de otro número, llamado base, que indica el número de veces que se multiplicará dicha base.
- **Factor común:** un número o expresión algebraica que es factor de todos los términos de la expresión algebraica propuesta.
- **Factor:** cada una de las expresiones o cantidades que se multiplican para formar un producto.
- **Factorización:** proceso de expresar un polinomio como un producto de factores.
- Identidad algebraica: igualdad que se cumple para cualquier valor de las variables involucradas.

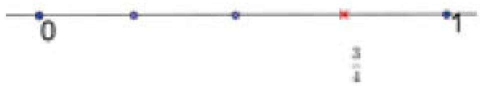
- **Incógnita:** valor o cantidad desconocida que interviene en una ecuación y que sólo se verifica para uno o varios valores determinados.
- **Lenguaje algebraico:** lenguaje cuyos caracteres son símbolos del Álgebra y las reglas gramaticales corresponden a propiedades matemáticas. Resulta muy útil para expresar de forma abreviada enunciados derivados de situaciones cotidianas. La mínima expresión del lenguaje algebraico es el término algebraico.
- **Lugar geométrico:** conjunto de puntos que satisfacen una condición dada, por ejemplo, la circunferencia es el lugar geométrico que forman todos los puntos que equidistan a un punto fijo llamado centro.
- **Magnitud:** es la distancia del cero a cualquier número en una recta numérica y se denomina valor absoluto.
- **Máximo común divisor (MCM):** el mayor divisor común de un grupo de números propuestos.
- **Modelo matemático:** serie de expresiones matemáticas para describir o representar un suceso realizado en un contexto, esto puede ser mediante ecuaciones de diferente orden, sistemas de ecuaciones y matrices entre otros.
- **Notación matemática:** lenguaje simbólico formal que sigue convenciones propias mediante símbolos que permiten representar conceptos, operaciones y todo tipo de entidades matemáticas.
- **Numeral:** símbolo con el que se representa a un número
- **Número:** cantidad de elementos que tiene un conjunto
- **Número complejo:** número formado por la suma de un número real y un imaginario.
- **Numero imaginario:** raíz cuadrada de un número negativo.
- **Número irracional:** número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros.
- **Números naturales:** forman un conjunto bien ordenado: dado un número natural, siempre es posible saber cuál es su antecesor y cuál su sucesor
- **Números racionales:** número real que puede expresarse como el cociente de números enteros.
- **Números reales:** conjunto de números que comprende los números racionales y los irracionales.
- **Parámetro:** magnitud que una vez asignado su valor no lo cambiará dentro del mismo contexto, podrá cambiarlo si el contexto varía. Conceptualmente, los parámetros ocupan el lugar intermedio entre variables y constantes.
- **Perímetro:** suma de la longitud de los lados de una figura cerrada.
- Potenciación: es la elevación de una cantidad o una expresión a una potencia.
- **Producto notable:** producto que se rigen por reglas fijas y cuyo resultado puede hallarse por simple inspección.
- **Radicación:** es la operación de extraer la raíz de una cantidad o de una expresión.
- **Raíz de una ecuación:** valor o valores de la incógnita que satisface la ecuación.
- **Sistema de ecuaciones:** conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas.

- **Solución para un sistema de ecuaciones:** consiste en proporcionar un valor para cada incógnita, de manera que en ninguna de las ecuaciones del sistema se llegue a una contradicción, es decir, cada una de las ecuaciones del sistema se satisface simultáneamente.
- **Teorema:** proposición lógica susceptible de comprobación. En Matemáticas el Teorema de Pitágoras en uno de los mas conocidos.
- **Término algebraico:** mínima expresión del lenguaje algebraico, compuestos por cuatro partes: signo, coeficiente, base literal y los exponentes de cada letra de la base.
- **Teorema del factor cero:** si dos o más factores dan como resultado cero, entonces al menos uno de ellos tiene el valor de cero.
- **Tiro parabólico:** movimiento curvilíneo cuya trayectoria es una parábola, se describe en movimientos tales como el lanzamiento de un tiro libre en basquetbol, lanzamiento de proyectiles, despeje de una pelota de futbol, etcétera.
- **Trinomio cuadrado perfecto:** resultado de elevar un binomio al cuadrado.
- **Variable:** cantidad que puede tomar distintos valores, pero cuyo valor en una situación dada es a menudo desconocido.

Soluciones del bloque I

Evaluación diagnóstica

1. *Sistema binario y numeración maya (por ejemplo).*
2. *Sistema romano*
3. *Mayas*
4. *Egipcia*
5. *Sistema Decimal*
6. *170.10*
7. *Su perímetro es 42.10 cm y 101.32 cm²*
8. *Números tachados:* ~~3~~, 9,18, ~~19~~, 25, 39.
9. *Forma decimal 0.75 Forma gráfica:*



10. *La respuesta de Pedro es la correcta, porque la prioridad de operaciones indica efectuar primero las multiplicaciones y por último, las sumas y las restas.*

Actividad 1

1. *Un mismo símbolo tiene distinto valor según la posición que ocupe.*
2. *10 (diez)*
3. *5000 + 500 + 50 + 5*
4. $3x10^5 + 4x10^4 + 5x10^3 + 6x10^2 + 6x10^1 + 6x10^0 + 4x10^{-1} + 3x10^{-2} + 2x10^{-3}$

5. a) $3x10^2 + 2x10^1 + 7x10^0 + 4x10^{-1} + 5x10^{-2}$
   b) $6x10^2 + 7x10^1 + 8x10^0 + 1x10^{-1} + 2x10^{-2} + 0x10^{-3}$

Actividad 2

1.

+	−1	2	−3	4	−5
5	+4	+7	+2	+9	0
−8	-9	-6	-11	-4	-13
4	+3	6	+1	+8	-1
−11	-12	-9	-14	-7	-16
6	+5	8	3	10	1
−9	-10	-7	-12	-5	-14
−12	-13	-10	-15	-8	-17

2.

−	−1	2	−3	4	−5
7	8	+5	10	3	12
−12	-11	-14	-9	-16	-7
4	+5	2	+7	0	9
−9	-8	-11	−6	-13	-4
−14	-13	-16	-11	-18	-9
2	3	0	5	-2	7
−1	0	-3	+2	-5	4

3.

×	−1	2	−3	4	−5
5	−5	10	-15	20	-25
−8	8	-16	+24	-32	40
4	-4	8	-12	16	-20
−11	+11	-22	+33	-44	55
6	-6	12	-18	24	-30

4.

÷	−1	2	−7	8	−9
5	−5	2.5	-5/7	5/8	-5/9
−8	+8	-4	+8/7	-1	8/9
4	-4	2	-4/7	1/2	-4/9
−11	+11	-5.5	+11/7	-11/8	11/9
6	-6	3	-6/7	6/8	-2/3
−9	+9	-4.5	9/7	-9/8	+1
−12	+12	-6	+12/7	-3/2	+4/3

5. a) m.c.m. 360 m.c.d. 2
   b) m.c.m. 70 m.c.d. 1
   c) m.c.m. 300 m.c.d. 1
   d) m.c.m. 3192 m.c.d. 2
   e) m.c.m. 840 m.c.d. 2
   f) m.c.m. 336 m.c.d. 8

Actividad 3

2. *a) p b) p c) i d) i e) a f) p g) a h) i i) a j) p*

3. *Las respuestas a las preguntas son:*

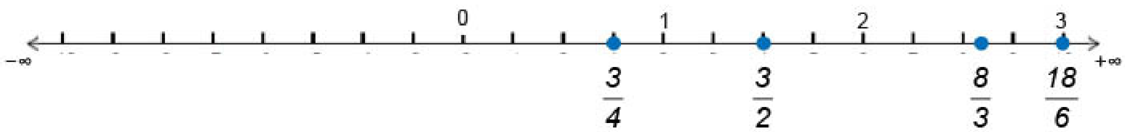
a) Por ejemplo: $5 = \dfrac{10}{2}$

b) Por ejemplo: $8/4 = \dfrac{8}{4}$

4. *La frase completa queda así:*

Al analizar las fracciones comunes se puede observar que el denominador nos indica en, <u>cuantas partes se ha dividido la unidad</u>, y el numerador nos indica <u>cuantas partes se toman de la unidad</u>.

5. *Posición en la recta numérica de las fracciones comúnes:*



6.

a) El periodo se puede expresar escribiendo un arco encima de las cifras repetidas ejemplo:

$$\frac{2}{3} = 0.\overset{\frown}{6};\quad \frac{12}{11} = 1.\overset{\frown}{09}$$

b) Dado un número periódico en su representación decimal, es posible encontrar la fracción que lo produce (fracción generatriz). Ejemplo:

$$x = 0.333333...$$
$$10x = 3.333333... \quad \text{(multiplicando por 10 ambos miembros)}$$
$$9x = 3 \quad \text{(restando segunda fila menos priemra fila)}$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{(simplificando)}$$

Otro ejemplo:

$$x = 2.85636363...$$
$$100x = 285.63636363... \quad \text{(multiplicando por 10 ambos miembros)}$$
$$99x = 282.78 \quad \text{(restando segunda fila menos primera fila)}$$

$$x = \frac{282.78}{99} = \frac{28278}{9900} = \frac{1571}{550} \quad \text{(simplificando)}$$

7. $250 - (0.30)(250) = 250 - 75 = 175$

8. a) $\frac{8}{112} = \frac{1}{14}$

   b) $\frac{1}{20}$

   c) $\frac{3}{4}$

9. $\frac{36}{100}\% = \frac{x}{30}\%$; $x = 11$ goles

Actividad 4

Respuestas (1):

1. Asociativa
2. Conmutativa
3. Distributiva
4. Distributiva
5. Conmutativa
6. Distributiva
7. Conmutativa
8. Asociativa
9. Distributiva
10. Distributiva

Respuestas (2):

1. (V)
2. (V)
3. (V)
4. (V)
5. (V)

Respuestas (3):

1. $+3x$
2. $-\frac{3}{4}ab$
3. $-\frac{m+n}{p-r}$
4. $-\left(\frac{3}{4}m+\frac{2}{5}n\right)$
5. $-\left(mx^2+nz+b\right)$

Respuestas (4):

1. (F) $\left(-\frac{m}{n}\right)\left(-\frac{n}{m}\right)=+1$
2. (F) $\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=1$
3. (V)

Respuestas (5):

1. $-\frac{1}{2ab}$
2. $\frac{3y}{4x}$
3. $\frac{3-m}{m+n}$

Actividad 5

1. a) 18
   b) 26.01
   c) 29.16666

2. 8.629091

3. a) $<$
   b) $\geq$
   c) $=$
   d) $=$

Actividad 6

a) Es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

b) La aritmética expresa las cantidades con números que son valores constantes y el álgebra trabaja con letras que pueden tomar cualquier valor. Y se considera como la matemática generalizada.

c) x

d) Un producto

e) Esta expresión se usa para calcular el área de un triangulo.

f) $y = x + 5$

g) Tipo de música = M ¿por qué? Varía de acuerdo a los gustos musicales de los estudiantes.

h) El cero es real porque pertenece al conjunto de los números enteros y los enteros pertenecen al conjunto de los números reales.

i) Es una expresión algebraica que relaciona variables para realizar diferentes tipos de cálculos.

j) $A = \dfrac{(B+b)h}{2} = \dfrac{(10+5)2}{2} = 15\ cm^2$

k) $A_{pasto} = x \cdot y - a \cdot b$

l) $P = \left(9.81\dfrac{m}{s^2}\right)\left(1000\dfrac{kg}{m^3}\right)(3m) = 29430\dfrac{kg}{ms^2}$

m) $F = 20000\left(1+\dfrac{7}{100}\right)^2 = 22898$

n) $P = 50x$

o) $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{300\ km}{2\ hr} = 150\dfrac{km}{hr}$

Soluciones del bloque II

Evaluación diagnóstica

1. $\frac{1}{8}$

2. Son múltiplos de 7.

3. El área del cuadrado es de 25 cm^2 y el área del triángulo es de 16 cm^2. Conclusión el cuadrado tiene más superficie.

4. Gastos = $\frac{6000}{2}$ = \$3000.00

   Transporte = $\frac{6000}{4}$ = \$1500.00

   Ahorro = \$6000 − (gastos + transporte) = \$1500.00

5. Los alumnos que no prefieren la música para estudiar son:

$$x = \frac{(850)(30)}{100} = 255 \text{ alumnos}$$

6. El M.C.D. (30,36,40) = 2 minutos

7. La solución es: $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$

8. 441

9. $\frac{500}{100\%} = \frac{510}{102\%}$. Se incrementó en un 2%.

Actividad 1

1. a) $\frac{23}{5}$ b) $\frac{39}{5}$ c) $\frac{37}{7}$ d) $\frac{35}{4}$

2. a) $4\frac{4}{5}$ b) $5\frac{1}{4}$ c) $3\frac{2}{7}$ d) $6\frac{3}{6}$

3. a) $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\frac{12}{18}$ b) $\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=\frac{16}{20}=\frac{20}{25}=\frac{24}{30}$ c) $\frac{10}{4}=\frac{15}{6}=\frac{20}{8}=\frac{25}{10}=\frac{30}{12}$

d) $\frac{10}{8}=\frac{15}{12}=\frac{20}{16}=\frac{25}{20}=\frac{30}{24}$ e) $\frac{14}{12}=\frac{21}{18}=\frac{28}{24}=\frac{35}{30}=\frac{42}{36}$

4. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{9}{5}$ e) $\frac{9}{2}$

5. a) 0.6 b) $3.\overline{3}$ c) $0.91\overline{6}$ d) 0.8

6. a) $\frac{42}{100}=\frac{21}{50}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{33}{125}$ d) $\frac{9}{11}$

Actividad 2

1. $\frac{247}{120}=2\frac{7}{120}$ 2. $-\frac{3}{5}$ 3. $\frac{11}{18}$
4. La solución para obtener el perímetro es la siguiente: $2\left(4\frac{3}{10}+9\frac{2}{3}\right)=\frac{416}{15}=27\frac{11}{15}$
5. $11\frac{7}{8}$ km

Actividad 3

I. 1. $\frac{5}{4}$ 2. $\frac{10}{3}$ 3. $\frac{}{15}$ 4. $\frac{3}{5}$ 5. Aprobaron 16 alumnos.

6. El área del rectángulo se calcula de la siguiente forma: $\left(4\frac{3}{10}\right)\left(9\frac{2}{3}\right)=\frac{1247}{30}=41\frac{17}{30}$

II. 7. $\frac{32}{45}$ 8. 2 9. $\frac{4}{15}$

10. La solución es: $60\div\frac{3}{5}=100$ botellas

11. La solución es: $60+\frac{2}{5}(60)=84$

12. Gastos mensuales = $(12000)\frac{4}{5}=9600$

$Ahorro\ mensual = 12000 - 9600 = 2400$

$Ahorro\ anual = 2400 \times 12 = 28800$

Actividad 4

1. $2x10^{1} + 7x10^{0} + 4x10^{-1} + 3x10^{-2}$
2. $\frac{844}{99}$
3. Todos menos π
4. Pertenece al conjunto de los $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$
5. a) <
   b) =
   c) =

Actividad 5

1. a) x = 24 b) x = 24 c) x = 1.2 d) x = 45
2. 7200
3. 1000
4. La solución es la siguiente: $\frac{7}{4} = \frac{x}{3};\ x = 5.25\ m$
5. La solución es la siguiente: $\frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ Por cada 10 hombres hay 3 mujeres.
6. La solución es: $\frac{6}{9} = \frac{42}{x}; x = 63$ billetes de 50

   Total en caja registradora = 7350
7. La solución es: $\frac{275}{100} = \frac{x}{35};\ x = 96.25\ g$
8. 16.67 horas
9. 14 horas

10. 450 − 0.25(450)= $337.5

Actividad 6

1. *La solución es:* $\frac{3}{10}=\frac{20}{x}$; $x = \$66.66$

2. *4.33 días*

3.

y	*6.25*	*75*	*39.0625*	*50*	*15.625*
x	*8*	*96*	*50*	*64*	*20*
k	*0.78125*	*0.78125*	*0.78125*	*0.78125*	*0.78125*

El modelo de variación es y =0.78125x; en cada columna se va calculando el dato que falta que puede ser x o y.

4. *Es un problema de variación directa: "a mayor cantidad de litros de gasolina, será mayor la distancia recorrida. El modelo es y = kx:*

$$k=\frac{y}{x}=\frac{6l}{54km}=0.1111111\frac{l}{km}$$

Con 20 litros de gasolina recorrerá 180 km.

5. *El modelo es y = kx, por lo tanto la alberca se llenará en 4 horas*

6. *El modelo es y = kx, por cada 20 kg. Se necesita un perro, luego entonces para 300 kg. Se necesitan 15 perros.*

7. *El modelo es y = kx, de regreso debe viajar a una velocidad de 75 km/hr.*

Soluciones del bloque III

Para iniciar, reflexiona

Para encontrar cuantos troncos se colocaran en el primer nivel de la pirámide o primera cama, la operación que se realiza es:

$$\frac{4\ m}{0.40\ m}=10\ troncos$$

Se pueden colocar 10 troncos en el primer nivel, 9 troncos en el segundo nivel y 7 troncos en el cuarto nivel. La pirámide tendrá 10 niveles.

Evaluación diagnóstica

1. 55
2. 1
3. 48
4. La solución es: $b = \frac{3S}{5} - a = 6$
5. 3
6. 7
7. 48, 51, 54, 57, 60
8. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
9. 405
10. 4

Actividad 1

a) $a_2 = 5a_1 + 1 = 41$ $\quad a_3 = 5a_2 + 1 = 206$ $\quad a_4 = 5a_3 + 1 = 1031$ $\quad a_5 = 5a_4 + 1 = 5156$

b) La diferencia entre sucesor y antecesor debe ser constante:

$$10 - 6 = 4 \qquad 18 - 10 = 8 \qquad 34 - 18 = 16$$

Conclusión: no es una sucesión aritmética, porque las diferencias no son constantes.

c) El problema solicita hallar el término 5 y 6.

Término 5: $a_n = a_1 + (n-1)d = 1001 + (5-1)(-101) = 597$

Término 6: $a_n = a_1 + (n-1)d = 1001 + (6-1)(-101) = 496$

d) El problema solicita hallar el término 20.

Término 20: $a_{20} = a_1 + (n-1)d = 80 + (20-1)(23) = 517$

e) El problema solicita hallar el pago 15. Para poder calcular el pago 15, se debe conocer la cantidad del primer pago y la diferencia constante entre los pagos.

$$d = \frac{a_j - a_i}{j - i} = \frac{200 - 340}{11 - 7} = -35$$

$$a_1 = a_i - (i-1)d = 340 - (7-1)(-35) = 550$$

$$\text{Pago 15: } a_{15} = a_1 + (n-1)d = 550 + (15-1)(-35) = 60$$

f) *Para poder calcular la suma de los primeros 25 términos de una sucesión, se debe conocer el primer término, la diferencia constante y en este caso el término 25.*

Término 25: $a_{25} = a_1 + (n-1)d = -27 + (25-1)(15) = 333$

Fórmula para calcular la suma:

$$S = \frac{(a_n - a_1 + d)(a_1 + a_n)}{2d} = \frac{(333 + 27 + 15)(-27 + 333)}{2(15)} = 3825$$

Actividad 2

Respuestas (1):

Aplica la expresión	$a_n = a_1 + (n-1)(d)$
$a_1 = 7$ *Diferencia* = 5 $n = 5$	
Sustituye valores	
Término general	$a_n = a_1 + (n-1)(d)$
Calcula el término 80	$a_{80} = 7 + (80-1)(7) = 560$

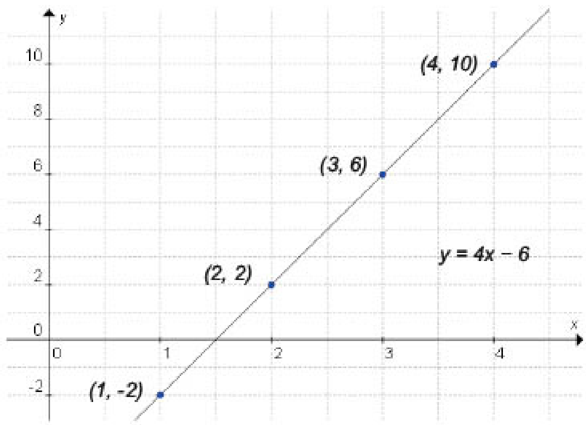
Respuestas (2):

a) *Para calcular la gráfica de la sucesión, se aplica el término general que es:*

$$y = a_1 + (x-1)d$$

De donde se sabe que el primer término es −2 y la diferencia constante es de 4. Sustituyendo valores:

$$y = -2 + (x-1)4 = 4x - 6$$



b) *Para determinar la gráfica, se necesitan los datos de la ecuación:*

$$y = a_1 + (x-1)d$$

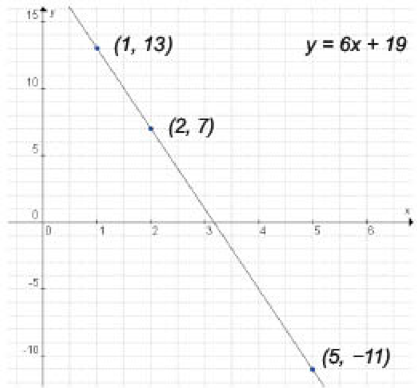
La diferencia $d = \dfrac{a_j - a_i}{j - i} = \dfrac{-11-7}{5-2} = -6$

Primer término $a_1 = a_i - (i-1)d = 7 - (2-1)(-6) = 13$

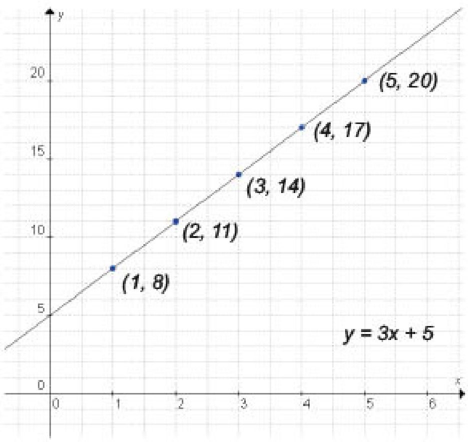
Ecuación para graficar:

$$y = 13 + (x-1)(-6) \Rightarrow y = -6x + 19$$

Gráfica:



c)

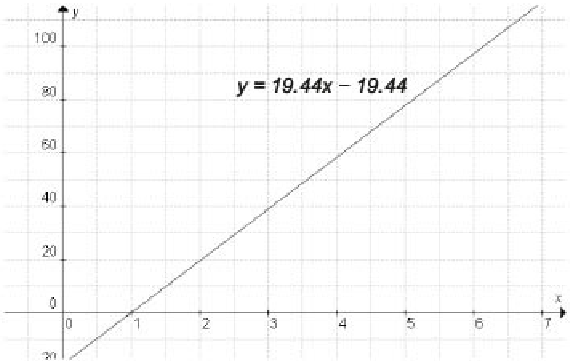


d) *Para determinar la gráfica se debe encontrar el término* a_n *de la fórmula* $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$ *donde* $180 = \dfrac{10}{2}(0 + a_n) \Rightarrow a_n = 175$, *con este valor se debe calcular la diferencia de los números de la sucesión* $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$d = \frac{175}{9} = 19.44$$

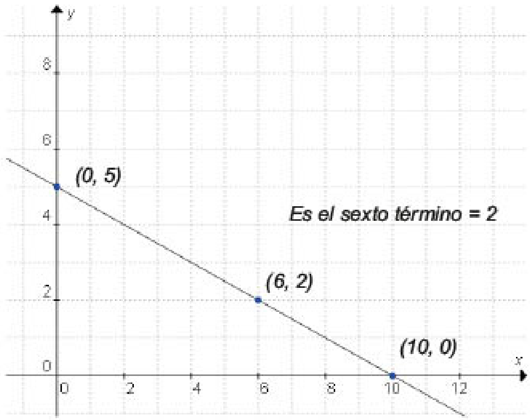
La ecuación es $y = 0 + (x-1)19.44 \Rightarrow y = 19.44x - 19.44$

La gráfica se muestra a continuación.



e) La ecuación para realizar la gráfica es:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$



Actividad 3

a) La serie numérica no es una progresión geométrica .

b) $a_2 = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{-\frac{1}{2}+3}{2} = \frac{5}{4}$; $a_4 = \frac{\frac{5}{4}+3}{2} = \frac{17}{8}$; $a_5 = \frac{\frac{17}{8}+3}{2} = \frac{41}{16}$

c) La serie numérica sí es una progresión geométrica:

La razón geométrica es $r = \frac{-54}{18} = \frac{18}{-6} = \frac{-6}{2} = -3$

Para el 5º término $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2(-3)^{5-1} = 162$

Para la suma se utiliza la fórmula $S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{2(-3^5 - 1)}{-3-1} = 122$

d) $\sum_{i=1}^{5} \frac{3i-1}{2} = \frac{3(1)-1}{2} + \frac{3(2)-1}{2} + \frac{3(3)-1}{2} + \frac{3(4)-1}{2} + \frac{3(5)-1}{2} = 20$

e) La serie numérica sí es una progresión geométrica:

La razón geométrica es $r=\frac{9}{3}=3$

Para el 5º término $a_5=a_1\cdot r^{n-1}=1(3)^{5-1}=81$

Para la suma se utiliza la fórmula $S=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{1(3^5-1)}{3-1}=121$

f) La razón geométrica es: $r=\sqrt[j-i]{\frac{a_j}{a_i}}=\sqrt[5-2]{\frac{\frac{81}{4}}{\frac{3}{4}}}=\sqrt[3]{27}=3$

El primer término es: $a_1=\frac{a_i}{r^{i-1}}=\frac{\frac{3}{4}}{3^{3-1}}=\frac{1}{12}$

La suma es: $S=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{\frac{1}{12}(3^6-1)}{3-1}=\frac{91}{3}$

g) Para calcular el primer término se debe despejar a_1 *de:*

$$S=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}= \qquad a_1=\frac{S(r-1)}{r^n-1}=\frac{\frac{63}{4}(2-1)}{2^6-1}=\frac{1}{4}$$

Para calcular el sexto término: $a_6=a_1\cdot r^{n-1}=\frac{1}{4}(2)^{6-1}=8$

Actividad 4

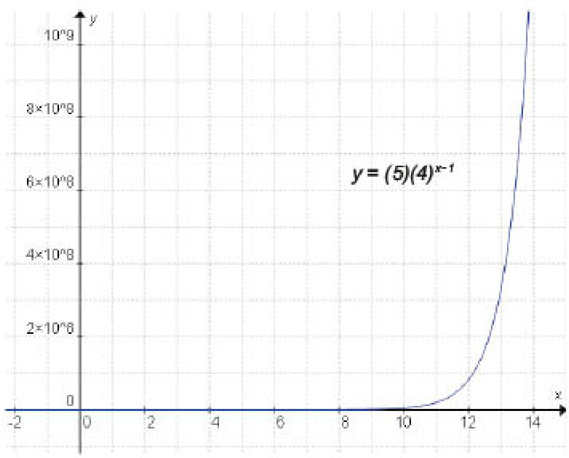
a) La función para graficar es:

$$y=a_1\cdot r^{x-1}$$

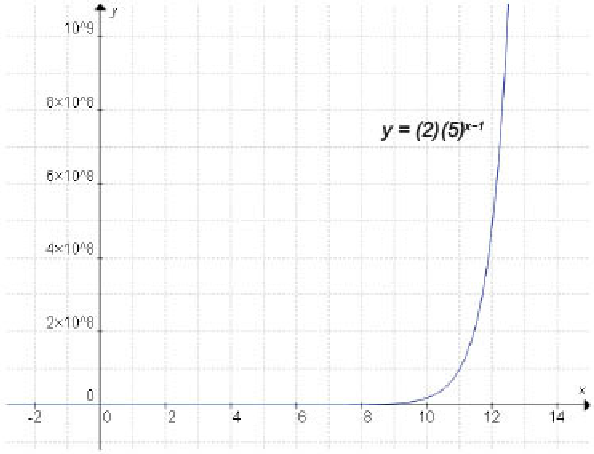
Sustituyendo los valores que se conocen:

$$y=(5)\cdot(4)^{x-1}$$

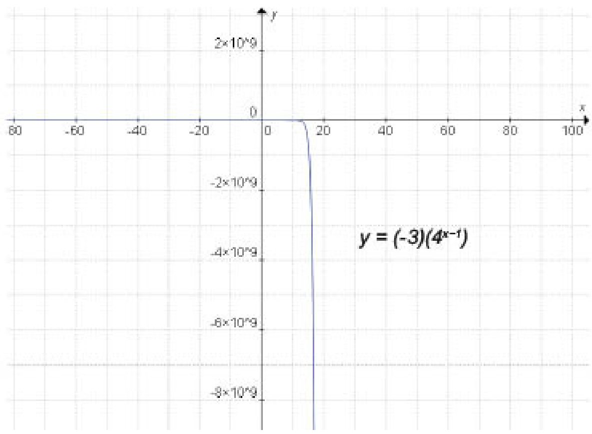
Gráfica:



b) Gráfica:



c)



Soluciones del bloque IV

Para iniciar, reflexiona

1. Ecuación a utilizar: $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

Sustituyendo los datos:

$$t = \sqrt{\frac{(4m)\left(9.8\,\dfrac{m}{s^2}\right)}{2}} = \sqrt{19.6} = 4.427$$

El tiempo que tarda en caer la pelota es de 4.427 seg.

2. *Ecuación a utilizar:* $v_f = gt$

Sustituyendo los datos:

$$v_f = \left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(5s)$$

$$v_f = 49\frac{m}{s}$$

La velocidad con que llega al suelo es de $49\frac{m}{s}$

Evaluación diagnóstica

a) *Multiplicando el largo por el ancho.*

b)

$$A = \left(Q(x) + P(x) + H(x)\right)\left(Q(x) + P(x) + Q(x)\right)$$
$$A = \left(x - 4x + 2x - 8 + x^2 + 2x + 1\right)\left(x - 4x + x + 2x - 8 + x - 4x\right)$$
$$A = \left(x^2 + x - 7\right)\left(-3x - 8\right)$$

La expresión algebraica que representa el área de la casa es $A = 3x^3 - 11x^2 + 13x + 56$

c)

Recámara Azul:

$$A = \left(H(x)\right)\left(F(x)\right)$$
$$A = (x^2 + 2x + 1)\left(x^2 - 1\right)$$
$$A = x^4 - x^2 + 2x^3 - 2x + x^2 - 1$$
$$A = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$$

Recámara morada:

$$A = \left(F(x)\right)\left(P(x)\right)$$
$$A = \left(x^2 - 1\right)\left(2x - 8\right)$$
$$A = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 8$$

Área de la recámara azul:

$$A = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$$

d) Se suman todos los polinomios del contorno de la casa es decir:

$$P=\left(Q(x)+P(x)+Q(x)+Q(x)+P(x)+H(x)+F(x)+F(x)+Q(x)+Q(x)+P(x)+H(x)\right)$$
$$P=\left(5Q(x)\right)+\left(3P(x)\right)+\left(2H(x)+2F(x)\right)$$
$$P=\left(5\left(x-4\right)\right)+\left(3\left(2x-8\right)\right)+\left(2\left(x^2+2x+1\right)\right)+\left(2\left(x^2-1\right)\right)$$
$$P=\left(5x-20\right)+\left(6x-24\right)+\left(2x^2+4x+2\right)+\left(2x^2-2\right)$$
$$P=4x^2+15x-44$$

El perímetro de la casa: $P=4x^2+15x-44$

e) Sumas y multiplicación de polinomios.

Actividad 1

I. Las frases completas son:

a) Una expresión algebraica es una expresión matemática en la que se combinan letras y números.
b) Las letras representan las incógnitas.
c) Una expresión algebraica con tres términos se llama trinomios.
d) Los exponentes de un polinomio deben ser enteros y positivos.

II. La relación de respuestas queda como sigue:

(b) $8y^4z^4$

(   ) $\frac{1}{3}x^3y$

(a) $-4b^3$

(c) $3y^9$

Actividad 2

1.

a) Área de la caja de arena:

$$A=L^2$$
$$A=4^2=16$$

Sustituyendo los datos:

$$A=L^2$$
$$A=x^2$$

Área del Terreno:

$$A = L^2$$
$$A = x^2$$

Área libre = área del terreno − área de la caja de arena:

$$A_{libre} = x^2 - 16$$

b) $4x^2 + 4x^2 + 2x - 4x + 2 + 2 = 8x^2 - 2x + 4$

c)

$$P(x) = 3(4x^2) + 2x + 3(2) + 2(-2)$$
$$P(x) = 12x^2 + 2x + 6 - 4$$
$$P(x) = 12x^2 + 2x + 2$$

$$Q(x) = 2(-4x^2) + 4x + 5(2)$$
$$Q(x) = -8x^2 + 4x + 10$$

$$P(x) + Q(x) = (12x^2 + 2x + 2) + (-8x^2 + 4x + 10)$$
$$P(x) + Q(x) = 12x^2 + 2x + 2 - 8x^2 + 4x + 10$$
$$P(x) + Q(x) = 4x^2 + 6x + 12$$

$$P(x) - Q(x) = (12x^2 + 2x + 2) - (-8x^2 + 4x + 10)$$
$$P(x) - Q(x) = 12x^2 + 2x + 2 + 8x^2 - 4x - 10$$
$$P(x) - Q(x) = 20x^2 - 2x - 8$$

d)

$$H(x) + G(x) + F(x) = \pi\left(\frac{3}{4}r\right)^2 + \pi(r)^2 + \pi(1.5r)^2$$
$$H(x) + G(x) + F(x) = \pi\left(\frac{9}{16}r^2\right) + \pi r^2 + \pi(2.25r^2)$$
$$H(x) + G(x) + F(x) = \pi(0.5625)r^2 + \pi r^2 + \pi(2.25)r^2$$
$$H(x) + G(x) + F(x) = 3.8125\pi r^2$$
$$H(x) + G(x) + F(x) = 11.9773r^2$$

Respuestas (2):

a) $P = 2x + 4x + 5x = 11x$ b) $P = 6(3x) = 18x$

Respuestas (3):

( ) $-3xy$
( ) $2\sqrt{m^3}$
(d) $6xy - 2x^2y$
(a) $-a$
( ) $136x + 153y$
(b) $3xy$
(c) $-2\sqrt{m^3}$
(e) $-136x - 153y$

Actividad 3

a) $A = (2a)^2 = 4a^2$

b) $A = (3x^2y)(4x + y)$
$A = 12x^3y + 3x^2y^2$

c) $A = (2ab^2)\left(\frac{4}{3}ab^2\right)$
$A = \frac{8}{3}a^2b^4$

Actividad 4

1.

a)
$$A = (x+6)(x+6) = (x+6)^2$$
$$A = (x)^2 + 2(x)(6) + (6)^2$$
$$A = x^2 + 12x + 36$$

b)
$$A = (x+6)(x+9)$$
$$A = (x)^2 + (6+9)x + (6)(9)$$
$$A = x^2 + 15x + 54$$

c)
$$A = (x+3)(x-3)$$
$$A = (x)^2 - (3)^2$$
$$A = x^2 - 9$$

2. La arista del cubo es de $\sqrt[3]{64} = 4$, la expresión del nuevo volumen es:

$$V = (x+4)^3$$
$$V = (x)^3 + 3(x)^2(4) + 3(x)(4)^2 + (4)^3$$
$$V = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

El nuevo volumen es: $V = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

3. e) ¿Qué patrón encontraste? Son todos iguales

Actividad 5

Respuestas a las preguntas:

1. Obteniendo su máximo común divisor.

2.

a) Sacamos x factor común, si ello es posible, y tantas veces como se pueda.

b) Si el polinomio P(x) es de grado dos:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Resolvemos la ecuación:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Si esta ecuación no tiene solución, el polinomio P(x) es irreducible, pero si la ecuación anterior tiene soluciones r_1 y r_2 entonces podemos factorizar P(x) de la siguiente manera:

$$P(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

Puede ocurrir que r_1 y r_2 coincidan (sean iguales).

c) Si el polinomio $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$

- es de grado mayor que dos y
- sus coeficientes son enteros,

intentamos encontrar las raíces reales del polinomio P entre los números racionales de la forma a/b donde a es un divisor de a_n y b es un divisor de a_0, utilizando para ello la regla de Ruffini con cada una de estas fracciones y con el polinomio P.

$$P(a) = 0 \quad \text{Si y solo si } x - a \text{ es divisor de } P(x)$$

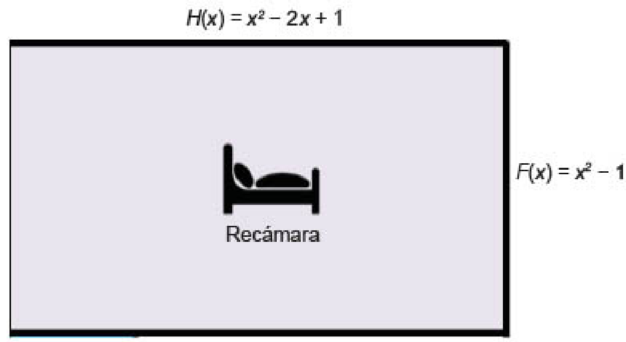
Así, si llegado a un cierto punto en el proceso de factorización hemos encontrado raíces $r_1, r_2, \ldots r_n$ del polinomio P, entonces existe un polinomio Q tal que:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) \cdot Q(x)$$

e intentaríamos descomponer más P factorizando Q.

3. *Cuando se tienen cuatro o más términos se agrupan de tal forma que sus factores en común en cada grupo.*

4. *Los lados de la recámara:*



$$H(x) = x^2 + 2x + 1$$

Factorizando:

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$2(x)(1) = 2x$$

$$H(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$F(x) = x^2 - 1$$

Factorizando:

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$F(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Actividad 6

1. $(11k + 17m)(11k - 17m)$

2. $\left(\frac{12}{11}x^2 + \frac{7}{4}y\right)\left(\frac{12}{11}x^2 - \frac{7}{4}y\right)$

3. $(7v + 5u)(7v - 5u)$

4. $\left(x^6+6y^2x\right)\left(x^6-6y^2x\right)$
5. $\left(sen\ x+\cos x\right)\left(sen\ x-\cos x\right)$

Actividad 7

Las factorizaciones son:

1. $\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$
2. $\left(a+3\right)\left(a^2-3a+9\right)$
3. $\left(4b+2\right)\left(16b^2-8b+4\right)$
4. $\left(a^2-b^4\right)\left(a^2+a^2b^4+b^8\right)$
5. $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$

Actividad 8

1. *Procedimiento:*

a) *Extraer raíz del primer término x así como el tercer término 49.*

b) *Multiplicar dos veces la raíz del primer término y el tercer término:* $2\left(x\right)\left(7\right)=14x$

c) *Como el primer término y el tercer término tienen raíz y el doble producto de sus raíces da como resultado el segundo término se tiene un trinomio cuadrado perfecto*

d) *Se factoriza* $x^2+14x+49=\left(x+7\right)\left(x+7\right)=\left(x+7\right)^2$

2. *Procedimiento:*

a) *Extraer raíz del primer término x así como del tercer término 3y.*

b) *Multiplicar dos veces la raíz del primer término y el tercer término:* $2\left(x\right)\left(3y\right)=6xy$

c) *Como el primer término y el tercer término tienen raíz y el doble producto de sus raíces da como resultado el segundo término se tiene un trinomio cuadrado perfecto*

d) *Se factoriza* $x^2-6yx+9y^2=\left(x-3\right)\left(x-3\right)=\left(x-3\right)^2$

3. *Procedimiento:*

a) *Extraer raíz del primer término 5a y el tercer término 8.*

b) *Multiplicar dos veces la raíz del primer término y el tercer término:* $2(5a)(8)=80a$
c) *Como el primer término y el tercer término tienen raíz y el doble producto de sus raíces da como resultado el segundo término se tiene un trinomio cuadrado perfecto*

d) *Se factoriza:* $25a^2+80a+64=(5a+8)(5a+8)=(5a+8)^2$

4. *Procedimiento:*

a) *Extraer raíz del primer término 4n y el tercer término 5.*

b) *Multiplicar dos veces la raíz del primer término y el tercer término:* $2(4n)(5)=40n$
c) *Como el primer término y el tercer término tienen raíz y el doble producto de sus raíces da como resultado el segundo término se tiene un trinomio cuadrado perfecto*

d) *Se factoriza:* $16n^2+40n+25=(4n+5)(4n+5)=(4n+5)^2$

5. *Solución:* $(7z-1)(7z-1)=(7z-1)^2$

Actividad 9 (Solución de problemas diversos)

A. *Los productos notables quedan de la siguiente forma:*

1.$(x+2y)^2=x^2+4xy+4y^2$ 2.$(4+5x)^2=16+40x+25x^2$

3.$(2x+5)^2=4x\ \ +20x+25$ 4.$(5x-3)^2=25x^2-30x+9$

5.$(x+5)(x+2)=x^2+7x+10$ 6.$(x+8)(x+3)=x^2+11x+24$

7.$4y^2-49x^2=(2y+7x)(2y-7x)$ 8.$(64x^2-49y^2)=(8x+7y)(8x-7y)$

9.$(x-3)^3=x^3-9x^2+27x-27$ 10.$(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$

B.

1. *El trinomio que representa el área es:*

$$A=\left[\frac{5}{2}(x-4)\right]\left[\frac{3}{2}(x-4)\right]=\frac{15}{4}(x-4)^2$$
$$A=\frac{15}{4}\left[x^2-8x+16\right]=\frac{15}{4}x^2-30x+60$$

2. *El volumen de la caja es:*

$$V=(x+2)^3=x^3+3(x^2)(2)+3(x)(2)^2+(2)^3$$
$$V=x^3+6x^2+12x+8$$

3. *El volumen de la caja es:*

$$V=5(x-10)(x-10)=5(x-10)^2$$
$$V=5(x^2-20x+100)$$
$$V=5x^2-100x+500$$

4. *Lado* $(x+8)$ *y lado* $(x-4)$

Área de la figura: $(x+8)(x-4)=x^2+(8-4)x+(8)(-4)=x^2+4x-32$

5. *La expresión algebraica del área de la sala es:*

$$A=(x-0.6)(x-0.8)=(x)^2+(-0.6-0.8)x+(-0.6)(-0.8)$$
$$A=x^2-1.4x+0.48$$

C.

1. $(16r^2+9)^2$
2. $(m+n)(a-b)$
3. $(k-1)(k+3)$
4. $(a+1)(a^2+1)$
5. $(x+4)^2$
6. $(9a+12)(9a-12)$
7. $(13-x)^2$
8. $(16r^2-9)^2$

Soluciones del bloque V

Evaluación diagnóstica

I.

1. $(x+3)(x+5)=(x)^2+(3+5)x+(3)(5)=x^2+8x+15$
2. $(x-4)(x-9)=(x)^2+(-4-9)x+(-4)(-9)=x^2-13x+36$
3. $(x+2)(x-9)=(x)^2+(2-9)x+(2)(-9)=x^2-7x-18$

II.

a) Son trinomios con un término común.
b) Se obtiene el coeficiente del segundo término.
c) Corresponde al tercer término.

III.

a) x^2+5x+6

Se extrae la raíz del primer termino.

Se buscan dos factores que sumados o restados den como resultado el coeficiente del segundo término en este caso son $(3+2)$

Los factores además de que sumados o restados dan el segundo término, multiplicados nos deben dar el tercer término $(3)(2)=6$

Se escriben dos paréntesis en cada paréntesis se escribe la raíz del primer término y después un factor en cada paréntesis con sus respectivos signos y se tiene la expresión factorizada.

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

b) $x^2-13x+36$

Se extrae la raíz del primer termino.

Se buscan dos factores que sumados o restados den como resultado el coeficiente del segundo término en este caso son $(-9-4)$ *ambos negativos ya que el signo del segundo* *término es negativo y el del tercer término positivo.*

Los factores además de que sumados o restados dan el segundo término, multiplicados nos deben dar el tercer término $(-9)(-4)=36$

Se escriben dos paréntesis, en cada paréntesis se escribe la raíz del primer término y después un factor en cada paréntesis con sus respectivos signos y se tiene la expresión factorizada.

$$x^2-13x+36=(x-9)(x-4)$$

Actividad 1

1. *Área de la región naranja = área total − área del cuadrado café*

2.

a) $a^2-3a-10=(a-5)(a+2)$

b) $c^2+7c+12=(c+3)(c+4)$

c) $y^2-22y+120=(y-12)(y-10)$

Actividad 2

a) $3x^2-x+10$

Determinamos los factores del término cuadrático los cuales son y los únicos factores son:

$$(3x)(x)$$

Escribimos todos los factores de la constante c:

$$(2)(5)=10;(-2)(-5)=10;(1)(10)=10;(-1)(-10)=10$$

Enumeramos todas las posibles combinaciones de los factores y realizamos los productos hasta encontrar el término medio correcto es decir bx:

$$(3x-5)(x-2)=3x^2-6x-5x+10=3x^2-11x+10$$
$$(3x-2)(x-5)=3x^2-15x-2x+10=3x^2-17x+10$$
$$(3x-10)(x-1)=3x^2-3x-10x+10=3x^2-13x+10$$
$$(3x-1)(x-10)=3x^2-30x-x+10=3x^2-31x+10$$

Como ninguno de los productos da el término medio la expresión no es factorizable por este método.

b) $5x^2 - 14x - 3$

Determinamos los factores del término cuadrático los cuales son y los únicos factores son:

$$(5x)(x)$$

Escribimos todos los factores de la constante c:

$$(-3)(1) = -3; (3)(-1) = -3; (1)(-3) = -3; (-1)(3) = -3$$

Enumeramos todas las posibles combinaciones de los factores y realizamos los productos hasta encontrar el término medio correcto es decir bx:

$$(5x-1)(x+3) = 5x^2 + 15x - x - 3 = 5x^2 + 14x - 3$$
$$(5x+3)(x-1) = 5x^2 - 5x + 3x - 3 = 5x^2 - 2x - 3$$
$$(5x+1)(x-3) = 5x^2 - 15x + x - 3 = 5x^2 - 14x - 3$$

Los factores del tercer renglón nos proporciona el segundo término y el trinomio factorizado es:

$$5x^2 - 14x - 3 = (5x+1)(x-3)$$

c) $2x^2 + 5x - 3$

Determinamos los factores del término cuadrático los cuales son y los únicos factores son

$$(2x)(x)$$

Escribimos todos los factores de la constante c:

$$(-3)(1) = -3; (3)(-1) = -3; (1)(-3) = -3; (-1)(3) = -3$$

Enumeramos todas las posibles combinaciones de los factores y realizamos los productos hasta encontrar el término medio correcto es decir bx:

$$(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$$

Este factor nos proporciona el segundo término.

La expresión factorizada es:

$$2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$$

Actividad 3

1. Sustituimos las expresiones de distancia y tiempo en la ecuación de velocidad:

$$v = \frac{s^2 - 7s + 10}{s - 5}$$

Factorizamos el numerador y simplificamos:

$$v = \frac{s^2 - 7s + 10}{s - 5} = \frac{(s-5)(s-2)}{s-5} = s - 2$$

La velocidad del auto es $v = s - 2$

2. Sustituimos las expresiones de volumen y tiempo en la ecuación del gasto:

$$Gasto = \frac{volumen}{tiempo}$$

$$G = \frac{3x^4 + 7x^3 + 2x^2}{x^3 + 7x^2 + 10x}$$

Factorizando numerador además del denominador y simplificando:

$$G = \frac{3x^4 + 7x^3 + 2x^2}{x^3 + 7x^2 + 10x} = \frac{x^2\left(3x^2 + 7x + 2\right)}{x\left(x^2 + 7x + 10\right)} = \frac{x^2\left[(3x+1)(x+2)\right]}{x\left[(x+2)(x+5)\right]} = \frac{x(3x+1)}{x+5}$$

El gasto de agua es $G = \dfrac{x(3x+1)}{x+5}$

3. El tiempo se calcula $tiempo = \dfrac{dis\,tan\,cia}{velocidad}$

Sustituimos las expresiones de distancia y velocidad en la ecuación:

$$t = \frac{\left(2s^2 - 16s + 24\right)}{(2s - 12)}$$

Factorizando y simplificando:

$$t = \frac{\left(2s^2 - 16s + 24\right)}{(2s - 12)} = \frac{2\left(s^2 - 8s + 12\right)}{2(s-6)} = \frac{2\left[(s-6)(s-2)\right]}{2(s-6)} = s - 2$$

El tiempo del recorrido es $t = s - 2$

Actividad 4

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$

$=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}$

$=\dfrac{x-3}{x}$

2. $\dfrac{2a+3b}{3a-2b}-\dfrac{3a+2b}{3a-2b}$

$=\dfrac{2a+3b-3a-2b}{3a-2b}$

$=\dfrac{-a+b}{3a-2b}$

3. $\dfrac{4}{m^2-1}+\dfrac{2}{m-1}+\dfrac{m}{m+1}$

$=\dfrac{4}{(m+1)(m-1)}+\dfrac{2}{(m-1)}+\dfrac{m}{(m+1)}$

$=\dfrac{4+2(m+1)+m(m-1)}{(m+1)(m-1)}$

$=\dfrac{4+2m+2+m^2-m}{(m+1)(m-1)}=\dfrac{m^2+m+6}{(m+1)(m-1)}$

4. $\dfrac{z^2-10z+16}{z^2-9z+14}\cdot\dfrac{z^2-10z+21}{z^2+2z-15}$

$=\dfrac{(z-8)(z-2)}{(z-2)(z-7)}\cdot\dfrac{(z-3)(z-7)}{(z-3)(z+5)}$

$=\dfrac{(z-8)\cancel{(z-2)}\cancel{(z-3)}\cancel{(z-7)}}{\cancel{(z-2)}\cancel{(z-7)}\cancel{(z-3)}(z+5)}$

$=\dfrac{z-8}{z+5}$

5. $\dfrac{x^3-x}{x+1}\div\dfrac{x-1}{x+1}$

$=\dfrac{x\left(x^2-1\right)}{x+1}\div\dfrac{x-1}{x+1}$

$=\dfrac{x(x+1)(x-1)}{x+1}\div\dfrac{x-1}{x+1}$

$=\dfrac{x(x+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=x(x+1)$

6. $\dfrac{x^3+3x^2-10x}{x^3-4x^2+4x}$

$=\dfrac{x\left(x^2+3x-10\right)}{x\left(x^2-4x+4\right)}$

$=\dfrac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x-2)}$

$=\dfrac{x+5}{x-2}$

Actividad 5

1. *Recordar que el área del rectángulo se puede expresar como:*

$$Area=(largo)(ancho)$$

Entonces el ancho es: $\text{ancho} = \dfrac{\text{área}}{\text{largo}}$

Sustituyendo las expresiones algebraicas del área y el ancho se obtiene:

$$\text{ancho} = \frac{12x^2 - 16x - 16}{4x - 8}$$
$$\text{ancho} = \left(\frac{4(3x^2 - 4x - 4)}{4(x-2)}\right)$$
$$\text{ancho} = \frac{(3x^2 - 4x - 4)}{x - 2}$$

2.

Perímetro:

$$P = 2\left(\frac{a-b}{a}\right) + 2\left(\frac{a+b}{a}\right)$$
$$P = \frac{2[(a-b)+(a+b)]}{a}$$
$$P = \frac{2(a-b+a+b)}{a}$$
$$P = \frac{2(2a)}{a} = 4$$

Área:

$$A = \left(\frac{a-b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{a}\right)$$
$$A = \frac{[(a-b)(a+b)]}{a^2}$$
$$A = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}$$

Perímetro:

$$P = 2\left(\frac{x+2y}{y}\right) + 2\left(\frac{-x+2y}{y}\right)$$
$$P = \frac{2x + 4y - 2x + 4y}{y}$$
$$P = \frac{8y}{y} = 8$$

Área:

$$A = \left(\frac{x+2y}{y}\right)\left(\frac{-x+2y}{y}\right)$$
$$A = \frac{-2x + 2xy - 2xy + 4y^2}{y^2}$$
$$A = \frac{-2x + 4y^2}{y^2}$$

3.

$$V_1 = (x+2)(x+1)x$$
$$V_2 = 4x(6x+12)(8x+8) = (4x)(6)(x+2)(8)(x+1)$$
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(192x)(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)x}$$
$$\frac{V_2}{V_1} = 192$$

Actividad 6

1.

- *El coeficiente del primer término es 1.*
- *La variable del segundo término es la misma que la del primer término pero con exponente igual a la unidad.*
- *El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo términos del trinomio.*

2.

Para factorizar $x^2 - x - \frac{3}{4}$ *se deben buscar dos números que multiplicados den* $-\frac{3}{4}$ *y sumados den -1*

Factores	*Multiplicados*	*Sumados*
$-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=1$
$\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{2}{2}=-1$

El segundo renglón cumple con las dos condiciones entonces para factorizar la expresión se acomodan en los factores el término igual, que en este caso es x, y los números encontrados, como se muestra a continuación:

La factorización resultante es:

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

3.

- *El coeficiente del primer término es diferente de 1.*
- *La variable del segundo término es la misma que la del primer término pero con exponente igual a la unidad.*
- *El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo términos del trinomio.*

4. *Un ejemplo del trinomio es* $15x^2+7x-2$

Factorización:

a) *Los únicos factores de 15 son 1, 3 y 5, por tanto escribimos* $(3x\quad)(5x\quad)$.
b) *El número 2 tiene factores positivos y negativos los cuales son (-1)(2) y (1)(-2).*
c) *Enumeramos los factores posibles. Buscamos el factor que proporcione el término medio*

Factor posible	*Suma de los productos de los términos internos externos*
$(3x-1)(5x+2)$	$(3x)(2)+(-1)(5x)=6x-5x=x$
$(3x+1)(5x-2)$	$(3x)(-2)+(1)(5x)=-6x+5x=-x$
$(3x+2)(5x-1)$	$(3x)(-1)+(2)(5x)=-3x+10x=7x$
$(3x-2)(5x+1)$	$(3x)(1)+(-2)(5x)=3x-10x=-7x$

Los factores del tercer renglón proporciona el segundo término por lo que el trinomio propuesto queda factorizado de la siguiente manera:

$$(3x+2)(5x-1)$$

5.

El polinomio es:

$$P(x)=x^3-6x^2+13x-10$$

Se multiplica el cociente por el divisor y se suma el residuo y como resultado nos da el dividendo:

$$P(x)=(x^2-3x+4)(x-3)+2$$
$$P(x)=x^3-3x^2-3x^2+9x+4x-12+2$$
$$P(x)=x^3-6x^2+13x-10$$

6.

- *Si el polinomio no es completo, se le completa añadiendo los términos que faltan con ceros.*
- *Colocando los coeficiente del dividendo en una línea.*
- *Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor.*
- *Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.*
- *Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.*
- *Sumamos los dos coeficientes.*
- *Repetimos el proceso anterior.*

- *El último número obtenido es el resto.*
- *El coeficiente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.*

7.

$$\begin{array}{cccc} 5 & 1 & 3 & -4 \\ & & + & + \\ \times & & =5 & =40 \\ & 1 & 8 & 36 \end{array} \longrightarrow \text{residuo}$$

La respuesta es: $x + 8 + \dfrac{36}{x-5}$

Soluciones del bloque VI

Para iniciar, reflexiona

1. *Las operaciones quedan completas de la siguiente forma:*

$$75 + 25 = 100 \qquad \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad 2.5 \cdot (6) = 15$$

2. $10(x) - 4(12) = 52$ *entonces:*

$$10(10) - 48 = 52$$
$$100 - 48 = 52$$

3. *Una toronja es equivalente a dos manzanas y un melón igual a dos toronjas, por lo tanto un melón es igual a una toronja y dos manzanas. La respuesta es c).*

Evaluación diagnóstica

1. *12, 20, 17, 25, 22, 30, 27.*

2. *El cuadrado mágico completo es:*

$2a - 3b$	$0a - 0b$	$18a - 15b$
$12a - 18b$	$4a - 6b$	$-4a + 6b$
$-2a + 3b$	$8a - 12b$	$6a - 9b$

3.

a)

$$2(-4ab+5b^2-1)-(11ab-7a^2+10)$$
$$=-8ab+10b^2-2-11ab+7a^2-10$$
$$=-19ab+10b^2+7a^2-12$$

b)

$$(-4ab+5b^2-1)(-7a+5b^2)-(11ab-7a^2+10)(-7a+5b^2)$$
$$=28a^2b-20ab^3-35ab^2+25b^4+7a-5b^2+77a^2b-55ab^3-49a^3+35a^2b^2+70a-50b^2$$
$$=105a^2b-75ab^3-35ab^2+25b^4+77a-55b^2-49a^3+35a^2b^2$$

c)

$$(11ab-7a^2+10+4ab-5b^2+1)((-7a+5b^2)$$
$$=(15ab-7a^2-5b^2+11)(-7a+5b^2)$$
$$=-105a^2b+75ab^3+49a^3-35a^2b^2+35ab^2-25b^4-77a-55b^2$$

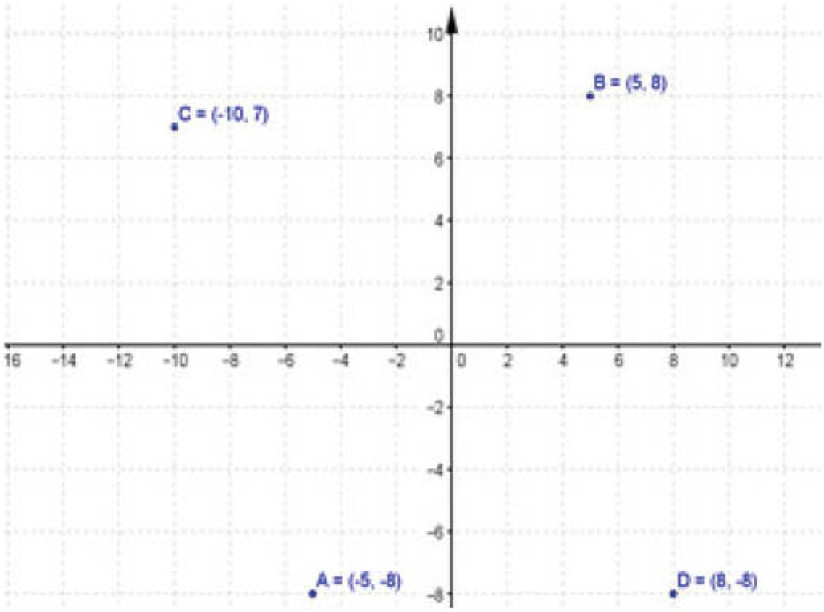
4. La tabla queda completa de la siguiente forma:

Descripción	Lenguaje algebraico
El doble de la suma de los cuadrados de dos números.	$2(x^2+y^2)$
La tercera parte del cuadrado de la diferencia de dos números.	$\frac{(x-y)^2}{3}$
La edad de Enrique es cuatro veces la de su primo aumentada cinco años.	$e=4(p+5)$
El peso de Julio es cinco kilogramos más que cuatro veces el peso de su hijo.	$j=5+4h$
La cuarta parte de la suma del cuadrado de dos números.	$\frac{x^2+y^2}{4}$

5.

$$P=2(3a+5)+2(2x-1)=6a+10+4x-2=6a+4x+8$$
$$A=(3a+5)(2x-1)=6ax+10x-3a-5$$

6.



Actividad 1

1. *Los grados y nombres son:*

Situación	*Ecuación*	*Grado*	*Nombre*
El volumen de un prisma rectangular	$x^3 + 2x = 9$	*Tres*	*Cúbica con una incógnita*
El costo de un producto	$y = 3000 + 20x$	*Uno*	*Lineal con dos incógnitas*
La cantidad total de alimento del tres tipos distintos	$x + 9y - 9z = 80$	*Uno*	*Lineal con tres incógnitas*
El área de un terreno cuadrangular	$x^2 = 36$	*Dos*	*Cuadrática de una incógnita*
El costo de la electricidad por x kilowatts consumidos	$C = 0.7x + 10.5$	*Uno*	*Lineal de una incógnita*

2. *Respuestas a los paréntesis:*

(b) $3c + 9 = 105$
(c) $7c = 5320$
(a) $2c + 8 = 30$

3. b) $3x - 18 = 9$

Actividad 2

1.

(c) $x = -5$

(   ) $x = 3$

(d) $x = \frac{13}{2}$

(e) $x = -8$

(   ) $x = 6$

(a) $x = \frac{32}{13}$

(b) $x = \frac{18}{23}$

2.

a)

$$j = c + 8$$
$$c + c + 8 = 30$$
$$2c + 8 = 30$$
$$2c = 30 - 8 = 22$$
$$c = 11$$

$$j = c + 8 = 11 + 8 = 19$$

Jorge 19 ton y Carlos 11.

b)

La edad de Jorge J, de Luis L y de Carlos C, así se tiene que:

$$j + 1 + j + j - 4 = 105$$
$$3j - 3 = 105$$
$$3j = 105 + 3 = 108$$
$$j = 108 / 3 = 36$$

Por lo tanto Jorge tiene 36, Luis 37 y Carlos 32.

c)

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=1330$$
$$\frac{4x+2x+x}{4}=1330$$
$$7x=5320$$
$$x=5320/7=760$$

El primer día $760, segundo $380 y el tercero $190.

d)

x sueldo de su amigo entonces se tiene:

$$x+120+x=4380$$
$$2x=4380-120=4260$$
$$x=2130$$

El amigo $2130 y él $2250.

e)

x los kilogramos del bulto:

$$\frac{3}{4}x-15=45$$
$$\frac{3}{4}x=45+15$$
$$x=\frac{4(60)}{3}=\frac{4(2)(\cancel{3}0)}{\cancel{3}}$$
$$x=80\ kg$$

Por lo tanto el bulto tiene 80 kilogramos.

Actividad 3

1.

Horas extras trabajadas al día: x	0	1	2	3	4	5	6	7
Pago por día: y y = 80 + 20x	80	100	120	140	160	180	200	220

a) 6 horas
b) 7 horas
c) 4 horas

2.

a) 2000x + 2500 = 10000 entonces despejando 2000x = 7500

x = 7500/2000 = 3.75 le restan por sembrar 3.75 hectáreas con un total de 7500 árboles

b)
$$x = \frac{9750 - 3800}{1950} = 3.01$$
$$1950(3) = 5850$$

3.

a) \$7000

b) $m = \frac{7000 - 0}{0 - 14} = -500 \quad -\$500$

c)
$$y = -500(x - 0) + 7000$$
$$y = -500x + 7000$$

d) y = \$4000

e) x = 10

Reflexionemos sobre la actividad ¿De qué te das cuenta?

Una posible respuesta a las dos preguntas planteadas puede ser:

- *Se dice que el objetivo de aumentar mensualmente el precio de la gasolina es reducir los subsidios otorgados y mantener como una empresa "fuerte" a PEMEX.*
- *Sí hay relación entre este tipo de situaciones de incremento y las ecuaciones lineales, en su gráfico se observa de mejor manera la relación proporcional que guardan entre sí.*

Soluciones del bloque VII

Para iniciar, reflexiona

Sustitución y resultados:

x	*y*	*5x + 7y*	*7x + 6y*
4	5.5	$5(4) + 7(5.5) = 58.5$	$7(4) + 6(5.5) = 61$
5	6.5	$5(5) + 7(6.5) = 70.5$	$7(5) + 6(6.5) = 74$
6	7.5	$5(6) + 7(7.5) = 82.5$	$7(6) + 6(7.5) = 87$
7	8.5	$5(7) + 7(8.5) = 94.5$	$7(7) + 6(8.5) = 100$
5	6.0	$5(5) + 7(6) = 67$	$7(5) + 6(6) = 71$
6	8.5	$5(6) + 7(8.5) = 89.5$	$7(6) + 6(8.5) = 93$
7	9.9	$5(7) + 7(9.9) = 104.3$	$7(7) + 6(9.9) = 108.4$
6	8.0	$5(6) + 7(8) = 86$	$7(6) + 6(8) = 90$

Los valores de "x" y de "y" que sustituidos en 5x + 7y dan como resultado 89.5 son:

$$x = 6 \qquad y = 8.5$$

Los valores de "x" y de "y" que sustituidos en 7x + 6y dan como resultado 93 son:

$$x = 6 \qquad y = 8.5$$

Los valores 6 y 8.5 representan el costo del pasaje pagado por Iván.

Evaluación diagnóstica

1.

a) La variable independiente es el consumo de Watts y la variable dependiente es el pago del recibo de la luz.

b) La variable independiente es el número de combis y la variable dependiente es el pago total del transporte.

c) La variable independiente es el número de litros diarios de leche y la variable dependiente es la producción total de leche por semana.

2. Solución:

$$24x + 40 = 1000$$

$$x = \frac{1000 - 40}{24} = 40 \text{ refrescos}$$

a) *Costo variable dependiente y número de refrescos variable independiente.*

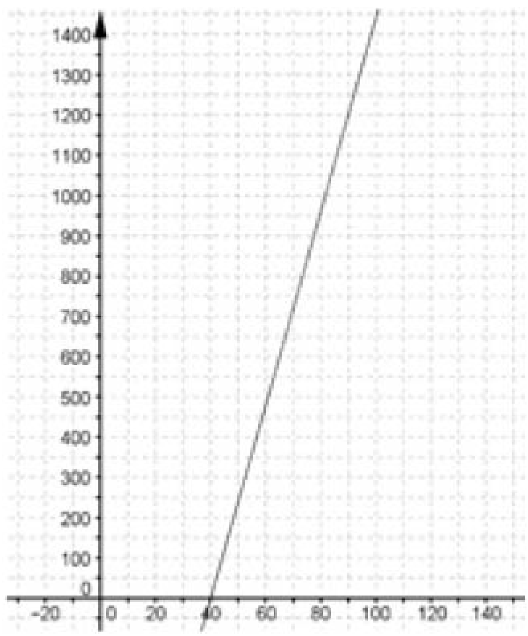
b) $24x + 40 = 1000$

c) *Ecuación lineal con una incógnita.*

d) $x = 40$ *refrescos*

e)

x	$y = 24x + 40$
10	$240 - 960 = -720$
20	$480 - 960 = -480$
30	$720 - 960 = -240$
40	$960 - 960 = 0$
50	$1200 - 960 = 240$



f) $(40, 0)$ $x = 40$ *es el número de refrescos que compro.*

3.

$$2(4b-2)+2(b+1)=2(3b+1)+2(b+2)$$
$$8b-4+2b+2=6b+2+2b+4$$
$$10b-8b=6+2$$
$$2b=8$$
$$b=4$$

Se tiene una ecuación lineal con una incógnita. Donde b = 4

Las medidas del terreno 1 son: largo = 16 − 2 = 14 y ancho = 7.

Para el terreno 2: largo = 24 + 1 = 25 y ancho = 6.

Los metros cuadrados de pasto para el terreno 1 son: 14 × 7 = 98 m^2

Para el terreno 2 son: 25(6) = 150 m^2 de pasto.

Actividad 1

1.

$$\begin{cases} P - L = 12 \\ 2P + 2L) = 156 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ 156 \end{vmatrix}$$

$$det_p = 1(2) - 2(-1) = 2 + 2 = 4$$

$$det_P = 12(2) - 156(-1) = 24 + 156 = 180$$

$$det_L = 156(1) - 12(2) = 156 - 24 = 132$$

$$P = \frac{det_P}{det_p} = \frac{180}{4} = 45$$

$$L = \frac{det_L}{det_p} = \frac{132}{4} = 33$$

Por lo tanto las edades son 45 y 33 años.

2.

$$\begin{cases} 10x + 5y = 1130 \\ x + y = 178 \end{cases} \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1130 \\ 178 \end{vmatrix}$$

$$det_p = 10(1) - 1(5) = 10 - 5 = 5$$

$$det_x = 1130(1) - 178(5) = 240$$

$$det_y = 178(10) - 1130(1) = 650$$

$$x = \frac{det_x}{det_p} = \frac{240}{5} = 48$$

$$y = \frac{det_y}{det_p} = \frac{650}{5} = 130$$

Por lo tanto hay 48 monedas de \$10 y 130 de \$5.

3.

$$\begin{cases} x+y=8 \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{9}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y=8)(-5) \\ 9x+5y=45 \end{cases} \quad \begin{cases} -5x-5y=-40 \\ 9x+5y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x-5y=-40 \\ 9x+5y=45 \end{cases}$$

$$4x=5$$

$$x=5/4=1.25 \qquad y=8-x=8-1.25=6.75$$

Por lo tanto el estudiante camina 1.25 kilómetros y 6.75 kilómetros trota.

4.

$$\begin{cases} C+I=50 \\ 2C-I=64 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 50 \\ 64 \end{matrix}\Bigg|$$

$$det_p = 1(-1)-2(1) = -1-2 = -3$$

$$det_c = 50(-1)-64(1) = -50-64 = -114$$

$$det_I = 1(64)-2(50) = 64-100 = -36$$

$$C = \frac{det_c}{det_p} = \frac{-114}{-3} = 38$$

$$I = \frac{det_I}{det_p} = \frac{-36}{-3} = 12$$

Concluyendo que contesto 38 preguntas correctamente y 12 incorrectas.

5.

a)

$$\begin{cases} (x+y=80)(.5) \\ 1.5x-0.5y=60 \end{cases} \quad \begin{cases} 0.5x+0.5y=40 \\ 1.5x-0.5y=60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.5x+0.5y=40 \\ 1.5x-0.5y=60 \end{cases}$$

$$2x=100$$

$$x=100/2=50$$

$$y=80-50=30$$

Entonces contesto correctamente 50 preguntas y 30 incorectamente.

b) Resolviendo con el método de reducción o suma y resta.

$$\begin{cases} 2x+2y=40 \\ (2.5x-y=22)(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y=40 \\ 5x-2y=44 \end{cases}$$

$$7x+0=84$$

$$x=\frac{84}{7}=12$$

$$2(12)+2y=40$$

$$24+2y=40$$

$$y=\frac{40-24}{2}=\frac{16}{2}=8$$

Por lo tanto contesto correctamente 12 e incorrectamente 8.

c)

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 2x-0.5y=85 \end{cases}$$

Usando determinantes:

$$det_p=1(-0.5)-(1)(2)=-0.5-2=-2.5$$

$$det_x=60(-0.5)-1(85)=-30-85=-115$$

$$det_y=1(85)-2(60)=85-120=-35$$

Por lo tanto el número de respuestas correctas e incorrectas es:

$$x=\frac{-115}{-2.5}=46 \qquad y=\frac{-35}{-2.5}=14$$

Actividad 2

1.

a) $\begin{cases} c+g=60 \\ 4c+2g=190 \end{cases}$

Aplicando el método de sustitución:

$$2g=190-4c$$

$$g=95-2c$$

Sustituyendo "g" en la primera ecuación:

$$c + 95 - 2c = 60$$
$$-c = 60 - 95$$
$$c = -35 / -1 = 35$$

Encontrando "g":

$$g = 95 - 2(35) = 95 - 70 = 25$$

Concluyendo se tiene 35 conejos y 25 gallinas.

b)

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ 12x + 18y = 1104 \end{cases}$$

Despejando "x":

$$x = 80 - y$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación:

$$12(80 - y) + 18y = 1104$$
$$960 - 12y + 18y = 1104$$
$$6y = 1104 - 960$$
$$y = 144 / 6 = 24$$
$$x = 80 - 24 = 56$$

Por consiguiente se empaquetaron 56 paquetes de 12 y 24 de 18 huevos cada uno.

c)

Usando el método de igualación:

[FALTA APLICACIÓN DEL MÉTODO]

Despejando de ambas ecuaciones "h":

$$h = 50 - 2j \qquad h = j - 4$$

Igualando estas dos expresiones y despejando "j":

$$50-2j=j-4$$
$$-3j=-54$$
$$j=\frac{-54}{-3}=18$$

Encontrando "h":

$$h=50-2j=50-2(18)=50-36=14$$

Así la edad de Julia es tiene 18 años y su hermana 14.

2.

a) $\begin{cases}2x+2y=180\\2x+4y=240\end{cases}$

Usando suma y resta:

$$\begin{cases}(2x+2y=180)(-2)\\ \quad 2x+4y=240\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-4x-4y=-360\\ \quad 2x+4y=240\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4x-4y=-360\\ \quad 2x+4y=240\end{cases} \qquad 2(60)+4y=240$$
$$-2x+0=-120 \qquad 120+4y=240$$
$$x=\frac{-120}{-2}=60 \qquad y=\frac{240-120}{4}=\frac{120}{4}=30$$

60 paquetes de 12 huevos y 30 de 18 huevos.

b) $\begin{cases}x+y=50\\4x+8y=268\end{cases}$

Aplicando determinantes:

$$det_p=1(8)-1(4)=8-4=4$$
$$det_x=50(8)-1(268)=400-268=132$$
$$det_y=1(268)-50(4)=268-200=68$$
$$x=\frac{132}{4}=33 \qquad y=\frac{68}{4}=17$$

33 paquetes de 12 huevos y 17 de 18 huevos.

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=75 \\ 2x+4y=440 \end{cases}$

Usando método de igualación:

Se despeja "x" de ambas ecuaciones:

$$x=150-y \qquad x=220-2y$$

$$150-y=220-2y$$
$$-y+2y=220-150$$

$$y=70$$
$$x=150-70=80$$

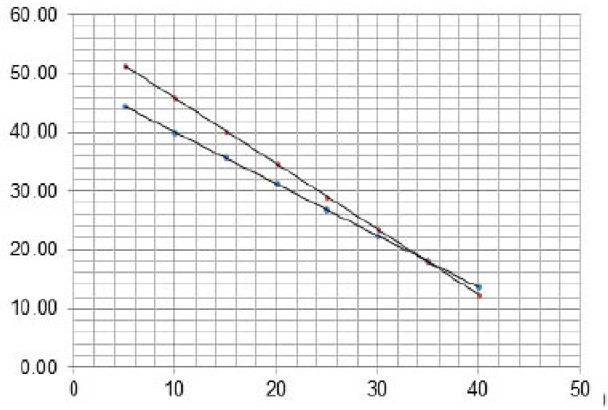
Entonces se tiene 80 paquetes de 12 y 70 de 18 huevos.

3. Utilizando el método gráfico.

a) $\begin{cases} 10a+9n=512 \\ 15a+17n=831 \end{cases}$

Se despeja "n", y se tabulan y grafican las expresiones resultantes:

a	$n=\dfrac{831-15a}{17}$	$n=\dfrac{512-10a}{9}$
5	44.47	51.33
10	40.06	45.78
15	35.65	40.22
20	31.24	34.67
25	26.82	29.11
30	22.41	23.56
35	18.00	18.00
40	13.59	12.44



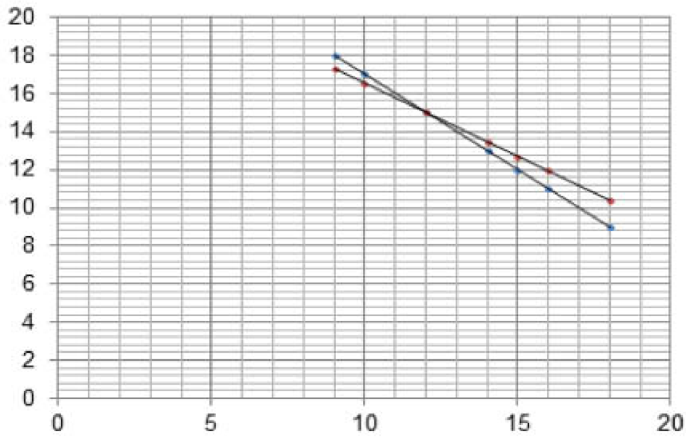
Como se observa el punto de intersección de las dos rectas es el punto (35, 18)

Esto implica que el costo del boleto de adulto es \$35 y de niño es \$18.

b) $\begin{cases} x + y = 27 \\ 26x + 34y = 822 \end{cases}$

Se despeja "y" y se tabulan y grafican las expresiones resultantes:

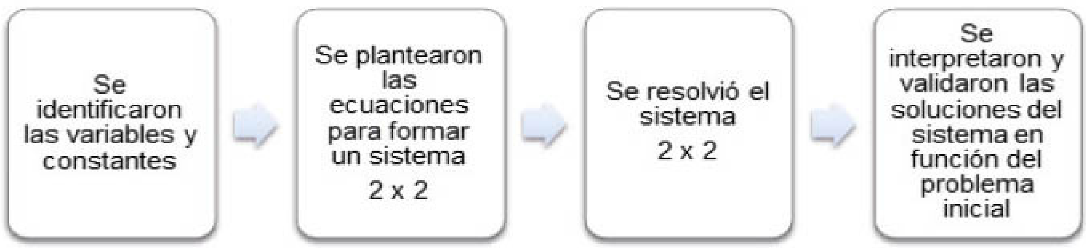
x	$y = 27 - x$	$y = \dfrac{822 - 26x}{34}$
9	18	17.29
10	17	16.53
12	**15**	**15.00**
14	13	13.47
15	12	12.71
16	11	11.94
18	9	10.41



Se observa que el punto de intersección es el punto (12, 15).

Por lo tanto se compró 12 cajas de 12 huevos y 15 de 18 huevos.

c) Un posible diagrama para explicar el proceso de solución del problema anterior es:



Soluciones del Bloque VIII

Para iniciar, reflexiona

Sustitución y resultados:

x	y	z	$x + y + z$	$y + z$	$2x + 2y$
11	20	12	43	32	46
10	20	11	41	31	42
11	25	11	47	36	44
11	25	12	48	37	46
10	25	13	48	38	43
11	25	10	46	35	42

Los valores para son $x = 11$, $y = 12$ y $z = 25$.

Evaluación diagnóstica

Respuestas a los numerales 1 y 2:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$ *Es compatible, tiene una solución.*

$$\begin{cases} 3x - 7y = 20 \\ 6x - 14y = 30 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= \frac{3}{7}x - \frac{20}{7} \\ y &= \frac{3}{7}x - \frac{15}{7} \end{aligned}$$ *Es incompatible, sus rectas son paralelas ya que tienen misma pendiente. Por lo tanto no tiene solución.*

$$\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 24 \end{cases}$$ *Es indeterminado, tiene infinitas soluciones*

3.

Perímetro del terreno de Ulises: $2x + y = 100$

Perímetro del terreno de Toño: $2(x + 4) + 2y = 112$

a) x representa el largo del primer rectángulo y "y" el largo del segundo rectángulo.

b) $\begin{cases} 2x + y = 100 \\ 2x + 2y = 112 - 8 \end{cases}$ *Se tiene dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.*

c) Sistema de ecuaciones lineales de dos por dos.

d) Métodos: sustitución, igualación, determinantes, reducción o gráfico.

e) $\begin{cases} 2x + y = 100 \\ 2x + 2y = 104 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x - y = 100 \\ 2x + 2y = 104 \end{cases}$

$y = 4$

$2x + y = 100$

$2x + 4 = 100$

$x = \dfrac{100 - 4}{2} = 48$

Por lo tanto:

x =48 m
y = 4 m

El sistema se resolvió con reducción.

f) $A_1 = 48 \times 2 = 96 \qquad A_2 = 52 \times 4 = 208$

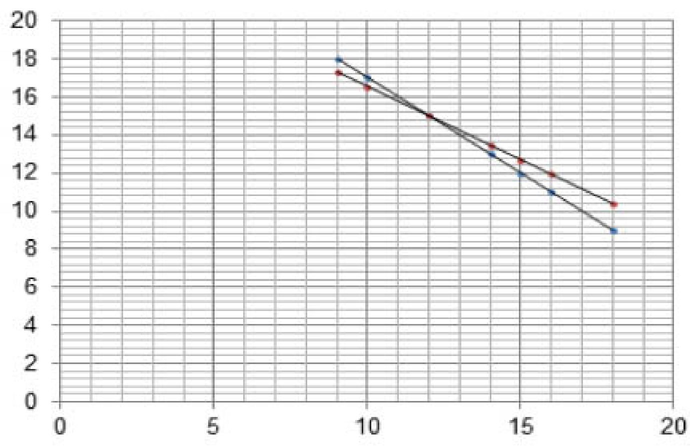
Total de árboles en los terrenos uno y dos:

$$T_1 = 96(2) = 192 \qquad T_2 = 208(2) = 416$$

g)

x	***y = 52 − x***	***y = 100 − 2x***
10	*42*	*80*
20	*32*	*60*
30	*22*	*40*
40	*12*	*20*
48	*4*	*4*
50	*2*	*0*

h)



i) La intersección de las dos rectas representa la solución del sistema.

Actividad 1

1. *Si T representa el precio de las tostadas; j el precio del jugo; m el precio de las memelas del problema se plantean las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{cases} 2t + 2j + m = 54 \\ 0t + j + 4m = 44 \\ 3t + 2j + 0m = 57 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 54 \\ 0 & 1 & 4 & 44 \\ 3 & 2 & 0 & 57 \end{vmatrix}$$

$$det_p = 24 - (3 + 16) = 5$$

$$det_t = 544 - 489 = 55$$

$$det_j = 648 - (132 + 456) = 60$$

$$det_m = (114 + 264) - (162 + 176) = 378 - 338 = 40$$

Por lo tanto el precio de cada producto es:

$$t = \frac{55}{5} = \$11 \quad j = \frac{60}{5} = \$12 \quad m = \frac{40}{5} = \$8$$

Si se desea comprar 6 tostadas pagare 6(11) = \$66

2. *Sean x, y, z las tres distintas denominaciones de monedas de los tres costales y el número de monedas se tiene el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 6x + 8y + 10z = 58 \\ 3x + 0y + 10z = 35 \\ 7x + 4y + z = 41 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 6 & 8 & 10 & 58 \\ 3 & 0 & 10 & 35 \\ 7 & 4 & 1 & 41 \end{vmatrix}$$

$$det_p = (120 + 560) - (240 + 24) = 680 - 264 = 416$$

$$det_x = (35(40) + 41(80)) - (58(40) + 35(8)) = 4680 - 2600 = 2080$$

$$det_y = (210 + 1230 + 4060) - (2450 + 2460 + 174) = 5500 - 5084 = 416$$

$$det_z = (696 + 1960) - (840 + 984) = 2656 - 1824 = 832$$

Obteniendo los valores para x, y , z:

$$x = \frac{2080}{416} = 5 \quad y = \frac{416}{416} = 1 \quad z = \frac{832}{416} = 2$$

Los valores de las monedas son \$5, \$2 y \$1.

3.

a)

$$\begin{cases} 2x+3y+z=26 \\ 3x+0y+2z=35 \\ 0x+4y+z=18 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 26 \\ 3 & 0 & 2 & 35 \\ 0 & 4 & 1 & 18 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{det}_p = 12-25=-13$

$det_x = (140+108)-(208+105) = 248-313 = -65$

$det_y = (70+54)-(72+78) = -26$

$det_z = 312-(280+162) = 312-442 = -130$

Por lo tanto las soluciones del sistema son:

$$x=\frac{-65}{-13}=5 \quad y=\frac{-26}{-13}=2 \quad z=\frac{-130}{-13}=10$$

La denominación de cada moneda es \$5, \$2 y \$10

b)

$$\begin{cases} 5x+3y+2z=12 \\ 4x+2y+4z=10 \\ 7x+y+6z=12 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 12 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \\ 7 & 1 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{det}_p = (60+8+84)-(28+20+72) = 152-120 = 32$

$\mathbf{det}_x = (144+20+144)-(48+48+180) = 308-276 = 32$

$\mathbf{det}_y = (300+96+336)-(140+240+288) = 732-668 = 64$

$\mathbf{det}_z = (120+48+210)-(168+50+144) = 378-362 = 16$

Con lo anterior se tiene que las soluciones son:

$$x=\frac{32}{32}=\$1 \quad y=\frac{64}{32}=\$2 \quad z=\frac{16}{32}=\$0.50$$

Actividad 2

1. Si x, y, z representan los costos para las presentaciones respectivas 12, 18 y 30 entonces el problema se plantea con el sistema:

$$\begin{cases} 10x+12y+5z=858 \\ 8x+9y+11z=1039 \\ 12x+8y+9z=994 \end{cases}$$

Resolviendo por eliminación:

$$(10x+12y+5z=858)(-8) \qquad -80x-96y-40z=-6864$$
$$(8x+9y+11z=1039)(10) \qquad 80x+90y+110z=10390$$

$$-6y+70z=3526 \qquad \textbf{(1)}$$

$$(8x+9y+11z=1039)(12) \qquad 96x+108y+132z=12468$$
$$(12x+8y+9z=994)(-8) \qquad -96x-64y-72z=-7952$$

$$44y+60z=4516 \qquad \textbf{(2)}$$

Tomando ahora 1 y 2:

$$(-6y+70z=3526)(22) \qquad -132y+1540z=77572$$
$$(44y+60z=4516)(3) \qquad 132y+180z=13548$$

$$1720z=91120$$
$$z=\frac{91120}{1720}=\$52.9$$

$$44y+60z=4516$$
$$44y+60(52.9)=4516$$
$$44y+3174=4516$$
$$44y=4516-3174=1342$$
$$y=\frac{1342}{44}=\$30.5$$

$$8x+9y+11z=1039$$
$$8x+9(30.5)+11(52.9)=1039$$
$$8x=1039-856.5=182.6$$
$$x=\frac{182.6}{8}=\$22.8$$

2. *Si "x" representa el costo del llavero, "y" el costo del porta retrato y "z" del cenicero el problema se plantea con el sistema:*

$$\begin{cases} 8x + 3y + 7z = 486 \\ 0x + 4y + 2z = 270 \\ 5x + 4y + 0z = 240 \end{cases}$$

$$(8x + 3y + 7z = 486)(4) \qquad 32x + 12y + 28z = 1944$$

$$(0x + 4y + 2z = 270)(-3) \qquad -12y - 6z = -810$$

$$32x + 22z = 1134 \qquad (1)$$

$$0x + 4y + 2z = 270 \qquad 0x + 4y + 2z = 270$$

$$(5x + 4y + 0z = 240)(-1) \qquad -5x - 4y + 0z = -240$$

$$-5x + 2z = 30 \qquad (2)$$

Sumando 1 y 2:

$$32x + 22z = 1134 \qquad 32x + 22z = 1134$$

$$-5x + 2z = 30(-11) \qquad 55x - 22z = -330$$

$$87x = 804$$

$$x = \frac{804}{87} = 9.2$$

$$-5(9.2) + 2z = 30$$

$$z = \frac{30 + 46}{2} = 38$$

$$8x + 3y + 7z = 486$$

$$8(9.2) + 3y + 7(38) = 486$$

$$y = \frac{486 - 73.6 - 266}{3} = \frac{146.4}{3} = 48.8$$

Llaveros \$9.2 porta retrato \$48.8 y ceniceros \$38
Con incrementos del 5% \$9.66, \$51.2 y \$39.9

3. *Sea "x" la capacidad de la botella 1, "y" la capacidad de la botella 2 y "z" la capacidad de la botella 3, esto permitirá representar el problema en el sistema:*

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 11.5 \\ x + 3y + 2z = 14.3 \\ x + y + 5z = 21.9 \end{cases}$$

Resolviendo por reducción:

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 11.5 \\ x + 3y + 2z &= 14.3(-1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y + 2z &= 11.5 \\ -x - 3y - 2z &= -14.3 \\ x - 2y &= -2.8 \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + 3y + 2z = 14.3)(-5) \\ (x + y + 5z = 21.3)(2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -5x - 15y - 10z &= -71.5 \\ 2x + 2y + 10z &= 42.6 \\ -3x - 13y &= -28.9 \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Reduciendo 1 y 2:

$$\begin{aligned} (x - 2y = -2.8)(3) \\ -3x - 13y = -28.9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - 6y &= -8.4 \\ -3x - 13y &= -28.9 \end{aligned}$$

$$-19y = -37.3$$

$$y = \frac{-37.9}{-19} = 1.9 \text{ litros}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= -2.8 \\ x - 2(1.9) &= -2.8 \\ x - 3.8 &= -2.8 \\ x &= -2.8 + 3.8 = 1 \text{ litro} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 14.3 \\ 1 + 3(1.9) + 2z &= 14.3 \\ 1 + 5.7 + 2z &= 14.3 \end{aligned}$$

$$z = \frac{14.3 - 6.7}{2} = \frac{7.6}{2} = 3.8 \text{ litros}$$

Por consiguiente las presentaciones son de 1, 1.9 y 3.8 litros cada botella.

4. *Sean t_1 cantidad de material del tipo 1, t_2 cantidad de material del tipo 2 y t_3 cantidad de material del tipo 3, esto traduce el problema en el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 10t_1 + 20t_2 + 50t_3 = 1600 \\ 30t_1 + 30t_2 + 0t_3 = 1200 \\ 60t_1 + 60t_2 + 50t_3 = 3200 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 + 2t_2 + 5t_3 = 160 \\ 3t_1 + 3t_2 + 0t_3 = 120 \\ 6t_1 + 6t_2 + 5t_3 = 320 \end{cases}$$

Resolviendo por reducción:

$$t_1 + 2t_2 + 5t_3 = 160(-3) \qquad -3t_1 - 6t_2 - 15t_3 = -480$$
$$3t_1 + 3t_2 + 0t_3 = 120 \qquad 3t_1 + 3t_2 + 0t_3 = 120$$
$$-3t_2 - 15t_3 = -360$$

$$3t_1 + 3t_2 + 0t_3 = 120(-2) \qquad -6t_1 - 6t_2 + 0t_3 = -240$$
$$6t_1 + 6t_2 + 5t_3 = 320 \qquad 6t_1 + 6t_2 + 5t_3 = 320$$
$$5t_3 = 80$$
$$t_3 = \frac{80}{5} = 16$$

Sustituyendo t_3 en 1:

$$-3t_2 - 15t_3 = -360$$
$$-3t_2 - 15(16) = -360$$
$$-3t_2 - 240 = -360$$

$$t_2 = \frac{-360 + 240}{-3} = \frac{-120}{-3} = 40$$

Sustituyendo t_3 y t_2 en la primera ecuación del sistema:

$$t_1 + 2t_2 + 5t_3 = 160$$
$$t_1 + 80 + 80 = 160$$

$$t_1 = 160 - 160 = 0$$

Del tipo uno 0, del tipo dos 40 y del tipo tres 16 kilogramos.

Actividad 3

1.

a) No tiene soluciones, los planos son paralelos.

b) Tiene como solución una recta de puntos.

c) Cuenta con una solución en un punto.

Soluciones del bloque IX

Para iniciar, reflexiona

1.

a) 5 *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* 6 y 8

2. *9 naranjas hay en el costal.*

Evaluación diagnóstica

1. *5, 2 y 10 onzas de Fortex, Esbelta y Redumax respectivamente.*

2.

$2(-2+5)+n=4(-2)-8$
$2(+3)+n=-8-8$
$6+n=-16$
$n=-16-6$
$n=-22$

3.

$$x+y=225$$
$$x=225-y$$

$$40x+15y=5000$$
$$40(225-y)+15y=5000$$
$$9000-40y+15y=5000$$
$$25y=4000$$
$$y=\frac{4000}{25}$$
$$y=160$$

$$40x+15(160)=5000$$
$$40x+2400=5000$$
$$x=\frac{2600}{40}$$
$$x=65$$

Se vendieron 65 boletos de adultos y 160 boletos de niños

4.

Ancho = x
Largo = 2x +2

$$2x+2(2x+2)=22$$
$$2x+4x+4=22$$
$$6x=22-4=18$$
$$x=\frac{18}{6}=3$$

El ancho debe ser de 3 m y el largo de 8 m.

5.

$x^2 - 11x - 12$	$(3k + 2x - y)(3k - 2x + y)$
$25x^2 - 10xy + y^2$	$(x + 3y)(2x - 5)$
$36x^4k^6 - 121$	$(3x - 2y)(2x + y)$
$2x^2 + 6xy - 5x - 15y$	$(x - 6)(x + 2)$
$9k^2 - 4x^2 + 4xy - y^2$	$(5x - y)^2$
$6x^2 - xy - 2y^2$	$(x - 12)(x + 1)$
	$(6x^2k^3 - 11)(6x^2k^3 - 11)$

6.

$$3x + \frac{x}{5} - 5 = \frac{1}{5} + 5x$$
$$3x + \frac{x}{5} - 5x = \frac{1}{5} + 5$$
$$-\frac{9x}{5} = \frac{26}{5}$$
$$x = -\frac{26}{9}$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 8x^2 + x^2 - 5x + 6$$
$$-6x + 1 = -5x + 6$$
$$x = -5$$

Actividad 1

I.

Ecuaciones cuadráticas incompletas

Triviales:

$8x^2 = 0$

$20x^2 = 0$

Puras:

$6x^2 - 36 = 0$

$x^2 - 121 = 0$

$4x^2 - 58 = 0$

$12x^2 - 60 = 0$

II.

a) *Nombrando p al número inicial de piñas, se tiene:*

$$p^2 - 7 = 137$$
$$p = \sqrt{144}$$
$$p = 12$$

El número inicial de piñas es de 12.

b) Sandias = p + 15 = 12 + 15 = 27 sandías

c) Nombrando m a la cantidad de melones, se tiene:

$$m^2 + 13 = 209$$
$$m = \sqrt{196}$$
$$m = 14$$

III.

a)

$x^2 - 25 = 0$
$x = \sqrt{25} = 5$
$x^2 = 81$
$x = \sqrt{81} = 9$
$Precio = 5(9) = 45$

Deberá pagar:

$\$45(1.75) = \$\ 78.75$

b)

$4x^2 = 64$
$x = 4$
$x^2 = 1$
$x = 1$
$Precio = 4 + 1 = 5$

Georgina deberá pagar:

$5(7) = \$35.00$

c)

$2x^2 - 288 = 0$
$x = 12$

El precio de los duraznos es de 4(12) = 48

Gerorgina deberá pagar por los duraznos

$\$48.00\ (3.5) = \$168.00$

IV.

a)

$6x^2 - 36 = 0$
$x^2 = \dfrac{36}{6}$
$x = \pm\sqrt{6}$

b)

$0 = -8x^2$
$x^2 = -\dfrac{0}{8}$
$x = \sqrt{0} = 0$

c)

$x^2 = 121$
$x = \pm\sqrt{121} = \pm 11$

d)

$4x^2 = 54 + 4 = 58$
$x^2 = \dfrac{58}{4}$
$x = \pm\sqrt{\dfrac{58}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{58}}{2}$

e)

$-12x^2 = -32x^2$
$20x^2 = 0$
$x = 0$

f)

$-7.5 + 8x^2 = 52.5 - 4x^2$
$12x^2 = 60$
$x = \pm\sqrt{\dfrac{60}{12}} = \pm\sqrt{5}$

Actividad 2

La frase escondida es:

C	*O*	*M*	*E*	*F*	*R*	*U*	*T*	*A*	*S*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ecuación	Solución distinta de cero	Letra asignada
$13x^2 - 39x = 0$	$13x(x-3) = 0$ $x = 3$	M
$x^2 - x = 0$	$x(x-1) = 0$ $x = 1$	C
$3x^2 = 21x$	$3x(x-7) = 0$ $x = 7$	U
$-5x^2 + 50x = 0$	$-5x(x-10) = 0$ $x = 10$	S
$65x = 13x^2$	$13x(x-5) = 0$ $x = 5$	F
$-9x^2 + 72x = 0$	$-9x(x-8) = 0$ $x = 8$	T
$84x = 21x^2$	$21x(x-4) = 0$ $x = 4$	E
$22x - 11x^2 = 0$	$11x(x-2) = 0$ $x = 2$	O
$14x^2 - 84x = 0$	$14x(x-6) = 0$ $x = 6$	R
$9x = x^2$	$x(x-9) = 0$ $x = 9$	A

Actividad 3

I.

(C) $x^2+9x+18=0$

(M) $8x-12x^2=0$

(C) $-x^2+7x-10=0$

(M) $-10x+4x^2=0$

(P) $72-2x^2=0$

(C) $x^2+8-6x=0$

(T) $2x^2=0$

(M) $5x^2-20=0$

(T) $0=-4x^2$

(M) $-9x-3x^2=0$

II.

1.

a)

Deberás realizar un bosquejo a escala del terreno.

b)

$x(3x)=147$

Es una ecuación cuadrática incompleta pura.

c)

$3x^2=147$

$x^2=\frac{147}{3}$

$x=\pm\sqrt{49}$

$x=\pm 7$

El ancho mide 7 m y el largo 21 m.

d)

Perímetro = 2(7) + 2(21) = 56 m

e)

$d=\sqrt{7^2+21^2}$

$d=\sqrt{49+441}$

$d=\sqrt{490}$

2.

a)

Llamemos "s" a la edad de Saul y "e" a la edad de Leonel:

$s - e = 4 \qquad s = 4 + e$

$s(e) = 165$

$(4 + e)e = 165$

$4e + e^2 = 165$

$e^2 + 4e - 165 = 0$

b)

$(e + 15)(e - 11) = 0$

$e = -15 \qquad e = 11$

Leonel tiene 11 años y Saúl 15 años.

c)

$s = 2e$

$s - e = 4$

$2e - e = 4$

$e = 4$

Hace 7 años, cuando Leonel tenía 4 años y Saúl tenía 8 años.

d)

En realidad es la misma pregunta del inciso c)

e)

$s + e = 62$

$s - e = 4$

$2s = 66$

$s = 33$

$e = 29$

Dentro de 18 años, la suma de sus edades será de 52 años.

3.

a)

$(x + 6)^2 = 4x^2$

b)

$(x + 6) = \sqrt{4x^2}$

$x + 6 = 2x$

$6 = x$

El lado del folleto inicial es de 6 cm.

c)

Folleto inicial = 36 cm^2

Folleto ampliado = 144 cm^2

d)

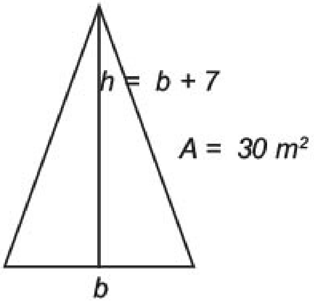
Perímetro inicial: 4(6) = 24 cm

Perímetro ampliado = 4(12) = 48 cm

Diferencia entre perímetros: 48-24 = 24 cm

4.

a)



b)

$$\frac{bh}{2} = 30$$
$$b(b+7) = 60$$
$$b^2 + 7b - 60 = 0$$

c)

$$(b+12)(b+5) = 0$$
$$b = -12 \qquad b = 5$$

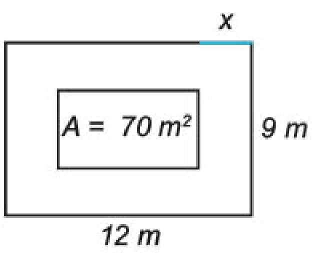
La base de la estructura triangular mide 5 m y su altura 12 m

d)

Puede ser cualquiera de los 3 tipos, porque en ello se cumplen las restricciones del problema.

5.

a)



b)

$$(12-2x)(9-2x) = 70$$
$$108 - 18x - 24x + 4x^2 = 70$$
$$4x^2 - 42x + 38 = 0$$
$$2x^2 - 21 + 19 = 0$$

Es una ecuación cuadrática completa.

c)

$$(2-19)(x-1) = 0$$
$$x = \frac{19}{2} \qquad x = 1$$

El pasillo será de 1 m de ancho.

d)

Las dimensiones de la alfombra son 10 y 7 m.

e)

El área del pasillo es de:

$$2(12) + 2(7) = 24 + 14 = 38\ m^2$$

III.

a)

$(x-5)(x+2)=0$

$x_1 = 5 \quad x_2 = -2$

b)

$(2x-3)(x+7)=0$

$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = -7$

c)

$(x-7)(x-1)=0$

$x_1 = 7 \quad x_2 = 1$

d)

$(3x+5)(2x-9)=0$

$x_1 = \frac{5}{3} \quad x_2 = \frac{9}{2}$

e)

$(x+7)(x-12)=0$

$x_1 = -7 \quad x_2 = -12$

Actividad 4

I.

a) $y^2 + 7 = 0$ *Incompleta pura*

b) $x^2 - 14x + 5 = 0$ *Completa*

c) $2m^2 = 0$ *Incompleta Trivial*

d) $5a^2 + 5a = 0$ *Incompleta mixta*

II.

a)

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$$

b)

$$15v^2 - 2v - 8 = 0$$

$$v = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(15)(-8)}}{2(15)}$$

$$v = \frac{2 \pm \sqrt{4+480}}{30}$$

$$v = \frac{2 \pm 22}{30}$$

$$v_1 = \frac{4}{5} \qquad v_2 = -\frac{2}{3}$$

c)

$$(z-1)(z+1)+(x+3)(z-2)=(z+3)(z+1)$$
$$z^2-1+z^2+z-6=z^2 4z+3$$
$$z^2-3z-10=0$$
$$z=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}$$
$$z=\frac{3\pm\sqrt{9+49}}{2}$$
$$z=\frac{3\pm 7}{2}$$
$$z_1=5 \qquad z_2=-2$$

d)

$$p^2+8p+8-p^2+2p-1=20+7$$
$$p^2+8p=0$$
$$p=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(1)(0)}}{2(1)}$$
$$p=\frac{-8\pm\sqrt{64}}{2}$$
$$p=\frac{-8\pm 8}{2}$$
$$p_1=0 \qquad p_2=-8$$

e)

$$q^2+10=6q$$
$$q^2-6q+10=0$$
$$q=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(10)}}{2(1)}$$
$$q=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}$$
$$q=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$q_1=\frac{6+\sqrt{-4}}{2} \qquad q_2=\frac{6-\sqrt{-4}}{2}$$

f)

$$s=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(-5)}}{2(1)}$$
$$s=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}$$
$$s=\frac{-4\pm 6}{2}$$
$$s_1=1 \qquad s_2=-5$$

g)

$$m=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}$$
$$m=\frac{6\pm\sqrt{36+24}}{4}$$
$$m=\frac{6\pm\sqrt{60}}{4}$$
$$m_1=\frac{3+\sqrt{15}}{2} \qquad m_2=\frac{3-\sqrt{15}}{2}$$

h)

$$x^2-1=0$$
$$x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}$$
$$x_1=1 \qquad x_2=-1$$

i)

$$y=\frac{-(-c)\pm\sqrt{(-c)^2-4(1)(-6c^2)}}{2(1)}$$
$$y=\frac{c\pm\sqrt{c^2+24c^2}}{2}$$
$$y=\frac{c\pm\sqrt{25c^2}}{2}$$
$$y=\frac{c\pm 5c}{2}$$
$$y_1=3c \qquad y_2=-2c$$

j)

Sea $x=z^2$ entonces $x^2=z^4$

$$x^2-20x+64=0$$
$$x=\frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-4(1)(64)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{20\pm\sqrt{400-256}}{2}$$
$$x=\frac{20\pm\sqrt{144}}{2}$$
$$x=\frac{20\pm 12}{2}$$
$$x_1=16 \qquad x_2=4$$

Por lo tanto:

$$z_1=\pm\sqrt{16} \qquad z_3=\pm\sqrt{4}$$
$$z_1=4\ ,\ z_2=-4\ ;\ z_3=2\ ,\ z_4=-2$$

Actividad 5

I.

a) $9i+2-2(5)+8i=-8+17i$

b) $33i+10\sqrt{15}i-10\sqrt{2}$

c) $\dfrac{4i(3i)}{3}=\dfrac{12i^2}{3}=-4$

d) $\dfrac{3\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i}{9i}=\dfrac{5\sqrt{3}i}{9i}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

II.

a) $x^2-2x+1=0$

$D=(-2)^2-4(1)(1)=0$

b) $2x^2-2x-3=0$

$D=(-2)^2-4(2)(-3)=28$

c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

$D = (-4)^2 - 4(3)(2) = -8$

d) $3x^2 - x + 5 = 0$

$D = (-1)^2 - 4(3)(5) = -59$

e) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

$D = (-3)^2 - 4(4)(-1) = 25$

III.

a)

$6x^2 - 2x = -54 - 2x$

$6x^2 = -54$

$x^2 = -\frac{54}{6}$

$x = \pm\sqrt{-9}$

$x = \pm 3i$

$x_1 = 3i \quad x_2 = -3i$

b)

$2x^2 + 5x = 5x - 32$

$2x^2 = -32$

$x^2 = -\frac{32}{2}$

$x = \pm\sqrt{-16}$

$x = \pm 4i$

$x_1 = 4i \quad x_2 = -4i$

c)

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-59}}{6}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{-59}}{6} \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{-59}}{6}$$

d)

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{-5}{2}$$

e)

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$$

Soluciones del bloque X

Evaluación diagnóstica

1. *Respuestas a los paréntesis:*

(d) Ecuación cuadrática trivial
(b) Ecuación cuadrática pura
(a) Ecuación cuadrática mixta
(c) Ecuación cuadrática completa

2.

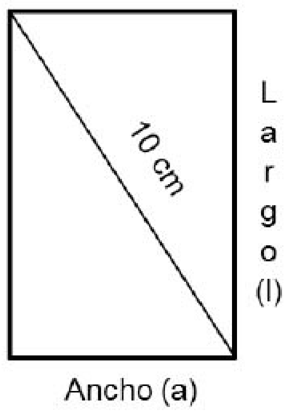
$$(a+30)a=7000$$
$$a^2+30a-7000=0$$
$$(x+100)(x-70)=0$$

$$x+100=0 \qquad x-70=0$$
$$x_1=-100 \qquad x_2=70$$

El largo del campo es de 70 + 30 = 100 m

3.

$$a^2 + l^2 = 10^2$$
$$a^2 + (a+2)^2 = 10^2$$
$$a^2 + a^2 + 4a + 4 = 100$$
$$2a^2 + 4a + 4 = 100$$
$$2a^2 + 4a - 96 = 0$$
$$a^2 + 2a - 48 = 0$$
$$(a + 8)(a - 6) = 0$$
$$a = -8,\ a = 6$$



El ancho mide a = 6 cm

4.

$$a+a+2(2a+2)=22$$
$$2a+4a+4=22$$
$$6a=18$$
$$a=3$$

El ancho es de 3 m y el largo de $[2(3)+2]=8$ *m*

5.

$x^2-11x-12=0$	$x_1=-4i, x_2=4i$
$5x^2+3x=-3x-1$	$x_1=-.4+1.74i, x_2=-.4-1.74i$
$3(x^2+16)=0$	$x_1=0, x_2=-3$
$x(5x+4)=-16$	$x_1=-.2, x_2=-1$
$12=6(x^2+3x+2)$	$x_1=12, x_2=-1$
	$x_1=-2.5, x_2=0$

6.

a)

$C=f(100)=35(100)+500$

$C=4000$ *El costo de producción de 100 playeras es de \$4000.00*

b)

$C=f(n)=35(n)+500=1200$

$35n=700$

$n=20$ *Se podrán fabricar 20 playeras.*

Actividad 1

I.

a)

Variable independiente t	*Variable dependiente* $d(t)=-4.9t^2+24$	*Coordenadas* (t, d)
0	24	(0, 24)
1	19.1	(0.5, 19.1)
2	4.4	(1, 4.4)
3	−20.1	(1.5, −20.1)
4	−54.4	(2, −54.4)
5	−98.5	(5, −98.5)

Variable independiente t	*Variable dependiente* $d(t) = -4.9t^2 + 16$	*Coordenadas* (t, d)
0	16	(0, 16)
1	11.1	(0.5, 11.1)
2	−3.6	(1.4, −3.6)
3	−28.1	(1.5, −28.1)
4	−62.4	(2, −62.4)
5	−106.5	(5, −106.5)

Variable independiente t	*Variable dependiente* $d(t) = -4.9t^2 + 36$	*Coordenadas* (t, d)
0	36	(0, 16)
1	31.1	(0.5, 11.1)
2	16.4	(1.4, 3.6)
3	−8.1	(1.5, −28.1)
4	−42.4	(2, −62.4)
5	−86.5	(5, −106.5)

b)

c) El de la trayectoria $d(t) = -4.9t^2 + 36$, 36 m.

d) El de la trayectoria $d(t) = -4.9t^2 + 36$, 2.71 segundos aproximadamente.

II.

a) $y = x^2 + 3x - 2$

Vértice $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{4}\right)$, eje de simetría $x = -\frac{3}{2}$, orientación hacia arriba.

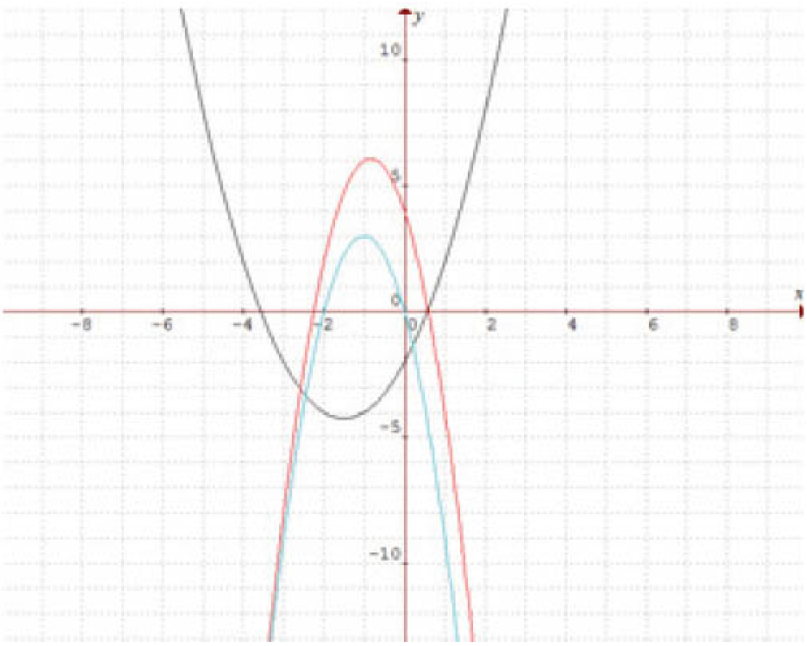
b) $y = -3x^2 - 5x + 4$

Vértice $V\left(-\frac{5}{6}, -\frac{219}{36}\right)$, eje de simetría $x = -\frac{5}{6}$, orientación hacia abajo.

c) $y = 3x^2 - 6x$

Vértice $V(1, -3)$, eje de simetría $x = 1$, orientación hacia arriba.

III.



Actividad 2

I.

Función	*Discriminante de la ecuación respectiva*	*Número de intersecciones con el eje X*	*Coordenadas de las raíces*
$y=6x^2-36$	$D=0^2-4(6)(36)$	2	$x_1=\sqrt{6}\quad x_2=-\sqrt{6}$
$y=-8x^2$	$D=0^2-4(-8)(0)$	1	$x=0$
$y=x^2-121$	$D=0^2-4(1)(-121)$	2	$x_1=11,\ x_2=-11$
$y=x^2+9x+8$	$D=0^2-4(1)(-121)$	2	(-8,0) (-1,0)
$y=x^2+3x+4$	$D=3^2-4(1)(4)$	2	$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}\quad x_2=\dfrac{-3-\sqrt{7}i}{2}$

II. La relación de puntos queda de la siguiente forma:

(a) $x^2+9x+18=y$

(e) $x^2+8-6x=y$

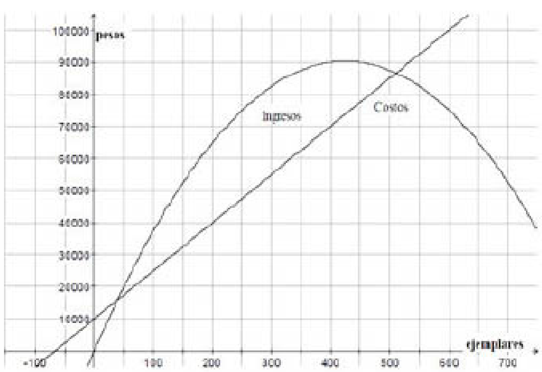
(c) $2x^2=y$

(f) $-x^2+7x-10=y$

(d) $y=-4x^2$

(b) $-9x-3x^2=y$

III.



a) Al producir 0 balones el ingreso es de \$0 y hay una pérdida de \$10000.
Al producir 200 balones el ingreso es de \$65000 y la ganancia es de \$25000.
Al producir 400 balones el ingreso es de \$90000 y la ganancia es de \$20000.
Al producir 600 balones el ingreso es de \$75000 y hay una pérdida de \$25000.

b) Entre 41 y 509 balones aproximadamente.

c) El ingreso máximo es de \$90 000 aproximadamente. Se deben vender 425 balones aproximadamente.

d) Entre 250 y 300 balones.

e) Por simetría, en (850, 0) aproximadamente.

Actividad 3

I. La frase que se obtiene es:

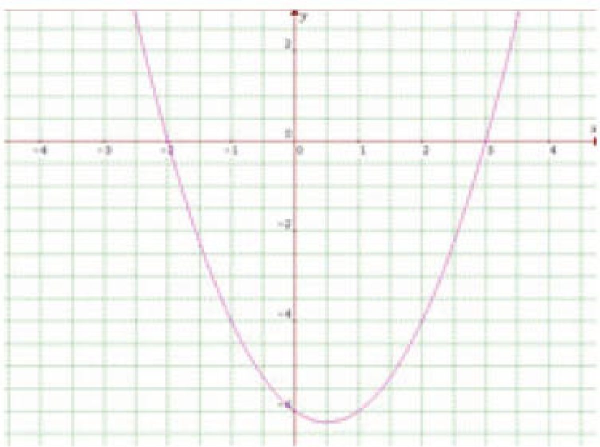
C	U	I	D	A		T	U		C	U	E	R	P	O
5	$\frac{39}{26}$	2	$\frac{1}{2}$	3		$\frac{9}{2}$	$\frac{39}{26}$		5	$\frac{39}{26}$	1	$\frac{65}{26}$	$\frac{21}{6}$	$\frac{72}{18}$

II.

a) $y = x^2 - x - 6$

- Hacia arriba
- (0, −6)
- (3, 0)   (−2, 0)
- $y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
- $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$
- Mínimo de $-\frac{25}{4}$
- $x = \frac{1}{2}$

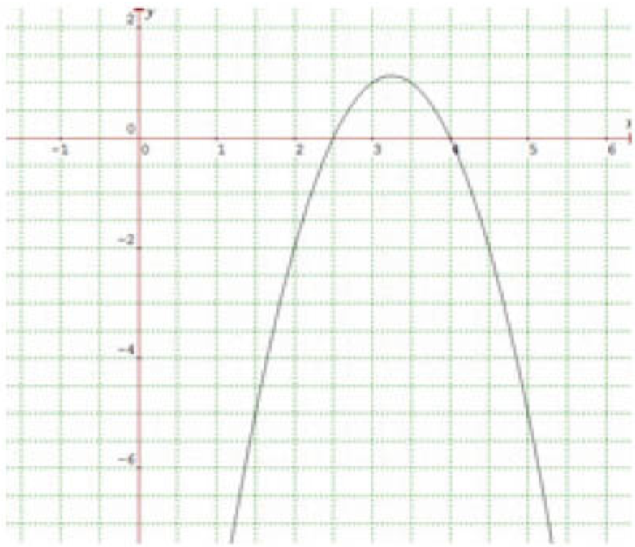
- La gráfica es la siguiente:



b) $y = -2x^2 + 13x - 20$

- *Hacia abajo*
- *(0, −20)*
- $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ *(4, 0)*
- $y = -2\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$
- $V\left(\frac{13}{4}, \frac{9}{8}\right)$
- ***Máximo de*** $\frac{9}{8}$
- $x = \frac{13}{4}$

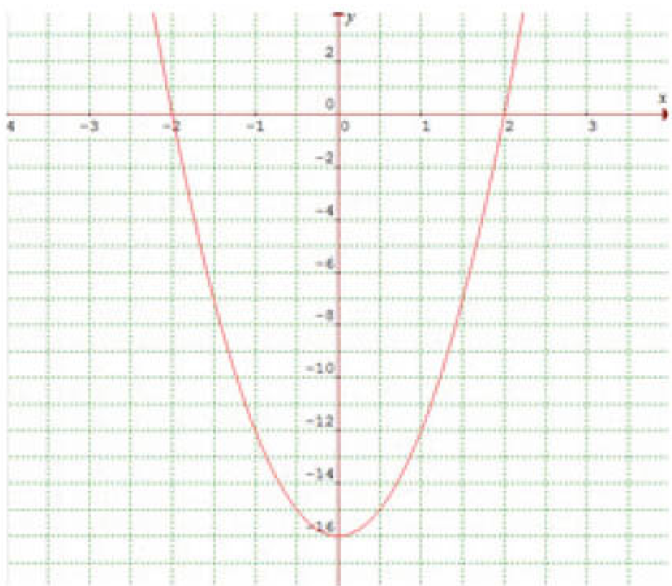
- *La gráfica es la siguiente:*



c) $y = 4x^2 - 16$

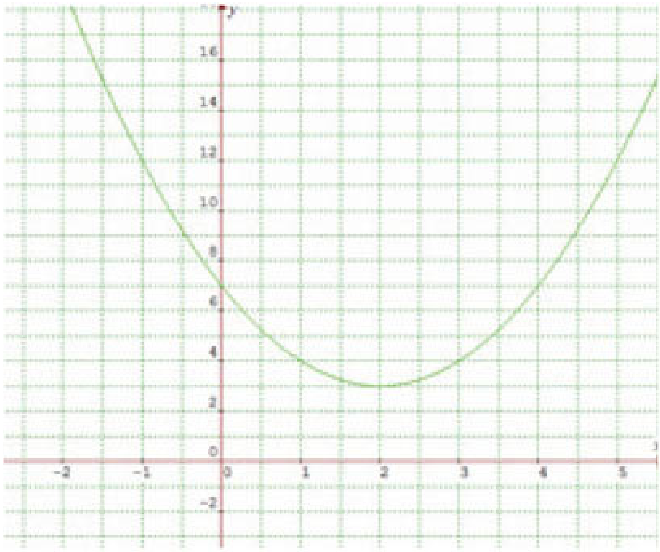
- *Hacia arriba*
- *(0, −16)*
- *(2, 0)* *(−2, 0)*
- $y = 4(x - 0)^2 - 16$
- $V(0, -16)$
- *Mínimo de −16*
- $x = 0$

- *La gráfica es la siguiente:*

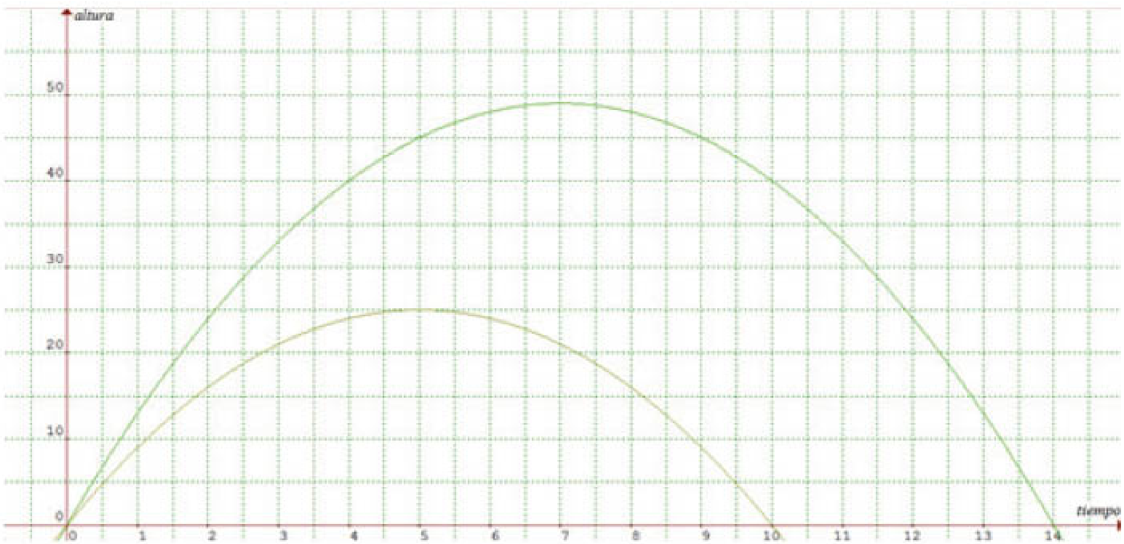


d) $y = x^2 - 4x + 7$

- *Hacia arriba*
- *(0, 7)*
- *No hay intersecciones (reales) en el eje de las x.*
- $y = (x-2)^2 + 3$
- $V(2,3)$
- *Mínimo de 3*
- $x = 2$
- *La gráfica es la siguiente:*



III.



Para la parábola alta:

- *La gráfica abre hacia abajo.*
- *La intersección con el eje y: (0,0)*

- *Las intersecciones con el eje x (ceros o raíces de la función): (0,0) y (0,14)*
- *La ecuación en la forma vértice o estándar es* $y=(x-7)^2+49$
- *Las coordenadas del vértice:* $V(7,49)$
- *Valor máximo o mínimo de la función: máximo de 47*
- *La ecuación del eje de simetría:* $x=7$

Para la parábola baja:

- *La gráfica abre hacia abajo*
- *La intersección con el eje y: (0,0)*
- *Las intersecciones con el eje x (ceros o raíces de la función): (0, 0)   (0, 10)*
- *La ecuación en la forma vértice o estándar:* $y=(x-5)^2+25$
- *Las coordenadas del vértice:* $V(5,25)$
- *Valor máximo o mínimo de la función: máximo de 25*
- *La ecuación del eje de simetría:* $x=5$

Referencias

Alarcón, J. et al. (1995). *Libro para el maestro. Matemáticas.* México: SEP.

Allen R. A. (2008). *Álgebra intermedia*. Séptima edición. México 7ª. Edición.

Ausubel, D. Novad, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, /2a edición) México, Ed. Trillas.

Baldor, Aurelio. (2008). *Álgebra* . grupo Editorial Patria.

Barnett, R. (1992). *Precálculo*. México: Limusa.

Barnett –Ziegler- Byleen. (2000). *Algebra*. 6ª Edición México: McGraw Hill.

Bishop, A. (2000). *Matemáticas y Educación; retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona, España: Grao.

Cuellar, Juan Antonio. (2008) *Matemáticas I –Algebra- Bachillerato*. 2ª Edicion. México: McGraw Hill.

De Oteyza de Oteyza, Elena; Hernández Garcíadiego, Carlos; Lam Osnaya, Emma. (1996). *Álgebra*. Prentice Hall: México.

De Prada, D. et al. (1991). *El comentario de textos matemáticos*. España: Editorial Ágora.

Dolciani y Col. (1989). *Álgebra Moderna Libro 1*. México: Publicaciones Cultural.

Earl W. Swokowsky, A. cole, Jeffery, (2002), *Algebra y Trigonometría con Geometría Anal´tica* 10ª Edición, México: Thomson Learning.

Cummins, Jerry, Mallory y McClain (2007). *Algebra*. México: McGraw Hill.

Emma Castelneuvo (1990) *Didáctica de la Matemática Moderna México*.Ed. Trillas

Fleming, W. y Varberg, D. (1991). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Prentice Hall.

Fridman, L. (1989). *Metodología para Resolver Problemas de Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, M. A. (1995). *Matemáticas 1 para preuniversitarios*. México: Esfinge

Gobran, A. (1990). *Álgebra Elemental*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Heid K. et al. (1996). *Algebra in a technological world*. Estados Unidos de Norteamérica: NCTM.

Larson-Hostetler-Neptune. (2000). *Algebra Intermedia*. 2ª Edición. México Mc-Graw Hill.

Leithold, L. (1989). *Matemáticas previas al Cálculo. Análisis Funcional y Geometría Analítica*. México: Editorial Harla.

Leilthold, L. (1994). *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica*. México: Harla.

Lehmann, Ch. (1980). *Álgebra*. México: Limusa.

López, S. (1972). *Modelos matemáticos*. México: ANUIES.

Novak, J. y Gowin, D. (1984). *Aprendiendo a aprender*. México: Martínez Roca

Novak, J. (1998). *Conocimiento y aprendizaje*. México: Alianza Editorial.

Parra, L. H. (1995). *Algebra Preuniversitaria*. México: Limusa

Paulos, J. (1990). *El hombre anumérico*. España: Tusquets Editores.

Paulos, J. (1990). *Más allá de los números*. España: Tusquets Editores.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Rees, Paul K. sparks y Sparks Rees (1980). *Algebra Contemporánea* . México: McGraw Hill.

Rees, S. y Col. (1992). *Álgebra*. México: McGraw Hill.

Rojano, T. y Ursini, S. (1997). *Álgebra con hojas electrónicas de cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Sestier Andrés (1989) *Historia de las matemáticas* (2da. ed.) México: Noriega

Silva, Juan Manuel; Lazo, Adriana. (2001). *Fundamentos de Matemáticas-Algebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo*. México: Editorial Limusa.

Smith, Ch. (2000). *Álgebra. México*: Editorial Addison Wesley Iberoamericana.

Smith, S. y Col. (2001). *Álgebra*. E.U.A.: Addison Wesley Iberoamericana.

Referencias

Socas, M. et al. (1992) *Iniciación al álgebra.* España: Síntesis.

Swokowski, Earl, (2000). *Álgebra y Trigonometría*. México: Editorial Iberoamericana.

Créditos

Bloque I

Página 20
Pastor de cabras primitivo
© La maravillosa historia de los ***números (2004). Autores: J. M. López Sancho / Esteban Moreno Gómez / M. J. Gómez Díaz / J. M. López Álvar***
Tomado de: Museo Virtual de la Ciencia
Disponible en: http://museovirtual.csic.es/profesores/numeros/num6.htm

Bloque II

Página 80
Julius Wilhelm Richard Dedekind
© Wikimedia Commons
Disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dedekind.jpeg
Autor: desconocido. User: Jean-Luc W. This image (or other media file) is in the public domain because its copyright has expired.
Georg cantor
© Wikimedia Commons
Disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Matematiker_georg_cantor.jpg
Autor: Rudolf 1922 (user). This image (or other media file) is in the public domain because its copyright has expired.

Bloque IV

Página 169
Al-Khwarizmi
© Hunter Johnson
Tomado de: Wikimedia Commons
Disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Al-Khwarizmi,_Khiva.jpg
Autor: Rudolf ; http://cunymathblog.commons.gc.cuny.edu/2013/01/27/meaning-and-use/al-khwarizmi/
User: Mvtayefeh
Portrait of Galileo Galilei
Justus Sustermans, 1636.
© Wikimedia commons. Disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galileo.arp.300pix.jpg; http://www.nmm.ac.uk/mag/pages/mnuExplore/ViewLargeImage.cfm?ID=BHC2700
Página 175
Índice de grasa corporal
Tomado de: Índice de Grasa **Corporal – Mejora tu imagen**
Disponible en: http://indicedegrasacorporal.com/el-indice-de-grasa-corporal/

Bloque V

Página 214
Portrait of Isaac Newton (1642-1727)
Sir Godfrey Neller (1689)
© Wikimedia Commons.
Disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_(1643-1727).jpg
Fotografía: http://www.phys.uu.nl/~vgent/astrology/images/newton1689.jpg]; User: Thomas Gun
This file has been identified as being free of known restrictions under copyright law, including all related and neighboring rights

Bloque VI

Página 252
Papiro de Rhind
© Paul James Cowie (Pjamescowie)
Tomado de: Wikimedia Commons
Disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg; http://www.archaeowiki.org/Image:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg
User: Tedmek

Bloque VII

Página 290
Chalupas poblanas
© Héctor Ledezma
Tomado de: Union Puebla
Disponible en: http://www.unionpuebla.mx/articulo/2013/12/06/turismo/las-8-mas-famosas-delicias-de-puebla-fotos

Bloque VIII

Página 307
El arte matemático
Tomado de: Wikimedia Commons
Disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:%E4%B9%9D%E7%AB%A0%E7%AE%97%E8%A1%93.gif
http://www.chinapage.com/jiuzhang.gif
User: HELLO, WORLD!
This image is in the public domain due to its age
Página 322
Solución de los sistemas de tres ecuaciones con tres variables
Tomado de: Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Buenos Aires.
Disponible en: http://www.sceu.frba.utn.edu.ar/dav/homovidens/**figueroa1/proyecto%20final/**paginas/sistema_de_3x3.htm
Autor: desconocido.

Bloque IX

Página 350
Colotero
© Ramón Carballo
Tomado de: Wikimedia Commons
Disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Colotero.jpg
User: Ramon carballo; I, the copyright holder of this work, release this work into the public domain.

INSERTAR DATOS DE COLOFÓN

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Dirección General del Bachillerato

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Telebachillerato
Comunitario