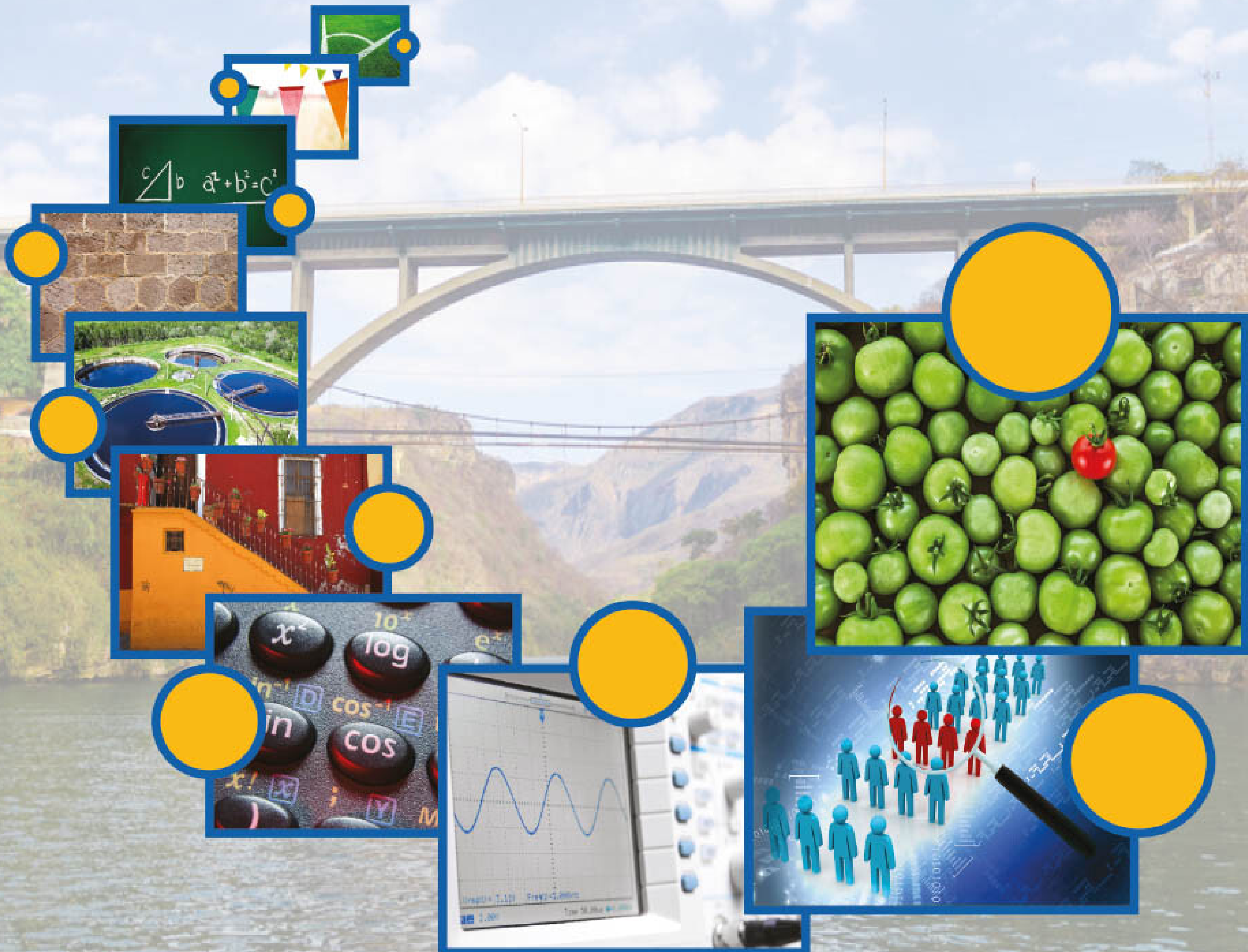
Matemáticas II



Segundo semestre

Matemáticas II

EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEBACHILLERATO COMUNITARIO

Telebachillerato Comunitario Segundo Semestre

Matemáticas II

Autor
Misael Garrido Méndez

Asesoría académica
Marcos Jesús Núñez Linares
Martha Huerta Cruz

Asesoría técnico-pedagógica
Subdirección Académica de Modalidades
no Escolarizada y Mixta DGB

Argentina 28, Centro, 06020, Ciudad de México.
ISBN: 978-607-9463-00-7
Séptima reimpresión
Impreso en México

Servicios editoriales:

Diseño y diagramación
María del Pilar Castro Rodríguez
Saúl Ríos Bernáldez

Figuras e imágenes didácticas
Marcos Jesús Núñez Linares

Material fotográfico e iconografía
Shutterstock Images, LLC
IconArchive
Google Images (recursos genéricos de libre distribución para propósitos académicos y sin fines de lucro)

Prefacio

Estimado estudiante, el libro que en este momento tienes en tus manos fue elaborado pensando en ti, en tus necesidades e inquietudes, como un instrumento que te apoye ahora que estudias el bachillerato. En sus páginas encontrarás contenidos y actividades que son fundamentales para que paso a paso, puedas ir alcanzando las metas que esta asignatura te propone para este semestre.

A ti te toca, ahora, sacarle el mayor provecho a este libro, que es fruto del esfuerzo de un grupo de maestros y especialistas. Si lo haces tu amigo, lo aprovechas al máximo y lo combinas con el apoyo de tu maestro y de los demás recursos didácticos que están a tu alcance, seguramente irás ampliando más tus competencias y habilidades para construir un mejor futuro para ti y contribuir al desarrollo de tu comunidad, de tu estado y de nuestro México.

Te deseamos el mayor de los éxitos en esta importante etapa de tu formación, el bachillerato.

Tabla de contenido

Matemáticas II

Bloque III. Resuelves problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras

Bloque IV. Reconoces las propiedades de los polígonos

Tabla de contenido

Bloque V. Empleas la circunferencia

Bloque VI. Describes las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos

Bloque VII. Aplicas las funciones trigonométricas

Bloque VIII. Aplicas las leyes de los senos y cosenos

Bloque IX. Aplicas la Estadística elemental

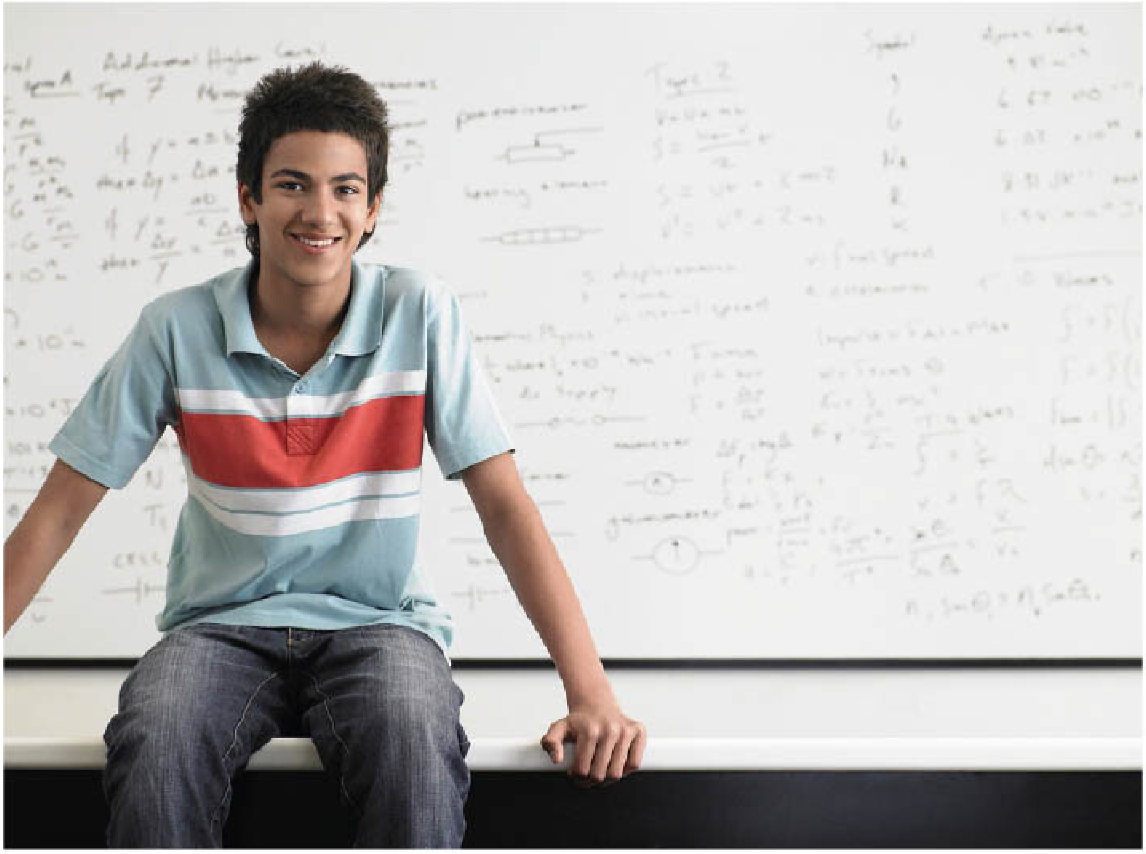
Bloque X. Aplicas la Probabilidad clásica

Tabla de contenido

Presentación general

Como parte de la formación básica del bachillerato se presenta la asignatura de **Matemáticas II**. Esta pertenece al campo disciplinar de matemáticas.

Este campo disciplinar, conforme al Marco Curricular Común, busca propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, para llegar a obtener la solución de diferentes tipos de problemas propios de tu entorno social y/o escolar, a través de procedimientos matemáticos que conlleven el despliegue de diferentes conocimientos, habilidades, actitudes y valores. Por ello los estudiantes podrán desarrollar competencias disciplinares básicas de las matemáticas que le permitirán razonar, estructurar y argumentar respuestas a diferentes problemáticas. Es decir, que los estudiantes lleguen a ser capaces de hacer las aplicaciones de las matemáticas más allá del salón de clases. Por ejemplo, calcular la altura de un objeto (árbol, poste, edificio, etcétera) a partir de su sombra utilizando una diversidad de métodos; o determinar la profundidad de un acantilado mediante el uso de triángulos, o explicar fenómenos de movimiento de transportes, proyectiles, por medio de procedimientos geométricos, entre otros.



¿Qué es una *competencia*?

En el contexto educativo, una competencia se define como "la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico" (Acuerdo 442, Secretaría de Educación Pública, 2008).

El Bachillerato General busca consolidar y diversificar los aprendizajes y desempeños, ampliando y profundizando el desarrollo de competencias relacionadas con el campo disciplinar que promueve la asignatura de **Matemáticas II**. Es por ello que se busca el desarrollo de las **11 competencias genéricas**.

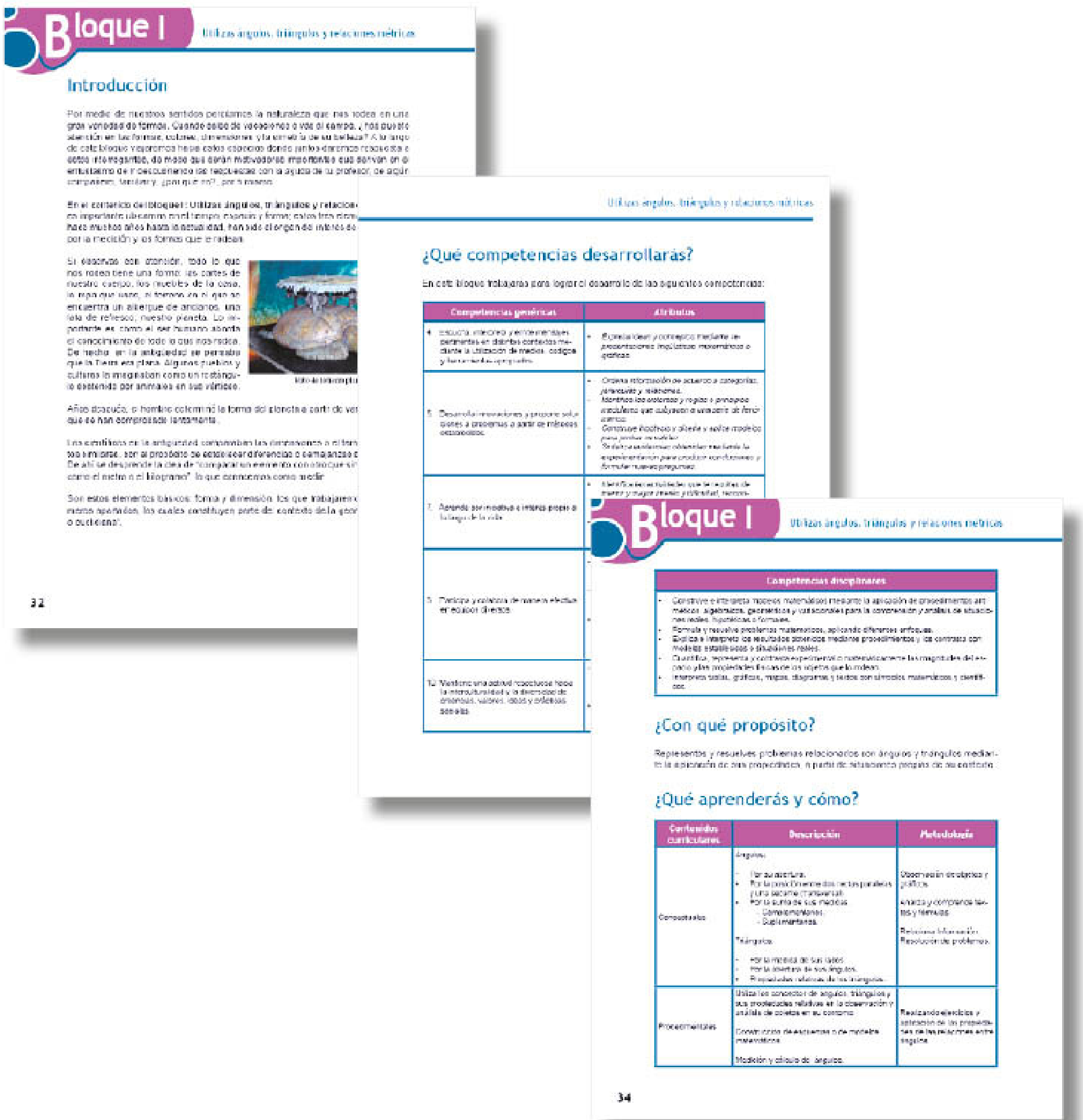
1. **Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.**
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. **Elige y practica estilos de vida saludables.**
4. **Sustenta una postura personal y toma decisiones sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.**
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. **Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.**
7. **Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.**
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9. **Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.**
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. **Contribuye al desarrollo sostenible de manera crítica, con acciones responsables.**

Las **competencias disciplinares**, que son las habilidades que debes desarrollar y lo que tienes que aprender dentro del campo del conocimiento y la asignatura, se enunciarán al principio de cada bloque, y te servirán para identificar tu aprendizaje.

¿Cómo está estructurado este libro?

Inicio del bloque

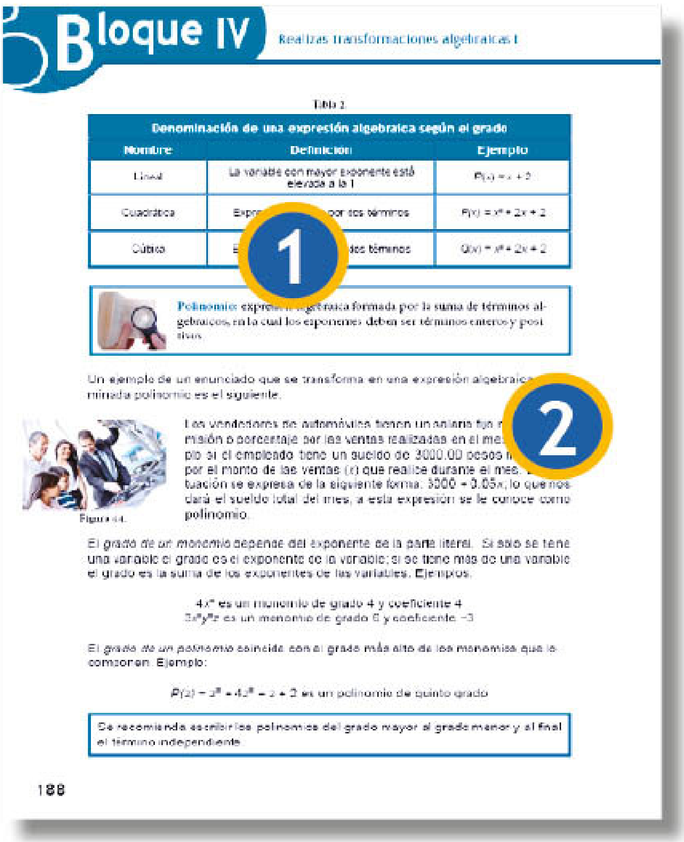
Al inicio de cada bloque encontrarás una breve introducción para sensibilizarte sobre el contenido, las competencias genéricas con sus atributos, las competencias disciplinares y los desempeños que se obtendrán a partir de los objetos de aprendizaje.


Bloque I
Utilizas ángulos, triángulos y relaciones métricas
Introducción
32
¿Qué competencias desarrollarás?
Competencias genéricas
Atributos
Competencias disciplinares
¿Con qué propósito?
¿Qué aprenderás y cómo?
Contenidos curriculares
Descripción
Metodología
Conceptuales
Procedimentales
34

Desarrollo del bloque

Esta parte es fundamental, aquí encontrarás el contenido general y disciplinar que necesitas para acercarte intelectualmente al tema de las matemáticas.

A lo largo del bloque se intercalan estrategias didácticas de aprendizaje, actividades acompañadas de imágenes, ejemplos, preguntas detonadoras y evaluaciones. Todo esto estará relacionado con los contenidos y las competencias a desarrollar. También encontrarás algunos apoyos de estudio como cápsulas con datos interesantes y cuadros al margen del texto para reforzar tu aprendizaje, por ejemplo:



Bloque IV Realizas transformaciones algebraicas I

Tabla 2.

Denominación de una expresión algebraica según el grado		
Nombre	Definición	Ejemplo
Lineal	La variable con mayor exponente está elevada a la 1	$P(x) = x + 2$
Cuadrática	Expre[illegible] por dos términos	$F(x) = x^2 + 2x + 2$
Cúbica	E[illegible] dos términos	$Q(x) = x^3 + 2x + 2$

Polinomio: expresi[illegible] algebraica formada por la suma de términos algebraicos, en la cual los exponentes deben ser términos enteros y positivos.

Un ejemplo de un enunciado que se transforma en una expresión algebraica [illegible]minada polinomio es el siguiente.

Los vendedores de automóviles tienen un salario fijo [illegible]misión o porcentaje por las ventas realizadas en el mes[illegible]plo si el empleado tiene un sueldo de 3000.00 pesos [illegible] por el monto de las ventas (x) que realice durante el mes. [illegible]tuación se expresa de la siguiente forma: $3000 + 0.05x$, lo que nos dará el sueldo total del mes, a esta expresión se le conoce como polinomio.

Figura 44.

El *grado de un monomio* depende del exponente de la parte literal. Si sólo se tiene una variable el grado es el exponente de la variable; si se tiene más de una variable el grado es la suma de los exponentes de las variables. Ejemplos:

$4x^4$ es un monomio de grado 4 y coeficiente 4

$-3x^2y^3z$ es un monomio de grado 6 y coeficiente -3

El *grado de un polinomio* coincide con el grado más alto de los monomios que lo componen. Ejemplo:

$P(z) = z^5 + 4z^3 - z + 2$ es un polinomio de quinto grado

Se recomienda escribir los polinomios del grado mayor al grado menor y al final el término independiente.

188

1. **Glosario**, definiciones y términos para apoyar la comprensión.

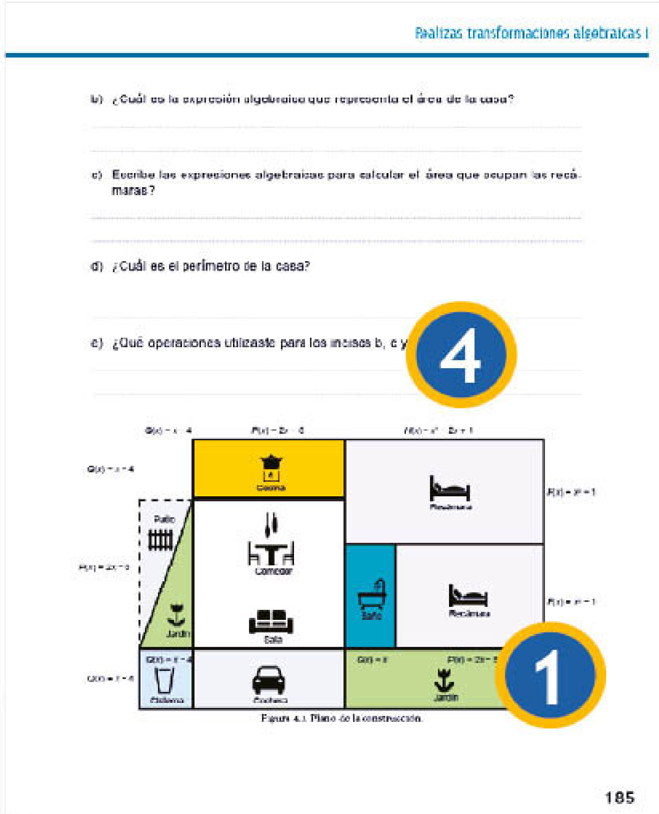
2. **Modelos matemáticos**, que te permitirán representar problemas para llegar a la solución.

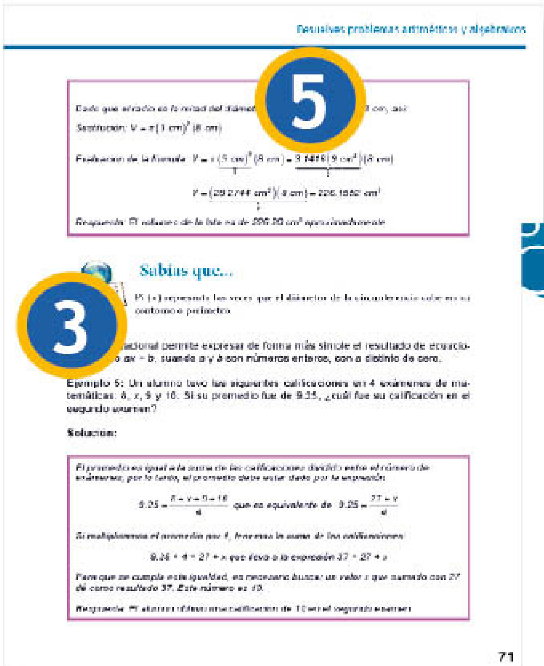
3. **Procedimientos**, que muestran la secuencia lógica para llegar a soluciones.

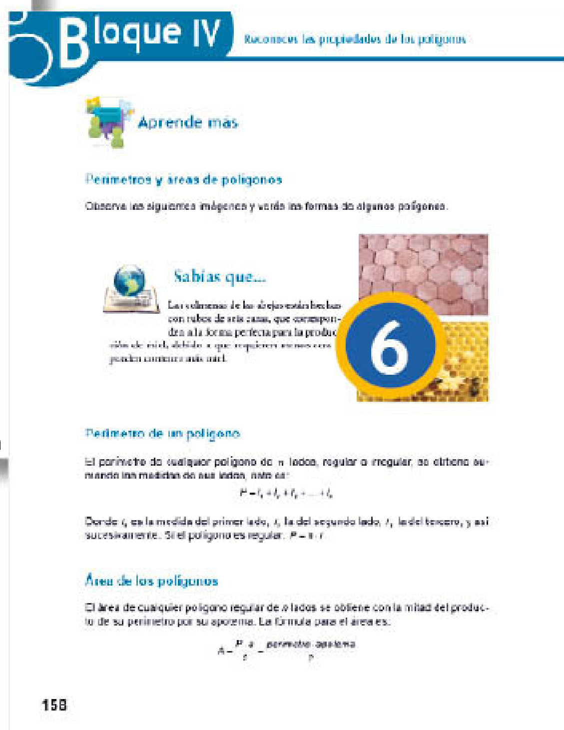
4. **Imágenes**, que te ayudarán a la mejor comprensión de conceptos.

5. **Figuras**, que te permitirán realizar las actividades de aprendizaje.

6. **Datos interesantes**, que faciliten la relación de los contenidos con tu vida diaria.







Simbología que facilitará tu proceso de aprendizaje

Diseño instruccional

 Para iniciar, reflexiona

 ¿Con qué conocimientos cuentas?

 Aprende más

 Aplica lo aprendido

 Actividad

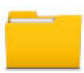
Apoyos para reforzar el aprendizaje

 Glosario

 Reflexionemos sobre la actividad

 Sabías que...

 Verifica tus logros

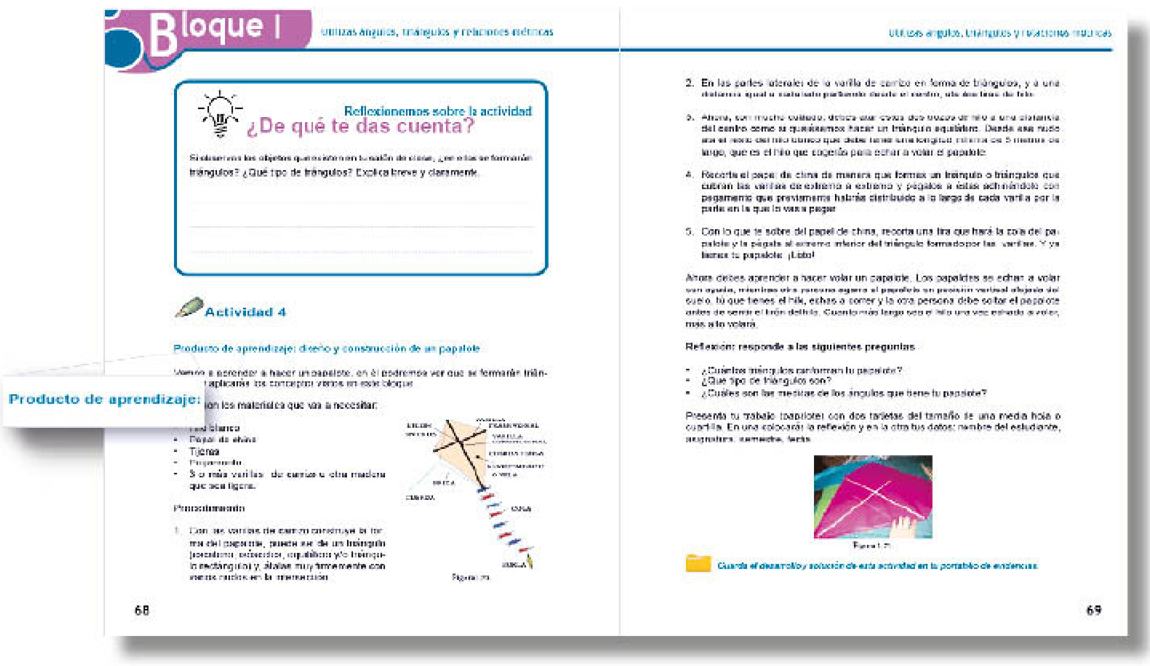
 Portafolio de evidencias

 Problemario

Cierre del bloque

Al terminar cada tema se te pedirá una actividad y producto final para que puedas evaluar qué tanto has avanzado y qué áreas de oportunidad tienes; se te pedirá analizar, investigar, reflexionar y argumentar.

El libro incluye actividades de aprendizaje para que puedas autoevaluar tu desempeño en el logro de las competencias, por lo que al finalizar cada actividad puedes consultar la retroalimentación de la misma. Ten presente que cada actividad debe concretarse en una evidencia que irás recopilando en tu cuaderno y concentrando para la evaluación del curso.

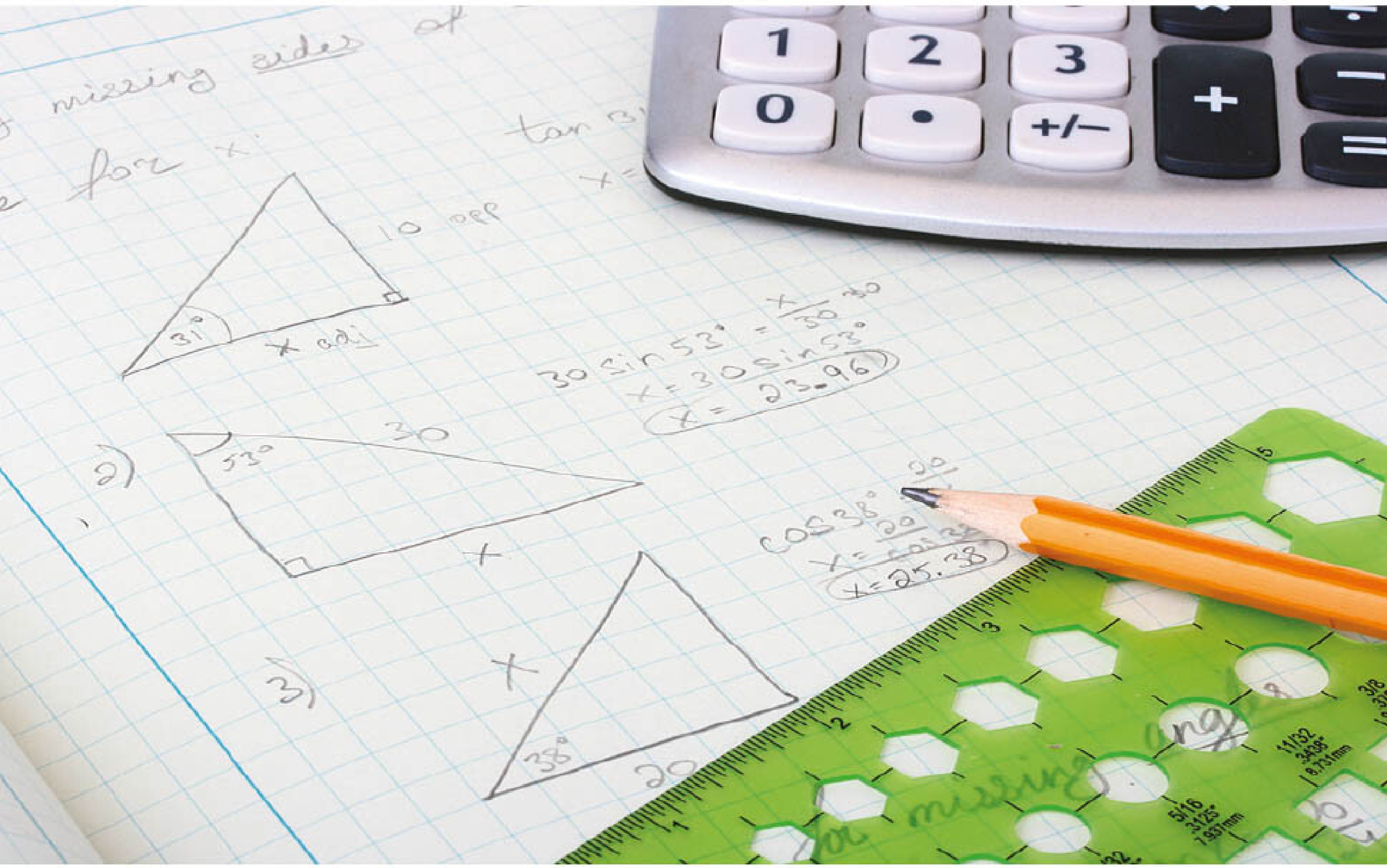


Los contenidos y las actividades se presentan de una manera atractiva. Aprovecha cada pregunta, el contenido, las actividades, ya que cada una incidirá en tu crecimiento personal, familiar y social. Trabaja con tu profesor y con tus compañeros, acércate a ellos, resuelvan dudas y aprendan juntos; date la oportunidad de construir con ellos este viaje. Esperamos que el curso sea interesante y fructífero.

¿Cuál es el propósito de esta asignatura?

El propósito fundamental de este libro es que sea un instrumento autogestivo, es decir, que te permita aprender de forma independiente a través de actividades que te permitan obtener conocimientos y desarrollar habilidades, actitudes y valores en el campo de la geometría y la trigonometría plana. Además de herramientas que te ayuden a tomar mejores decisiones en problemas de tu vida cotidiana, como la estadística y probabilidad. Esto contribuye a fortalecer tu formación en estudios posteriores o bien para afrontar retos del día a día.

Su estructura y diseño forman parte de una estrategia didáctica encaminada a que construyas por ti mismo conocimientos, desarrolles competencias y te apropies de aprendizajes significativos, que produzcan en tu pensamiento cambios de organización continuos.



¿Cómo organizaré mi estudio?

Bloque I

Tiempo 8 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Ángulos

- Por su abertura
- Por la posición entre dos rectas paralelas y una secante (transversal)
- Por la suma de sus medidas
    - Complementarios
    - Suplementarios

Triángulos

- Por la medida de sus lados
- Por la abertura de sus ángulos

Propiedades relativas de los triángulos

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e Interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Recomendaciones para el aprendizaje (actividades)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades será tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirá construir un producto de aprendizaje irá acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Bloque II

Tiempo

3 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Criterios de congruencia

- L, L, L (Lado, Lado, Lado)
- L, A, L (Lado, Ángulo, Lado)
- A, L, A (Ángulo, Lado, Ángulo)

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Recomendaciones para el aprendizaje (actividades)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades será tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirá construir un producto de aprendizaje irá acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Bloque III

Tiempo

8 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Criterios de semejanza

- L, L, L (Lado, Lado, Lado)
- L, A, L (Lado, Ángulo, Lado)
- A, L, A (Ángulo, Lado, Ángulo)

Teorema de Tales

Teorema de Pitágoras

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Recomendaciones para el aprendizaje (actividades)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades será tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirá construir un producto de aprendizaje irá acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Bloque IV

Tiempo

8 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Polígonos
Elementos y propiedades:
• Ángulo central
• Ángulo interior
• La suma de los ángulos centrales, interiores y exteriores.

Perímetro y área de polígonos regulares e irregulares

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Recomendaciones para el aprendizaje (actividades)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades será tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirá construir un producto de aprendizaje irá acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Bloque V

Tiempo 8 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Circunferencia

- Rectas y segmentos
- Ángulos
- Perímetro y área

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Recomendaciones para el aprendizaje (actividades)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades será tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirá construir un producto de aprendizaje irá acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Bloque VI

Tiempo 11 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Funciones trigonométricas

Sistema sexagesimal y circular

Razones trigonométricas directas y recíprocas de ángulos agudos

Cálculo de valores de las funciones trigonométricas para 30º, 45º, y 60º y sus múltiplos

Resoluciones de triángulos rectángulos

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Recomendaciones para el aprendizaje (actividades)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades serán tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirán construir un producto de aprendizaje irán acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Bloque VII

Tiempo 10 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Círculo unitario

Gráfica de las funciones seno, coseno y tangente

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Recomendaciones para el aprendizaje (actividades)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades serán tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirán construir un producto de aprendizaje irán acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Bloque VIII

Tiempo

10 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Ley de senos

Ley de cosenos

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

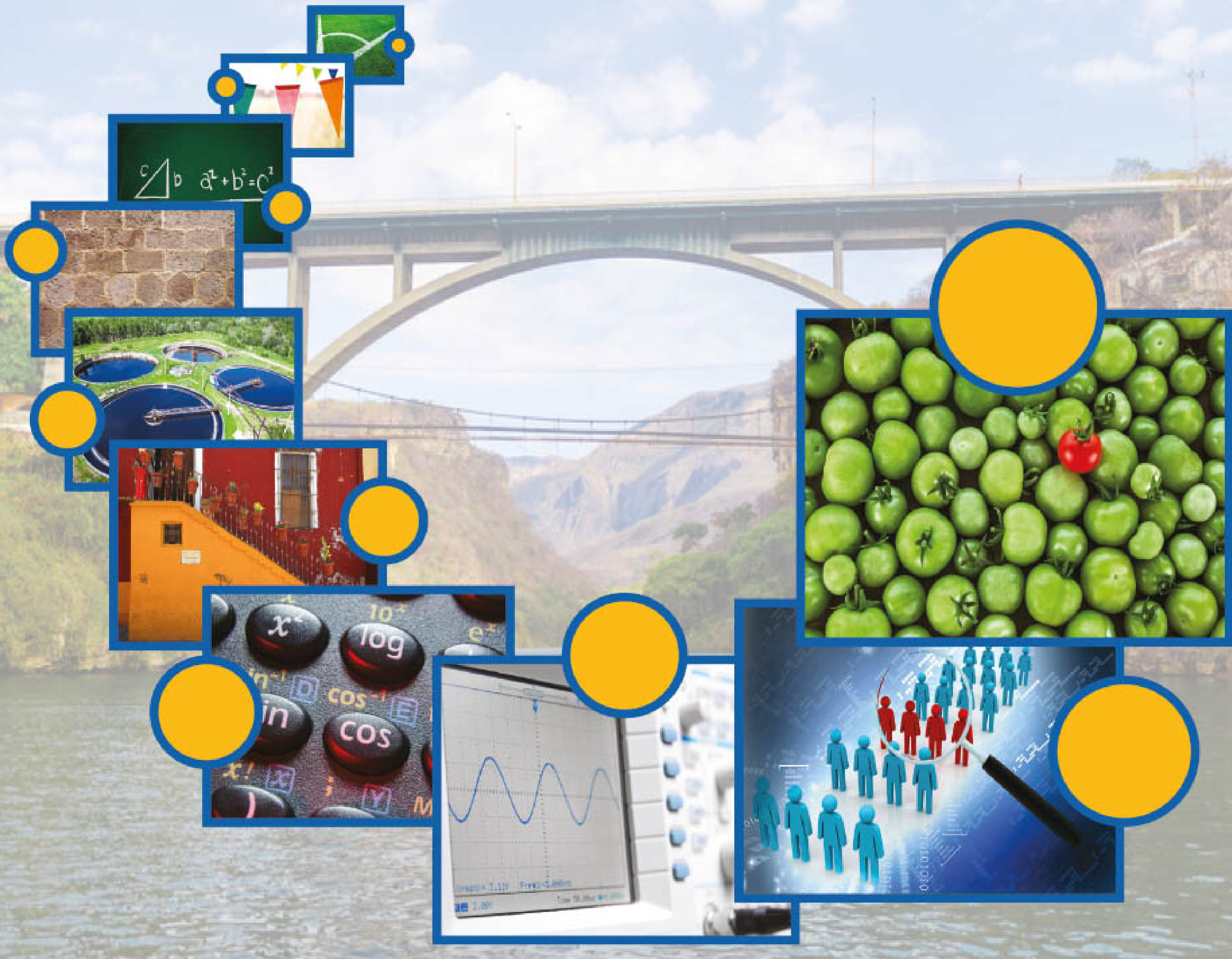
Recomendaciones para el aprendizaje (actividades)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades será tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirá construir un producto de aprendizaje irá acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Matemáticas II



Segundo semestre

Bloque X

Tiempo

8 horas

Contenidos curriculares que se abordan

Probabilidad clásica

Competencias disciplinares que se desarrollan

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

RECOMENDACIONES PARA EL APRENDIZAJE (ACTIVIDADES)

Para el logro del desarrollo de competencias, deberás realizar en cada uno de los bloques: una evaluación diagnóstica, actividades independientes, y actividades que te permitan elaborar un producto de aprendizaje final por cada bloque. Al finalizar cada bloque se te pedirá realizar un conjunto de actividades para evaluar el desarrollo de las competencias. Este conjunto de actividades será tu evidencia de aprendizaje.

Evaluación del aprendizaje

Cada una de las actividades que te permitirá construir un producto de aprendizaje irá acompañada de una lista de cotejo autoevaluativa que tiene por finalidad ser consciente del progreso del desarrollo de las competencias, de tal manera que tendremos actividades, autoevaluaciones y evidencia de cierre.

Bloque I

Utilizas ángulos, triángulos y relaciones métricas

Introducción

Por medio de nuestros sentidos percibimos la naturaleza que nos rodea en una gran variedad de formas. Cuando sales de vacaciones o vas al campo, ¿has puesto atención en las formas, colores, dimensiones y la simetría de su belleza? A lo largo de este bloque viajaremos hacia estos espacios donde juntos daremos respuesta a estas interrogantes, de modo que serán motivadores importantes que deriven en el entusiasmo de ir descubriendo las respuestas con la ayuda de tu profesor, de algún compañero, familiar y, ¿por qué no?, por ti mismo.

En el contenido del **bloque I: Utilizas ángulos, triángulos y relaciones métricas**, es importante ubicarnos en el tiempo, espacio y forma; estos tres elementos, desde hace muchos años hasta la actualidad, han sido el origen del interés del ser humano por la medición y las formas que le rodean.

Si observas con atención, todo lo que nos rodea tiene una forma: las partes de nuestro cuerpo, los muebles de la casa, la ropa que usas, el terreno en el que se encuentra un albergue de ancianos, una lata de refresco; nuestro planeta. Lo importante es cómo el ser humano aborda el conocimiento de todo lo que nos rodea. De hecho, en la antigüedad se pensaba que la Tierra era plana. Algunos pueblos y culturas la imaginaban como un rectángulo sostenido por animales en sus vértices.

Mito de la tierra plana.

Años después, el hombre determinó la forma del planeta a partir de varias hipótesis que se han comprobado lentamente.

Los científicos en la antigüedad comparaban las dimensiones o el tamaño de objetos similares, con el propósito de establecer diferencias o semejanzas significativas. De ahí se desprende la idea de "comparar un elemento con otro que sirve de patrón, como el metro o el kilogramo", lo que conocemos como **medir**.

Son estos elementos básicos: forma y dimensión, los que trabajaremos en los primeros apartados, los cuales constituyen parte del contexto de la geometría "plana o euclidiana".

¿Qué competencias desarrollarás?

En este bloque trabajarás para lograr el desarrollo de las siguientes competencias:

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.* • *Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Representas y resuelves problemas relacionados con ángulos y triángulos mediante la aplicación de sus propiedades, a partir de situaciones propias de su contexto.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	Ángulos: • Por su abertura. • Por la posición entre dos rectas paralelas y una secante (transversal). • Por la suma de sus medidas. - Complementarios. - Suplementarios. Triángulos: • Por la medida de sus lados. • Por la abertura de sus ángulos. • Propiedades relativas de los triángulos.	Observación de objetos y gráficos. Analiza y comprende textos y fórmulas. Relaciona Información. Resolución de problemas.
Procedimentales	Utiliza los conceptos de ángulos, triángulos y sus propiedades relativas en la observación y análisis de objetos en su contorno. Construcción de esquemas o de modelos matemáticos. Medición y cálculo de ángulos.	Realizando ejercicios y aplicación de las propiedades de las relaciones entre ángulos.

Actitudinales	Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje. Compartir ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.	Exposición de trabajos con criterios de orden y limpieza. Respeta y escucha las opiniones y/o argumentos de otras personas. Seguimiento e interpretación de instrucciones.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 8 horas para el desarrollo de este bloque. Lo más recomendable es que utilices 4 horas para revisar los contenidos temáticos y 4 horas para llevar a cabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos:

- Evaluación diagnóstica
- Portafolio de evidencias
- Construcción de un papalote

El **portafolio de evidencias** es un conjunto de pruebas recolectadas a lo largo del período a evaluar. Lo puedes hacer en una libreta o en un cuaderno que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones las cuales te permitan llegar a soluciones de los problemas presentados en las actividades de este bloque. Los trabajos deben mostrar orden y limpieza. Además debe incluir una portada con tus datos (nombre de la escuela, título "Portafolio de evidencias", nombre del estudiante y fecha de entrega) y un índice.

Estos productos serán evaluados con los instrumentos mostrados al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

Juan está en el parque de su ciudad, frente al Palacio Municipal donde se observa un reloj que marca en ese momento las 12:00 horas. ¿Cómo ve Juan las manecillas del reloj en ese momento? Si después de 2 horas, Juan observa el reloj nuevamente para saber si es tiempo de retirarse, ¿cómo verá las manecillas entonces? Escribe tus respuestas en las líneas siguientes, incluye un dibujo de dicho reloj para ilustrar tu respuesta.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Has llegado a la segunda parte del curso de Matemáticas. Para comprender los nuevos temas es conveniente recordar lo visto en el primer semestre.

Evaluación diagnóstica

Instrucciones:

1. Calcula el área del triángulo trazado sobre el mapa de la figura 1.1, empleando una escala de 1 cm : 450 m. Escribe el procedimiento para obtener la respuesta y expresa el resultado en kilómetros cuadrados (km^2) en las líneas siguientes.

Figura 1.1.

Puedes dibujar sobre el mapa o realizar cualquier actividad que te ayude a efectuarlo. Presenta tu trabajo sin tachaduras ni borrones.

a) En **plenaria**, presenta tus respuestas al resto del grupo:

¿Cuántas opciones de procedimientos para encontrar la solución fueron utilizados?

....

Plenaria: reunión o junta general con todos los participantes del grupo.

Procedimiento: acciones u operaciones que se hacen para obtener un resultado.

b) Después de haber escuchado los diferentes procedimientos, escribe el mejor, desde tu punto de vista.

....

....

....

2. Escribe los nombres de dos objetos geométricos que se puedan construir a partir de una sucesión de puntos.

....

....

3. ¿Cómo construirías alguno de ellos? Explica el procedimiento:

....

....

....

....

4. ¿Es posible la representación de cualquier objeto de nuestro entorno o solamente de algunos? .... ¿Por qué? ....

....

5. En parejas, lee y sigue las instrucciones para realizar el siguiente proceso:

Paso 1. Observa la figura 1.2 *ABCFED*.
Paso 2. Calcula el área del triángulo ΔABF.
Paso 3. Responde la siguiente pregunta: ¿Cómo se calcula el área total? Si los segmentos AE y BF son perpendiculares al segmento DC, explica el procedimiento que debe realizarse para obtener la respuesta.

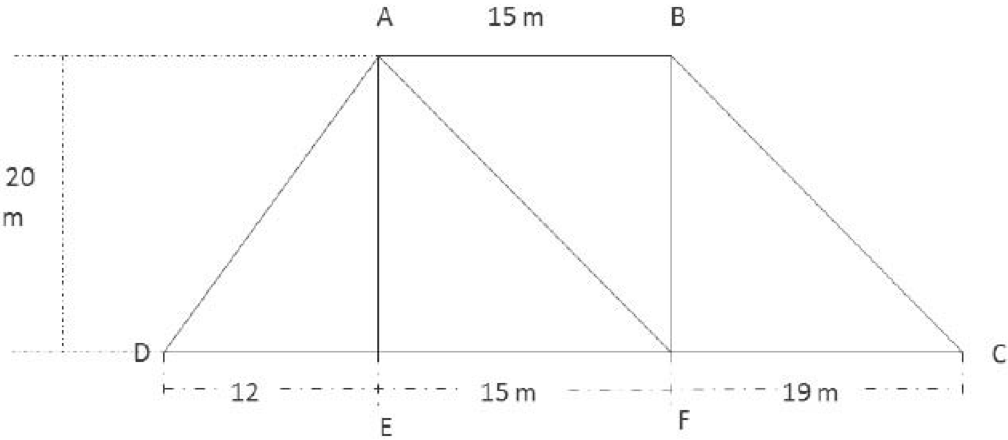


Figura 1.2.

6. Resuelve en tu libreta o cuaderno el problema que se presenta, el cual está relacionado con la solución de ecuaciones de primer grado.

   Paulina vendió 2x + 5 boletos para una rifa y el total de boletos vendidos fueron 57, ¿calcula el valor de x?

7. Contesta las siguientes tres preguntas detallando tu explicación al respecto. Incluye un dibujo que represente la situación en cada caso.

a) Si los ángulos internos de un triángulo suman 180°, ¿cuánto miden los ángulos internos de un triángulo equilátero?
b) ¿Cómo demostrarías que dos rectas son paralelas?
c) ¿Cómo determinas la diferencia entre una línea recta y una curva?
d) ¿Qué necesitarías conocer para calcular el área de un triángulo?

8. Lee con atención los siguientes planteamientos y antes de contestar reflexiona sobre lo que se pregunta.

a) Si necesitas desplazarte de un lugar a otro, sabiendo que en el trayecto existe un río y tienes que caminar un largo trecho, como se muestra en la figura 1.3, ¿te irías por un camino recto o siguiendo el margen del río? Escribe en tu libreta tus argumentos de manera clara y breve.

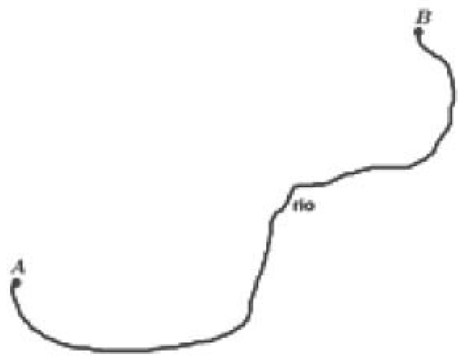


Figura 1.3.

b) Piensa y escribe: ¿de qué tamaño es un punto?

c) Explica y escribe: ¿qué tan gruesa es una línea?

d) En la figura 1.4, ¿cómo se llaman los ángulos? $\angle a$ y $\angle b$

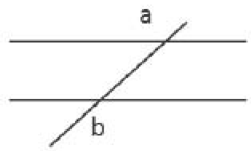


Figura 1.4.

e) Juan tiene un terreno de forma rectangular, con una base de 300 metros de largo y una altura de 25 metros y quiere vender las $\frac{2}{3}$ partes del terreno. Si vende a $25.00 el metro cuadrado, ¿cuánto recibirá por la venta?

Al concluir verifica tus respuestas en el anexo, si de la actividad anterior respondiste correctamente de **12 a 15 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, de **7 a 11** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Bien**	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: **aritmética, áreas de figuras geométricas y ecuaciones de primer grado.**

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Ángulos

Los ángulos son una herramienta necesaria en diversas situaciones. Estas van desde cálculos de corte científico, como por ejemplo saber la dirección que una nave espacial debe tomar para cruzar la atmósfera terrestre, hasta para la forma en la que deben colocarse las butacas y la pantalla en una sala de cine que permita la visibilidad de los asistentes de forma adecuada, o el ángulo que debe tomar una bola de billar para lograr un tiro efectivo.

Ángulo: abertura que se forma entre dos semirrectas que se intersecan entre sí en un punto en común.

Las semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ se denominan lado inicial y lado terminal, respectivamente, y el punto A, de intersección de los lados, se llama vértice.

Existen diferentes formas de notación para los ángulos. Las más comunes son: la notación de tres letras y la notación del vértice.

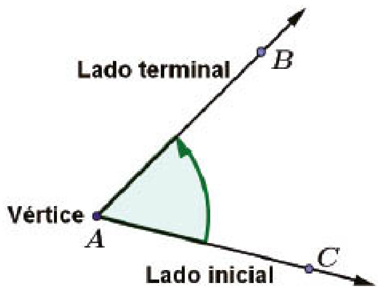


Figura 1.5.

Notación de tres letras

Consiste en escribir la letra de un punto del lado inicial distinto del vértice (C), la letra del vértice (A) y la letra de un punto del lado terminal distinto del vértice (B); precedido por alguno de los símbolos angulares: $\angle$, $\measuredangle$ o $\sphericalangle$. De este modo, el ángulo de la figura 1.5 puede denotarse mediante las expresiones $\angle CAB$, $\measuredangle CAB$ o $\sphericalangle CAB$.

Ten en cuenta, que la letra para el vértice debe quedar en medio.

Notación del vértice

Si no hay **ambigüedad** acerca del ángulo que pertenece a un vértice, puede emplearse la notación simplificada en la que después del símbolo angular se escribe la letra correspondiente al vértice del ángulo. En la figura 1.5, el ángulo representado se denota como $\angle A$. Esta notación es particularmente útil cuando se trabaja con triángulos.

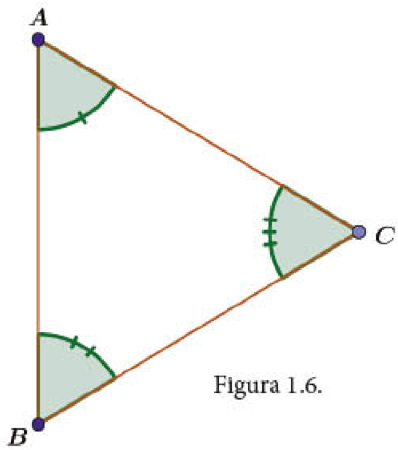


Figura 1.6.

Ambigüedad: posibilidad de que algo pueda ser entendido de varios modos.

En la figura 1.6, se muestran los tres ángulos interiores del triángulo ABC, donde los ángulos pueden denotarse de la siguiente manera:

Vértice	Notación del vértice	Notación de tres letras	Notación numérica
A	$\angle A$ o $\hat{A}$	$\angle BAC$ o $\angle CAB$	$\angle 1$ o $\hat{1}$
B	$\angle B$ o $\hat{B}$	$\angle CBA$ o $\angle ABC$	$\angle 2$ o $\hat{2}$
C	$\angle C$ o $\hat{C}$	$\angle ACB$ o $\angle BCA$	$\angle 3$ o $\hat{3}$

Notación de la medida angular

Para denotar la medida de un ángulo se antepone la letra "m" a la notación del ángulo. De este modo, para representar la medida del ángulo A se escribe la expresión $m\angle A$, que se lee "medida del ángulo A".

Es importante señalar la diferencia entre el objeto geométrico y su medida. El ángulo es el objeto geométrico al que se hace referencia en la solución de un problema y su medida es el valor numérico de la abertura entre los lados del mismo, que se utiliza en los cálculos. Es frecuente que se utilice la medida de un ángulo como el ángulo mismo, pero es importante señalar que son conceptos diferentes.

En la figura 1.7 se muestra un polígono cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. En cada vértice hay un ángulo marcado en color rojo, por ejemplo, en el vértice A se localiza el ángulo $\angle BAD$ y su medida está representada por la letra griega alfa, de modo que $m\angle BAD = \alpha = 128°$. Para efectos de cálculo se acostumbra escribir "el ángulo α" para referirse al ángulo *BAD* y también es común la expresión $\alpha = 128°$ para decir que el ángulo con vértice en A mide 128°; sin embargo, estas expresiones hacen referencia a la medida y no al ángulo.

La mayoría de los textos de geometría representan la medida de un ángulo empleando letras del alfabeto griego, que pueden utilizarse los símbolos θ (theta), α (alfa), β (betha), etcétera.

Medición angular: clase de mediciones sobre un arco de circunferencia.

Sistema sexagesimal: sistema de numeración posicional que tiene como base aritmética el número 60.

Radián: unidad de medida del ángulo plano.

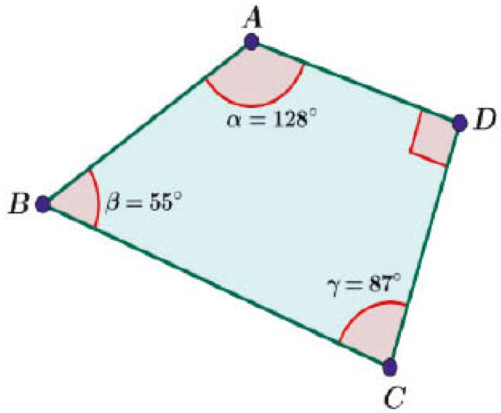


Figura 1.7.

Clasificación de los ángulos

Los ángulos pueden ser clasificados de acuerdo con los siguientes criterios:

1. **Por el sentido de giro que da lugar al ángulo**:

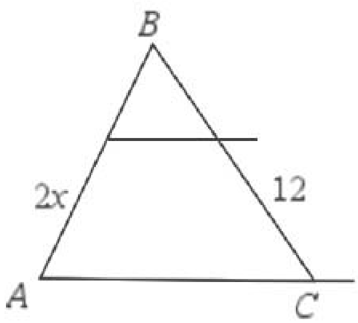


Figura 1.8.

a) **Negativos.** Se generan en sentido horario, que es el mismo del movimiento de las manecillas del reloj (figura 1.9).

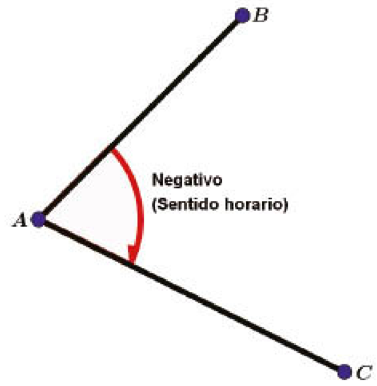


Figura 1.9.

b) **Positivos.** Se generan en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 1.10).

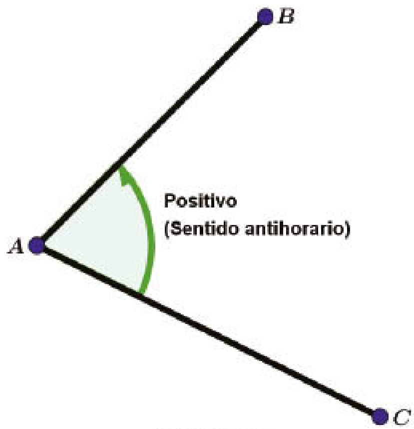
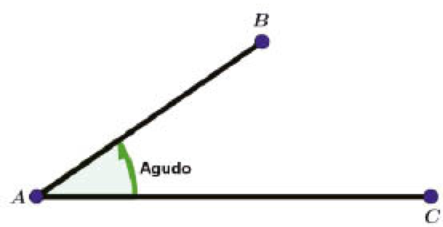


Figura 1.10.

2. **Por la medida del ángulo:**

Figura 1.11.

a) **Nulo.** Su medida es de cero grados: $\theta = 0^{o}$ (figura 1.11).



b) **Agudo.** Su medida es mayor que 0º pero menor de 90º. $0^{o} < \theta < 90^{o}$ (figura 1.12).

Figura 1.12.

c) **Recto.** Mide 90º. $\theta = 90^o$ (figura 1.13).

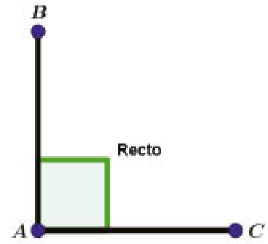


Figura 1.13.

d) **Obtuso.** Su medida es mayor de 90º pero menor de 180º. $90^o < \theta < 180^o$ (figura 1.14).

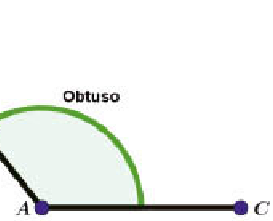


Figura 1.14.

e) **Llano.** Mide 180º. $\theta = 180^o$ (figura 1.15).

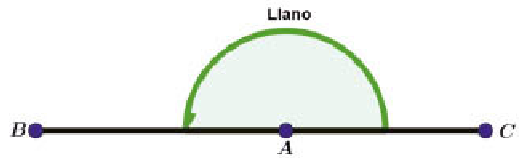


Figura 1.15.

f) **Cóncavo o entrante.** Su medida es mayor de 180º pero menor de 360º (figura 1.16).

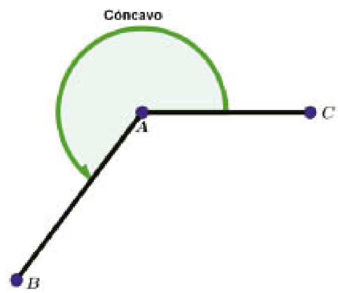


Figura 1.16.

g) **Perigonal o completo.** Mide 360º. $\theta = 360^o$ (figura 1.17).

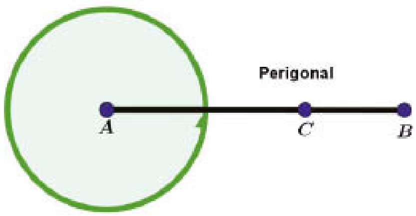


Figura 1.17.

3. **Por su relación con otros ángulos:**

a) **Adyacentes o consecutivos.** Son dos ángulos que tienen un lado en común. (figuras 1.18a y 1.18b).

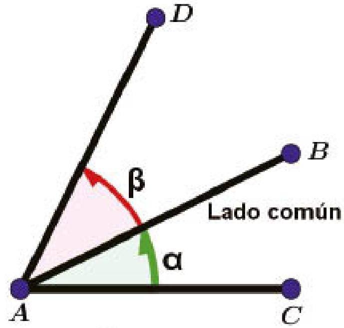


Figura 1.18a.

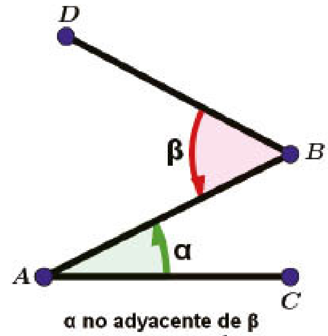


Figura 1.18b

b) **No adyacentes.** Aquellos que no tienen lados en común o que no comparten el vértice. (figura 1.19).

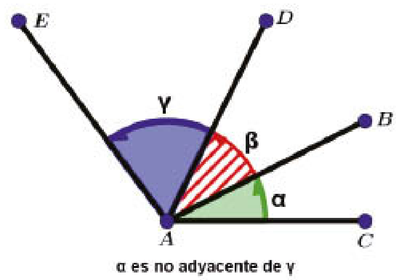


Figura 1.19.

c) **Opuestos por el vértice.** Son ángulos que se obtienen por la intersección de dos rectas no paralelas de modo que ambos tengan lados inicial y terminal en las mismas rectas. De este modo, en la figura 1.20, α es opuesto por el vértice de α' teniendo ambos a L_1 como lado inicial y a L_2 como lado terminal. Asimismo, β es opuesto por el vértice de β', pues ambos tienen a L_2 como lado inicial y a L_1 como lado terminal. Los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida. Por tanto, $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$.

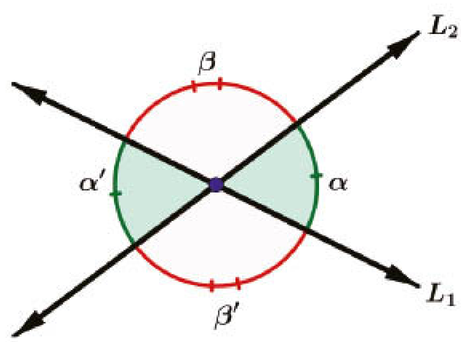


Figura 1.20.

4. **Por la suma de sus medidas:**

a) **Complementarios.** Son ángulos cuya suma de medidas es 90º. $\alpha + \beta = 90º$

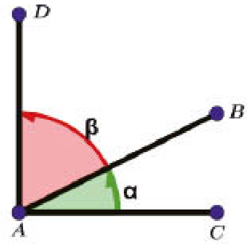


Figura 1.21.

b) **Suplementarios.** Son ángulos cuya suma de medidas es 180º. $\alpha + \beta = 180º$

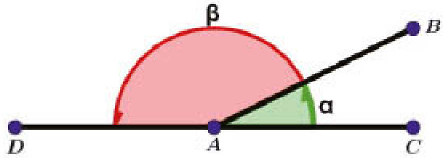


Figura 1.22.

Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal

Si cortas dos rectas paralelas por una **transversal**, como se muestra en la siguiente figura, se forman ocho ángulos, de los cuales hay cuatro ángulos agudos iguales entre sí y cuatro ángulos obtusos iguales entre sí, que se clasifican de la siguiente manera: ángulos opuestos por el vértice; ángulos internos alternos; ángulos alternos externos y ángulos correspondientes.

Transversal: aquello que cruza, corta o atraviesa.

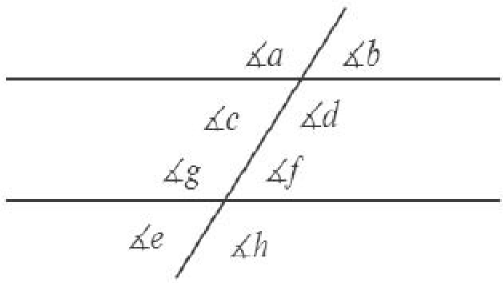


Figura 1.23.

Observa la figura 1.23. En ella se muestra un sistema de ocho ángulos, entre los cuales se pueden establecer las siguientes relaciones:

1. **Ángulos opuestos por el vértice:** $\measuredangle a$ y $\measuredangle d$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$ y $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$. Por tanto, en este sistema se cumple que $m\measuredangle a = m\measuredangle d$, $m\measuredangle b = m\measuredangle c$, $m\measuredangle e = m\measuredangle h$ y $m\measuredangle f = m\measuredangle g$.

2. **Ángulos correspondientes:** un ángulo es correspondiente de otro si al trasladar una paralela hacia la otra, dichos ángulos se sobreponen o enciman, de modo que son iguales. En la figura 1.23, $\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$ y $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$. Por tanto, en este sistema se cumple que $m\measuredangle a = m\measuredangle e$, $m\measuredangle b = m\measuredangle f$, $m\measuredangle c = m\measuredangle g$ y $m\measuredangle d = m\measuredangle h$.

3. **Ángulos internos:** son los ángulos entre las dos paralelas, como si se tratará de los ingredientes entre las dos rebanadas de pan en un sandwich. En la figura 1.23, los ángulos internos son: $\measuredangle c$, $\measuredangle d$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle f$.

4. **Ángulos externos:** son los ángulos fuera de las paralelas, como si se tratará de las aceitunas exteriores del sandwich ensartadas en el palillo que atraviesa las piezas de pan. En la figura 1.23, los ángulos externos son: $\measuredangle a$, $\measuredangle b$, $\measuredangle g$ y $\measuredangle h$.

5. **Ángulos alternos:** son los ángulos que se localizan hacia lados diferentes de la transversal. Entre los internos, los alternos internos son: $\measuredangle c$ y $\measuredangle f$ y $\measuredangle d$ y $\measuredangle e$. Estos ángulos tienen la propiedad de ser iguales, por lo tanto, $m\measuredangle c = m\measuredangle f$ y $m\measuredangle d = m\measuredangle e$. Entre los externos, los alternos externos son: $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ y $\measuredangle b$ y $\measuredangle g$, por lo tanto, $m\measuredangle a = m\measuredangle h$ y $m\measuredangle b \quad m\measuredangle g$.

6. **Ángulos colaterales:** son los ángulos que se localizan hacia el mismo lado de la transversal. Entre los internos, los colaterales internos son: $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$ y $\measuredangle d$ y $\measuredangle f$. Estos ángulos tienen la propiedad de ser suplementarios, por lo tanto, $m\measuredangle c + m\measuredangle e = 180^o$ y $m\measuredangle d + m\measuredangle f = 180^o$. Entre los externos, los colaterales externos son: $\measuredangle a$ y $\measuredangle g$ y $\measuredangle b$ y $\measuredangle h$, por lo tanto, $m\measuredangle a + m\measuredangle g = 180^o$ y $m\measuredangle b + m\measuredangle h = 180^o$.

Es posible encontrar otras relaciones, como las que se estudiaron antes, por ejemplo, podemos decir que los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle b$ son adyacentes y suplementarios; del mismo modo que $\measuredangle a$ y $\measuredangle c$.

Ejemplos:

1. Si $\angle A$ es complementario de $\angle B$ y $\measuredangle A$ mide 35°, ¿cuánto mide $\measuredangle B$?

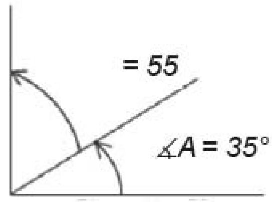


Figura 1.24.

Solución:

$\measuredangle A + \measuredangle B = 35° + 55° = 90°$

El ángulo $\measuredangle A$ es complemento del ángulo $\angle B$ y viceversa.

2. Si $\angle A$ es complementario de $\angle B$ y $\measuredangle A$ mide 37°, ¿cuánto mide $\measuredangle B$?

Solución:

Como los ángulos son complementarios deben sumar 90°, es decir: el $\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$, si el $\measuredangle A$ mide 37° entonces sustituyendo tenemos: $37° + \measuredangle B = 90°$

Despejando el $\measuredangle B$ tenemos: $\measuredangle B = 90° - 37°$

Conclusión:
$\measuredangle B = 53°$

3. Si $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son complementarios, ¿cuánto mide $\measuredangle B$ si $\measuredangle A = 71°$?

Solución:

Como los ángulos son complementarios deben sumar 90°, es decir: el $\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$, si el $\measuredangle A$ mide 71° entonces sustituyendo tenemos: $71° + \measuredangle B = 90°$

Despejando el $\measuredangle B$ tenemos: $\measuredangle B = 90° - 71°$

Conclusión:
$\measuredangle B = 19°$

4. Si $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son complementarios, y $\measuredangle A = (6x)^\circ$ y el $\measuredangle B = (9x)^\circ$, ¿cuánto vale cada ángulo?

Solución:

Como los ángulos son complementarios deben sumar 90°, es decir: el $\measuredangle A + \measuredangle B = 90^\circ$,

si $m\measuredangle A = (6x)^\circ$ *y* $m\measuredangle B = (9x)^\circ$ *entonces sustituyendo tenemos:* $(6x)^\circ + (9x)^\circ = 90^\circ$
Simplificando: $15^\circ x = 90^\circ$
Despejando x: $x = 90^\circ/15^\circ$
Donde $x = 6$

Conclusión: $\measuredangle A = 6 \times 6 = 36^\circ$ *y el* $\measuredangle B = 6 \times 9 = 54^\circ$

5. Si $\measuredangle A$ es suplementario de $\measuredangle B$ y $\measuredangle A = 88^\circ$, ¿cuánto mide $\measuredangle B$?

Solución:

Como los ángulos son suplementarios deben sumar 180°, es decir: el $\measuredangle A + \measuredangle B = 180^\circ$,
si $m\measuredangle A = 88^\circ$ *entonces sustituyendo tenemos:* $88^\circ + \measuredangle B = 180^\circ$
Despejando el $\measuredangle B$ *tenemos:* $\measuredangle B = 180^\circ - 88^\circ$
Conclusión:
$\measuredangle B = 92^\circ$

6. Si $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son suplementarios y $\measuredangle A = (3x)^\circ$ y el $\measuredangle B = (2x)^\circ$, ¿cuánto vale cada ángulo?

Solución:

Como los ángulos son suplementarios deben sumar 180°, es decir: el $\measuredangle A + \measuredangle B$ 180°, *si el si el* $\measuredangle A = (3x)^\circ$ *y el* $\measuredangle B = (2x)^\circ$ *entonces sustituyendo tenemos:* $(3x)^\circ + (2x)^\circ = 180^\circ$

Simplificando tenemos: $(5x)^\circ = 180^\circ$
Despejando x tenemos: $x = 180^\circ/5^\circ$
Donde $x = 36$

Conclusión: $\measuredangle A = 3 \times 36 = 108^\circ$ *y* $\measuredangle B = 2 \times 36 = 72^\circ$

7. Para el sistema angular de la figura 1.25, ¿cuánto miden los ángulos $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle D$?

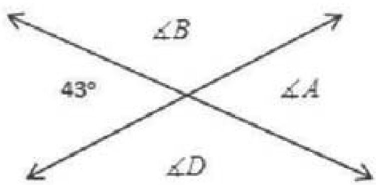


Figura 1.25.

Solución:

Se observa en la figura 1.26 que el ángulo indicado es opuesto por el vértice del $\measuredangle A$ *= 43°. Como el ángulo* $\measuredangle A$ *y* $\measuredangle D$ *son suplementarios, entonces:* $\angle A + \angle D = 180°$

Sustituyendo: $43° + \measuredangle D = 180°$

Despejando: $\measuredangle D = 180° - 43°$

Conclusión: $\measuredangle D = 137°$

Como $\measuredangle D$ *y* $\measuredangle B$ *son opuestos por el vértice, entonces* $\measuredangle D = \measuredangle B$*, que lleva a que* $\measuredangle B = 137°$ *pero* $\measuredangle A + \measuredangle B = 180°$*, por lo que* $\measuredangle A + 137° = 180°$

De donde $\measuredangle A = 180° - 137°$

y así $\measuredangle A = 43°$

Dado que $\measuredangle A$ *es opuesto por el vértice de* $\measuredangle C$ *tenemos que* $\measuredangle C = 43°$.

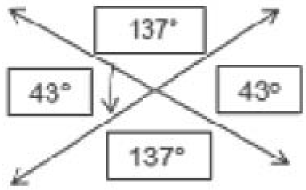


Figura 1.26.

Esta solución está representada en la figura 1.26.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Lee detenidamente las indicaciones de los ejercicios siguientes para encontrar las soluciones de cada uno de ellos, realizando las operaciones necesarias en tu libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase, escucha las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

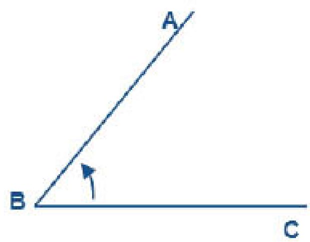


Figura 1.27.

I. Tomando como base la figura 1.27, atiende las indicaciones:

a) Marca de color rojo el segmento que representa el lado inicial del ángulo.

b) Marca con color azul el segmento que representa el lado terminal del ángulo.

c) Ilumina de color verde la abertura del ángulo.

d) Escribe dos formas distintas de nombrar al ángulo.

....

....

e) ¿Es verdad que $m\angle CBA = m\angle ABC$?

....

....

II. Utilizando los conceptos de ángulos complementarios y suplementarios, halla el valor de la variable *x* y determina la medida de los ángulos de cada inciso de la figura 1.28.

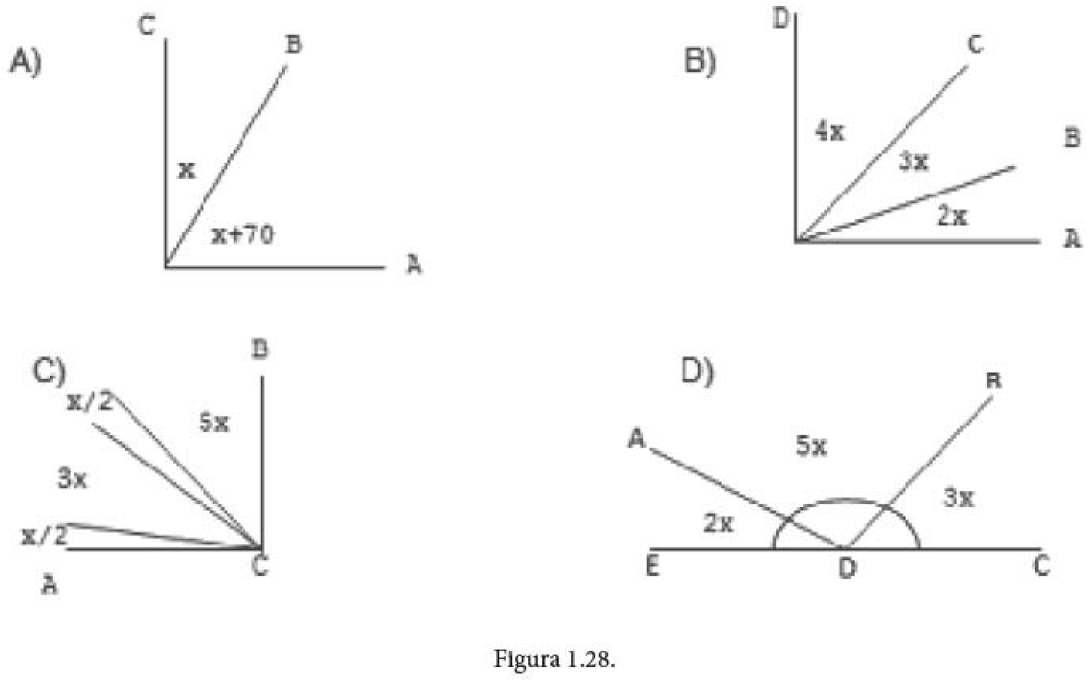


Figura 1.28.

III. Resuelve los siguientes problemas escribiendo en tu libreta los procedimientos completos que sean evidencia del análisis realizado para obtener tus resultados.

1. Calcula el ángulo complementario de cada caso:
   a) 47° b) 35° c) 68° d) 0°

2. Calcula el ángulo suplementario en los siguientes casos:
   a) 75° b) 104° c) 135° d) 95°

3. Encuentra dos ángulos que sean complementarios cuando el mayor es 40° más grande que el menor.
4. Encuentra dos ángulos que sean suplementarios cuando el mayor es el triple del menor.
5. Encuentra dos ángulos que sean consecutivos y formen un ángulo de 120°, el mayor debe tener 20º menos que el triple del menor.
6. Dos ángulos son suplementarios y el mayor tiene 58° más que el menor ¿Cuáles son las medidas de los ángulos?
7. Los ángulos son opuestos por el vértice y suplementarios ¿Es posible esto?
8. Dos ángulos son consecutivos y juntos forman un ángulo de 75°, su diferencia es de 21°. Calcula sus medidas.
9. Dos ángulos son suplementarios, uno de ellos tiene 20° más que el cuádruplo del otro ¿Cuál es la medida del ángulo menor?

10. Considerando la figura 1.29, responde:

Si los ángulos internos miden:

$\measuredangle a = 20°$

$\measuredangle b = 35°$

$\measuredangle c = 35°$

$\measuredangle d = 55°$

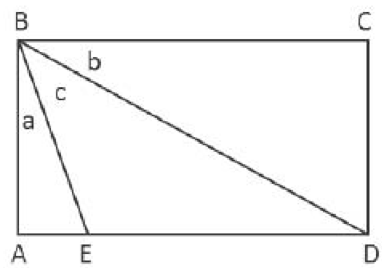


Figura 1.29.

a) Calcular la medida del $\angle ADC$
b) Calcular la medida del $\angle AEB$
c) Calcular la medida del $\angle EBD$
d) Calcular la medida del $\angle ABC$

11. ¿Cuánto vale el ángulo de giro o rotación que genera la manecilla que marca la hora o la manecilla que marca los minutos de un reloj análogo?

a) Por el horario de cuatro horas.
b) Por el minutero en 1/3 de hora.

12. ¿Cuánto vale el ángulo de rotación que se obtiene?

a) ¿Desde el oeste hasta el noroeste en el sentido del reloj?
b) ¿Desde el oeste hasta el sur en el sentido contrario del reloj?
c) ¿Desde el suroeste hasta el noroeste en cualquier sentido?

13. ¿Qué ángulo forman las manecillas de un reloj análogo, tomando como lado inicial la manecilla que marca los minutos y como lado final la manecilla que marca la hora?

a) A las 3 en punto.
b) A las 10 en punto.
c) A las 5:30 horas.
d) A las 11:30 horas.

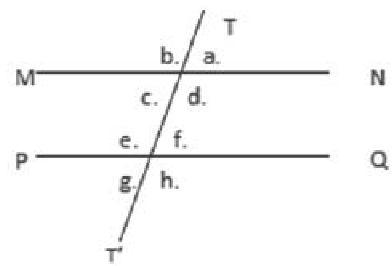


Figura 1.30.

14. De acuerdo con la figura 1.30, responde en tu cuaderno las indicaciones de los incisos:

a) Uno de los ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante tiene 43°, ¿cuánto miden los demás?
b) En las paralelas cortadas por la secante, si ∠a es la mitad de ∠d, calcula el valor de los ocho ángulos formados.
c) ¿Es posible que el ∠c mida 61° y sea la mitad del ∠f? ¿Por qué? ¿son paralelas las rectas MN y PQ? ¿Por qué?

15. Calcula los valores de (*x*) y (*y*) en las figuras 1.31, 1.32 y 1.33, sabiendo que AB || CD:

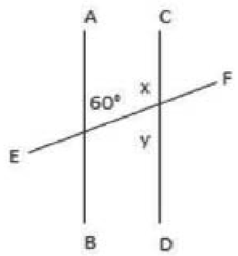


Figura 1.31.

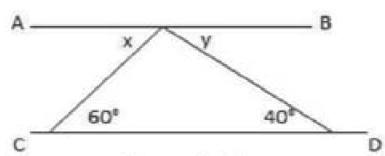


Figura 1.32.

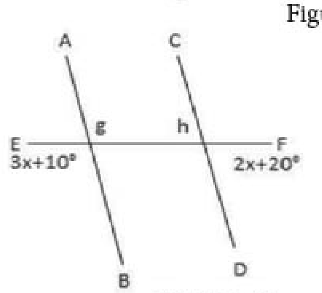


Figura 1.33.

16. Escribe el valor de todos los ángulos en cada una de las figuras 1.34, 1.35 y 1.36.

A)

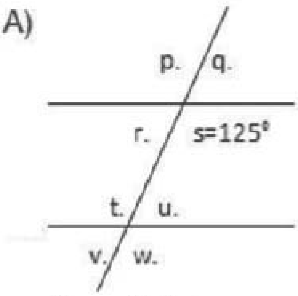


Figura 1.34.

B)

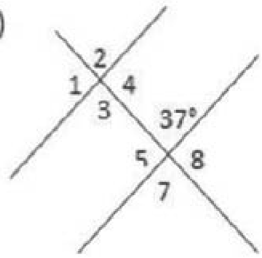


Figura 1.35.

C)

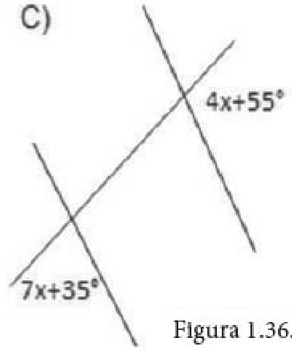


Figura 1.36.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Al observar los muebles de tu casa ¿se forman ángulos en ellos? ¿Qué tipo de ángulos? Explica breve y claramente.

....

....

....

....

Aprende más

Triángulos

Un **triángulo** es una figura cerrada que tiene tres lados y tres ángulos. Algunos lo definen como polígono de tres ángulos (partiendo de su raíz etimológica). Generalmente empleamos el símbolo Δ y las letras de sus vértices para referirnos a un triángulo, por ejemplo: ΔABC hace referencia al triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, respectivamente.

Existen **anécdotas** sobre triángulos, algunas de ellas célebres, ¿conoces alguna? El "triángulo de las Bermudas", **enigmático** y misterioso; el "triángulo de Pascal", poderoso y útil; los triángulos en las caras de las pirámides de Egipto, monumentales y llenos de ciencia e historia; en fin, existen muchos ejemplos que pueden motivarte a desarrollar ideas que tienen que ver con el triángulo, su definición, clasificación, propiedades fundamentales y diversas aplicaciones en contextos diferentes.

Anécdota: relato breve de un suceso que le haya pasado a alguien.

Enigmático: algo que contiene un misterio oculto, difícil de entender o resolver.

Área geográfica del Triángulo de las Bermudas.


Pirámide de Guiza, Egipto.

Clasificación de los triángulos

Los triángulos pueden ser clasificados de acuerdo con los siguientes criterios:

1. **Por la medida de sus lados:**

a) **Equilátero.** Es el que tiene sus tres lados iguales.

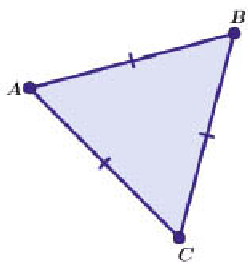


Figura 1.37.

b) **Isósceles.** Tiene dos lados iguales y el tercero diferente a ellos.

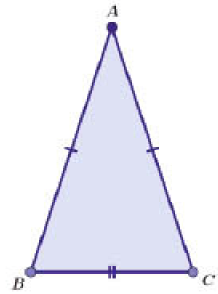


Figura 1.38.

c) **Escaleno.** Tiene sus tres lados de diferente medida.

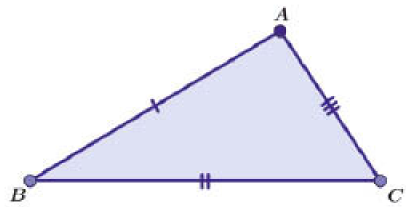


Figura 1.39.

2. Por la abertura de sus ángulos:

a) **Rectángulo.** Tiene un ángulo interior recto y los otros dos agudos.

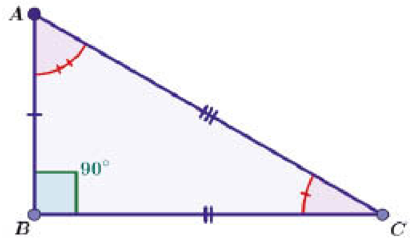


Figura 1.40.

b) **Acutángulo.** Tiene sus tres ángulos interiores agudos.

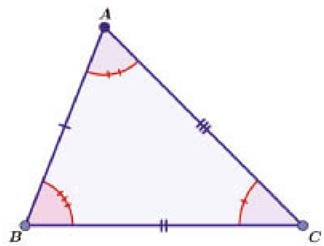


Figura 1.41.

c) **Obtusángulo.** Tiene un ángulo interior obtuso y los otros dos agudos.

Lo importante es distinguir las partes principales del triángulo: lados, ángulos, vértices y, desde luego, la sección del plano que delimitan sus lados, es decir: su superficie. El triángulo es también cada punto que se encuentra dentro de él.

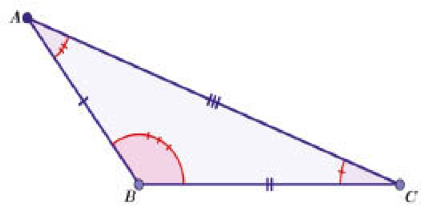


Figura 1.42.

Propiedades relativas de los triángulos

Propiedades: reglas que se obtienen de los axiomas.

Axiomas: verdades lógicas mínimas de donde nace la Matemática.

1. El triángulo es el polígono más simple.

2. El triángulo no tiene diagonales.

3. Tres puntos no alineados (colineales) forman siempre un triángulo.

4. Todo polígono puede ser dividido por medio de triángulos. Para un polígono de n lados se requieren como mínimo $n-2$ triángulos.

5. La suma de dos lados siempre es mayor que el tercero y la diferencia entre dos lados es siempre menor que el tercero (desigualdad triangular).

6. La suma de todos los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° (figura 1.43).

7. La suma de los ángulos exteriores de todo triángulo es igual a 360° (figura 1.44).

8. En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa (figura 1.45).

9. Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60° (figura 1.46).

10. En todo triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto (90°) se llama **hipotenusa** y los lados adyacentes al ángulo recto se denominan **catetos**. La hipotenusa es mayor que los catetos; en consecuencia, el lado de mayor medida del triángulo.

11. En todo triángulo rectángulo los catetos son base y altura, respectivamente.

12. En un triángulo rectángulo isósceles cada uno de sus ángulos agudos mide 45°.

13. Los lados de cualquier triángulo rectángulo obedecen el enunciado del teorema de Pitágoras, que dice que "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

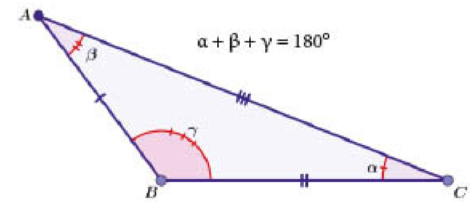


Figura 1.43.

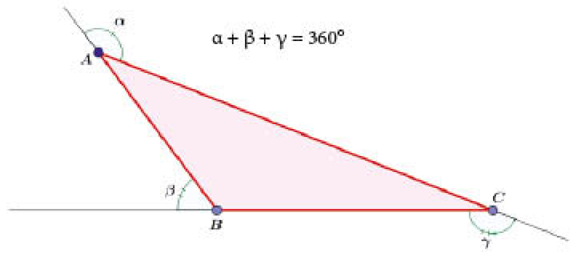


Figura 1.44.

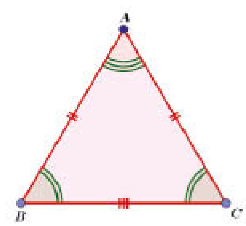


Figura 1.45.

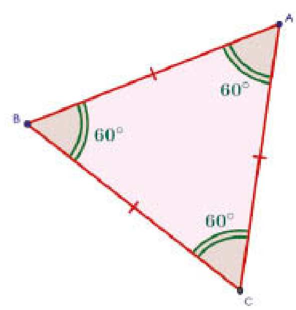


Figura 1.46.

14. En un triángulo isósceles, la altura que corresponde a la base (lado desigual) también es mediana, bisectriz y mediatriz del triángulo.

15. En todo triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

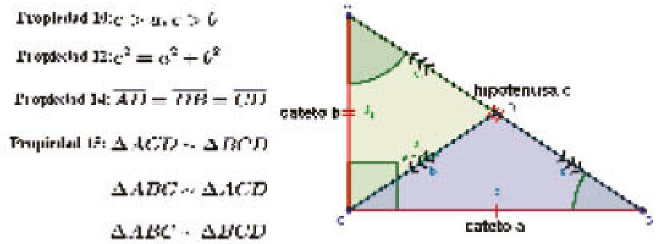


Figura 1.47.

16. En todo triángulo rectángulo, la altura del ángulo recto lo divide en dos triángulos semejantes entre sí y, a su vez, semejantes con él.

17. En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a éste.

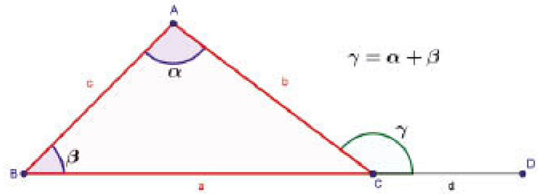


Figura 1.48.

Todas estas propiedades pueden ser demostradas y empleadas en la solución de problemas. De hecho, en bloques siguientes se demuestran y se emplean algunas de ellas.

Ejemplos:

1. Demuestra que la suma de ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.

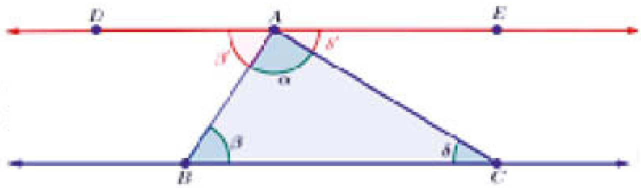


Figura 1.49.

Solución:

Paso 1. *Prolongamos la base del triángulo BC y construimos una paralela que pase por A, como muestra la figura 1.49.*

Paso 2. *Observa que los lados AB y AC son transversales para el sistema de paralelas DE y BC. De este modo, podemos afirmar que:*

$\angle ABC$ *es alterno interno de* $\angle DAB$ *por lo que* $m\angle DAB = m\angle ABC$; *es decir,* $\beta' = \beta$.

$\angle ACB$ *es alterno interno de* $\angle EAC$ *por lo que* $m\angle ACB = m\angle EAC$; *es decir,* $\delta' = \delta$.

Paso 3. *Los ángulos* $\angle DAB$, $\angle BAC$ *y* $\angle EAC$ *son consecutivos y forman un ángulo llano; es decir,* $\beta' + \alpha + \delta' = 180°$. *Dado que* $\beta' = \beta$ *y que* $\delta' = \delta$ *tenemos que* $\alpha + \beta + \delta = 180°$; *que es lo que se quería demostrar; es decir, que "la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°".*

2. Demuestra que la medida de un ángulo exterior de un triángulo cualquiera es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a dicho ángulo exterior.

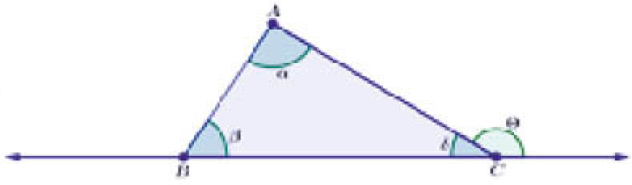


Figura 1.50.

Solución:

Paso 1. *Observamos, en la figura 48, que el ángulo exterior en C es suplementario del ángulo interior en C; es decir,* $\delta + \theta = 180°$.

Paso 2. *Por suma de ángulos interiores, demostrada en el ejemplo anterior, tenemos que:* $\alpha + \beta + \delta = 180°$, *de donde, despejando* δ *se tiene que:* $\delta = 180° - (\alpha + \beta)$.

Paso 3. *Sustituyendo la expresión para* δ *en la expresión del paso 1, tenemos que:*

$180° - (\alpha + \beta) + \theta = 180°$, *que lleva a*

$$\cancel{180°} - (\alpha + \beta) + \theta = \cancel{180°}$$
$$-(\alpha + \beta) + \theta = 0$$

pasamos sumando la expresión del paréntesis al otro lado: $\theta = 0 + (\alpha + \beta)$

y, finalmente, $\theta = \alpha + \beta$; *que es lo que se quería demostrar; es decir, que "la medida de un ángulo exterior (* θ *) es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a dicho ángulo exterior (* α *y* β *)".*

3. Determina el valor de *x* de la figura 1.51.

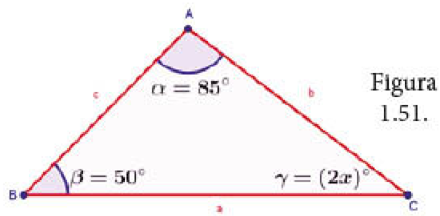


Figura 1.51.

Solución:

Paso 1. *Por suma de ángulos interiores, demostrada en el primer ejemplo, tenemos que:* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Paso 2. *Sustituyendo los valores de los ángulos interiores de la Figura 49, tenemos la expresión:* $85° + 50° + (2x)° = 180°$

Paso 3. *Despejando el valor de* x *tenemos que*

$135° + (2x)° = 180°$

$(2x)° = 180° - 135°$

$(2x)° = 45°$

$x = \dfrac{45°}{2°}$ *Finalmente* $x = 22.5°$

4. En un triángulo isósceles los lados iguales miden el doble de la base, ¿cuánto mide la base, si el perímetro es de 75 cm?

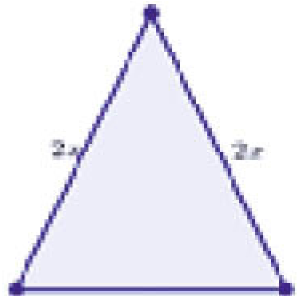


Figura 1.52.

Solución:

Sea x la medida de la base, entonces

Dado que $P = 75$ *cm se tiene que*

$2x + 2x + x = 75$

$5x = 75$

$x = \frac{75}{5}$

Finalmente:

$x = 15$

Respuesta: La base mide 15 cm.

5. Determina el valor de x en la figura 1.53.

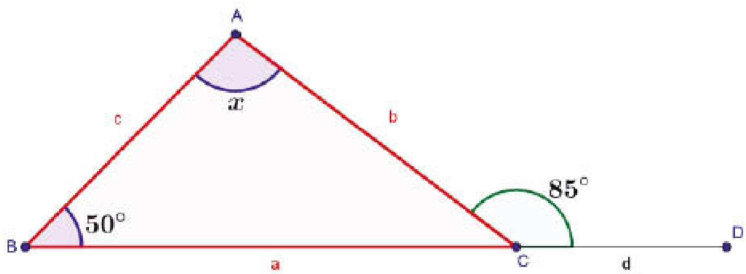


Figura 1.53.

Solución:

Por la propiedad del ángulo exterior, demostrada en el ejemplo 2, tenemos que:

$95° = x + 50°$

Despejando la variable x se tiene que:

$95° - 50° = x$

$45° = x$

Aplicando la propiedad de simetría de la igualdad:

$x = 45°$

6. Si los tres ángulos interiores del triángulo ABC miden $x°$, ¿qué tipo de triángulo es ABC? **Solución:**

Por la propiedad que enuncia que "a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa", podemos afirmar que los tres lados del triángulo son iguales; por lo que podemos concluir que el triángulo es un triángulo equilátero.

Para confirmar esto, recurramos a la propiedad que enuncia que los ángulos interiores de cualquier triángulo equilátero miden 60°.

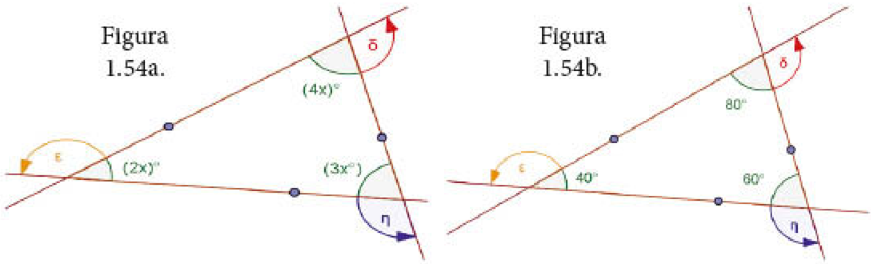
Por la propiedad de suma de ángulos interiores tenemos que: $x° + x° + x° = 180°$, *de donde*

$(3x)° = 180°$

$x = \frac{180°}{3°}$

$x = 60°$ *que confirma que el triángulo ABC es un triángulo equilátero.*

7. Si los ángulos interiores del triángulo ABC son *(4x)°*, *(3x)°* y *(2x)°*, respectivamente, ¿cuánto miden sus ángulos exteriores? Construye la gráfica del triángulo ABC.



Solución:

Por la propiedad de suma de ángulos interiores tenemos que:

$(4x)° + (3x)° + (2x)° = 180°$, *de donde*

$(9x)° = 180°$

$x = \frac{180°}{9°}$

$x = 20°$

Por la propiedad del ángulo exterior, demostrada en el ejemplo 2, tenemos que:

Para $(4x)°$:	*Para* $(3x)°$:	*Para* $(2x)°$:
$\delta = (2x)° + (3x)°$	$\eta = (2x)° + (4x)°$	$\varepsilon = (3x)° + (4x)°$
$\delta = (5x)° = (5(20))°$	$\eta = (6x)° = (6(20))°$	$\varepsilon = (7x)° = (7(20))°$
$\delta = 100°$	$\eta = 120°$	$\varepsilon = 140°$

8. En la figura 1.55 se muestra un banderín de "Las chivas". Con base en la información proporcionada, determina su área.

Figura 1.55.

Solución:

Si rotamos el triángulo hacia la izquierda, obtenemos un triángulo isósceles con base igual a 60 cm) y 80 cm de altura. Tenemos que el área del banderín es:

$$A = \frac{b \bullet h}{2}$$

$$A = \frac{(80\ cm)(60\ cm)}{2} = \frac{4800}{2}\ cm^2 = 2400\ cm^2$$

Respuesta: El banderín tiene un área de 2400 cm².

9. En la figura 1.56 se muestra una imagen de una portería de fútbol en la que se ve el punto de tiro penal. Si se sabe que la distancia entre los postes es de 7.32 m y la distancia desde el centro de la portería hasta el punto penal es de 11 m, determina el área de barrido (en color verde) para obtener un gol por tiro penal.

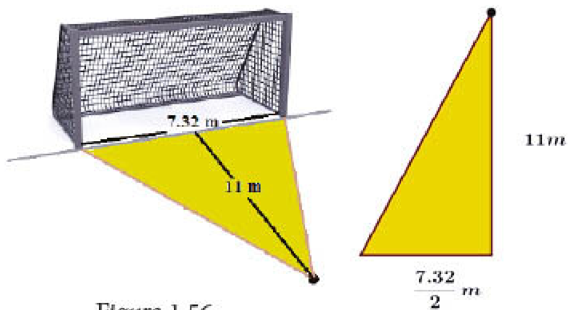


Figura 1.56.

Solución:

El área de barrido que interesa calcular puede dividirse en dos triángulos rectángulos,

de modo que los catetos de cada uno son de $\frac{7.32\ m}{2}$ *y 11 m, respectivamente.*

Por la propiedad que enuncia que los catetos de todo triángulo rectángulo son base y altura, respectivamente, tenemos que el área de cada triángulo rectángulo está dada por

$$A = \frac{(3.66\ m)(11\ m)}{2} = \frac{40.26\ m^2}{2} = 20.13\ m^2$$

El área de barrido para anotar un penal es del doble del área calculada, por lo tanto, el área buscada es de 40.26 m², aproximadamente.

10. La figura 1.57 muestra una señal de peligro eléctrico. Si las medidas proporcionadas son correctas, determina la medida del lado BC, justificando tu respuesta mediante el uso de las propiedades de los triángulos estudiadas en esta unidad.

Solución:

De la propiedad que enuncia que "A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa", podemos afirmar que $m\angle BCA = m\angle ABC$, pues se oponen a lados de 25 cm. Por la propiedad de suma de ángulos interiores, tenemos que:

$m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle BAC = 180°$

$60° + 60° + m\angle BAC = 180°$

$60° + 60° + m\angle BAC = 180°$

$120° + m\angle BAC = 180°$

$m\angle BAC = 180° - 120°$

$m\angle BAC = 60°$

Podemos concluir entonces que ΔABC es un triángulo equilátero. Así, el lado $\overline{BC}$, que también se opone a un ángulo de 60°, es de 25 cm.

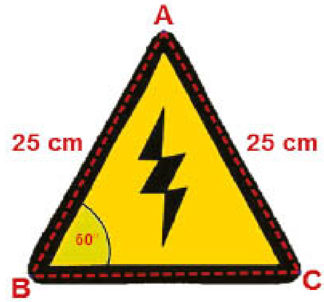


Figura 1.57.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Lee detenidamente las indicaciones de los ejercicios siguientes para encontrar las soluciones de cada uno de ellos. Realiza las operaciones necesarias en tu libreta o cuaderno con orden y limpieza.

1. Responde en tu cuaderno los siguientes incisos, considerando la figura 1.58:

a) El número de triángulos que hay:

....

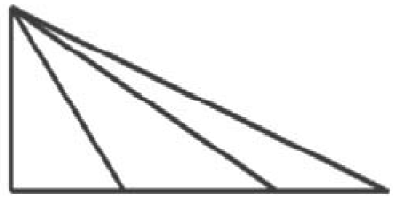


Figura 1.58.

b) ¿Cuántos de ellos son triángulos rectángulos? ....

c) ¿Cuántos son obtusángulos? ....

d) ¿Alguno es escaleno, isósceles o equilátero? ....

Reúnete con un compañero y resuelvan los siguientes problemas. Después comenten sus observaciones con tus compañeros.

2. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 30°, ¿cuánto medirá el otro ángulo agudo? Justifica tu respuesta.

3. Se sabe que la medida del ángulo del vértice (donde se cortan los lados iguales) de un triángulo isósceles es 60°, ¿qué podemos afirmar acerca del triángulo? Justifica cada una de tus observaciones.

4. ¿Es posible construir un triángulo con ángulos que midan 45°, 45° y 90°? ¿Qué tipo de triángulo sería? De ser afirmativa la respuesta, constrúyelo.

5. Demuestra la propiedad que enuncia que "la suma de los ángulos exteriores de todo triángulo es igual a 360°".

6. En el triángulo de la figura 1.59 calcula los valores de x y y. Justifica tus respuestas empleando las propiedades de los triángulos estudiadas.

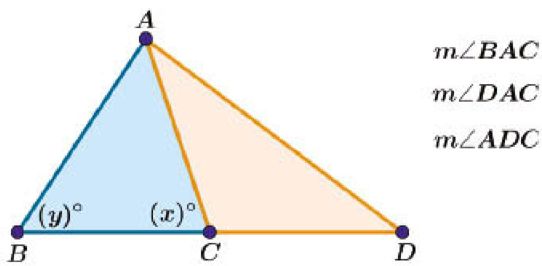


Figura 1.59.

7. En la figura 1.60, se muestra una bicicleta cuyo "cuadro" tiene la siguiente información: ΔBCD es triángulo equilátero con lados de 20 cm, $m\angle ABC = 150°$ y $m\angle CDA = 105°$. Calcula la longitud de $\overline{AB}$ y $m\angle BAD$. Justifica tus respuestas con base en las propiedades de los triángulos.

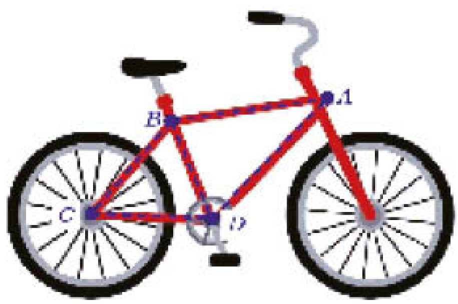


Figura 1.60.

8. De acuerdo con la información de la figura 1.61, calcula la altura del columpio (AD).

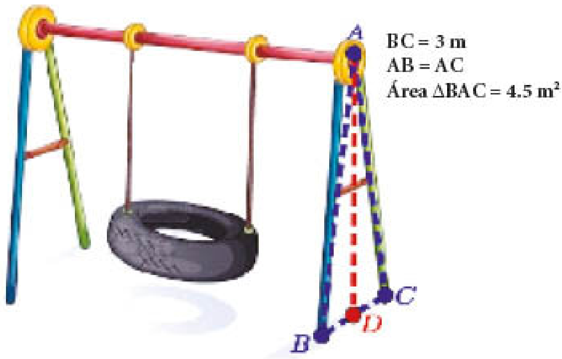


Figura 1.61.

9. La fotografía de la figura 1.62 muestra las extremidades de un pato. Puedes observar que es posible considerar que cada una se forma de dos triángulos, que en la imagen corresponden a ΔABC y ΔACD. Si se sabe que los triángulos son equiláteros con lados de 5 cm y que la altura de cada triángulo mide 4.3 cm, aproximadamente, calcula el perímetro y el área de cada pata.

Figura 1.62.

10. Si en la figura 1.63, el área del triángulo ABC es de 0.75 m^2, ¿a qué altura sobre el piso se localiza el extremo superior de la escalera?

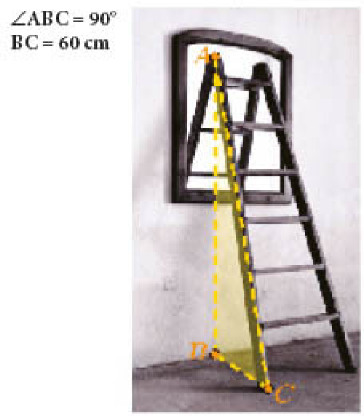


Figura 1.63.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Actividad 3

Instrucciones:

I. Lee con atención cada enunciado y escribe sobre las líneas la palabra que falta para que sea correcta la expresión dada.

1. Las rectas ______________ son las que están en el mismo plano y no se interceptan.
2. La distancia más corta entre dos puntos es el ____________ que los une.
3. Dos rectas paralelas a una tercera son ______________ entre sí.
4. Las paralelas a ℓ, comprendidas entre rectas paralelas a ellas son ______________ entre sí.
5. Las rectas ____________________ se cortan formando ángulos adyacentes iguales.

II. Relaciona ambas columnas, de manera que cada pareja de ángulos tenga el nombre que le corresponda. Observa detenidamente la figura 1.64.

( ) g y m	A) Opuestos por el vértice
( ) d y e	B) Adyacentes
( ) a y c	C) Correspondientes
( ) p y m	D) Alternos externos
( ) f y g	E) Colaterales internos
( ) b y o	F) Colaterales externos

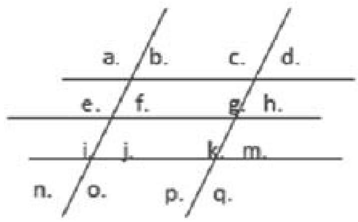


Figura 1.64

III. Con base en la figura 1.65 escribe la razón que justifique cada afirmación.

$\hat{1} = \hat{4}$ por ser ____________________

$\hat{3} + \hat{5} = 180^\circ$ por ser ____________________

$\hat{2} + \hat{8} = 180^\circ$ por ser ____________________

$\hat{2} = \hat{7}$ por ser ____________________

$\hat{3} = \hat{6}$ por ser ____________________

$\hat{4} = \hat{8}$ por ser ____________________

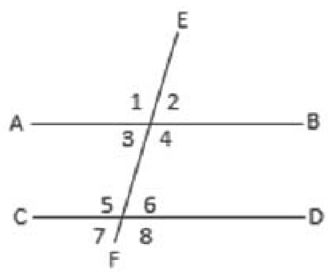


Figura 1.65

IV. Tomando en cuenta las figuras 1.66 y 1.67, escribe el valor de los ángulos pedidos.

a =

b =

c =

d =

e =

f =

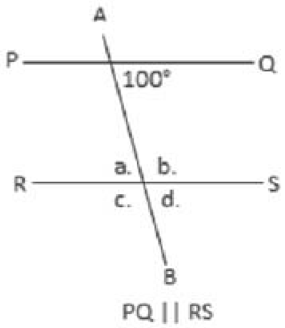


Figura 1.66.

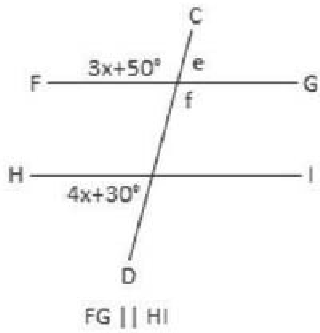


Figura 1.67.

V. Si se tiene un triángulo cuyos ángulos están en la proporción 1:4:5, ¿cuánto miden sus ángulos? Subraya tu respuesta.

a) 30°, 60° y 90°
b) 20°, 70° y 90°
c) 15°, 75° y 90°
d) 18°, 72° y 90°

VI. Si ∠ACB = 50°, ΔABC y ΔABD son isósceles, determina los valores de los ángulos de la base del ΔABC. ¿Consideras que ambas figuras están en el mismo plano a partir de los resultados obtenidos? Justifica tu respuesta en tu cuaderno.

VII. Determina el valor de los ángulos de las variables x e y en la figura 1.68.

Figura 1.68.

VIII. Determina el valor de los ángulos de las variables x e y en la figura 1.69.

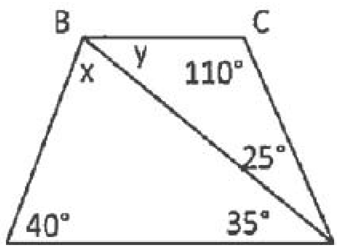


Figura 1.69.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si observas los objetos que existen en tu salón de clase, ¿en ellos se formarán triángulos? ¿Qué tipo de triángulos? Explica breve y claramente.

....

....

....

Actividad 4

Producto de aprendizaje: diseño y construcción de un papalote

Vamos a aprender a hacer un papalote, en él podremos ver que se formarán triángulos y aplicarás los conceptos vistos en este bloque.

Estos son los materiales que vas a necesitar:

- Hilo blanco
- Papel de china
- Tijeras
- Pegamento
- 3 o más varillas de carrizo u otra madera que sea ligera.

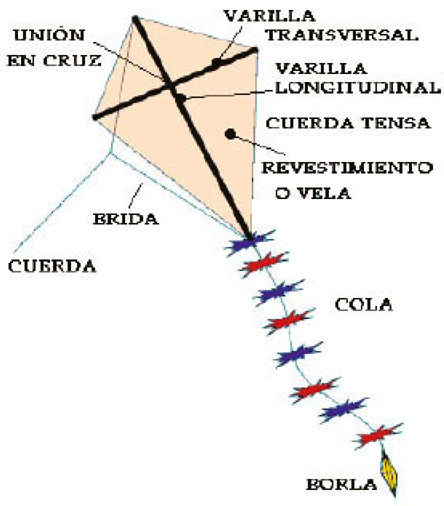


Figura 1.70.

Procedimiento

1. Con las varillas de carrizo construye la forma del papalote, puede ser de un triángulo (escaleno, isósceles, equilátero y/o triángulo rectángulo) y, átalas muy firmemente con varios nudos en la intersección.

2. En las partes laterales de la varilla de carrizo en forma de triángulos, y a una distancia igual a cada lado partiendo desde el centro, ata dos tiras de hilo.

3. Ahora, con mucho cuidado, debes atar estos dos trozos de hilo a una distancia del centro como si quisiésemos hacer un triángulo equilátero. Desde ese nudo ata el resto del hilo blanco que debe tener una longitud mínima de 5 metros de largo, que es el hilo que cogerás para echar a volar el papalote.

4. Recorta el papel de china de manera que formes un triángulo o triángulos que cubran las varillas de extremo a extremo y pégalos a éstas adhiriéndolo con pegamento que previamente habrás distribuido a lo largo de cada varilla por la parte en la que lo vas a pegar.

5. Con lo que te sobre del papel de china, recorta una tira que hará la cola del papalote y la pégala al extremo inferior del triángulo formado por las varillas. Y ya tienes tu papalote. ¡Listo!

Ahora debes aprender a hacer volar un papalote. Los papalotes se echan a volar con ayuda, mientras otra persona agarra el papalote en posición vertical alejada del suelo, tú que tienes el hilo, echas a correr y la otra persona debe soltar el papalote antes de sentir el tirón del hilo. Cuanto más largo sea el hilo una vez echado a volar, más alto volará.

Reflexión: responde a las siguientes preguntas

- ¿Cuántos triángulos conforman tu papalote?
- ¿Qué tipo de triángulos son?
- ¿Cuáles son las medidas de los ángulos que tiene tu papalote?

Presenta tu trabajo (papalote) con dos tarjetas del tamaño de una media hoja o cuartilla. En una colocarás la reflexión y en la otra tus datos: nombre del estudiante, asignatura, semestre, fecha.

Figura 1.71.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: diseño y construcción de un papalote

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Conceptos	Trazo alineado de los triángulos en papel.			
	Trazo de las varillas con medidas específicas.			
	Los lados de los triángulos son semejantes.			
	Medidas de los ángulos son iguales.			
	Simetría de los ejes del papalote.			
Presentación	Datos del: estudiante, asignatura, semestre, fecha.			
	Creatividad en la construcción del papalote.			
	Funcionamiento adecuado.			
Reflexión personal	Responde a las preguntas de forma precisa.			
Total de puntos		**10**		

Si en la lista de cotejo lograste los **10 puntos**, considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **9 a 10 puntos** es **Bien**, de **6 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para el portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	El portafolio es entregado de forma impresa y limpio.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden en los procedimientos.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	Ejercicios I, II y III de la actividad 1 sin error.			
	Dibujo y conclusión del apartado de semejanza 10 ejercicios de la actividad 2 sin error.			
	Ejercicios del I al IX de la actividad 3 sin error.			
	Actividad 4 Producto de aprendizaje sin error.			
Total de puntos		11		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos** considera tu resultado como **Excelente,** y si lograste **9 a 10 puntos** es **Bien**, de **6 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque I

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
	Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Explica e Interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque II

Comprendes la congruencia de triángulos

Introducción

En el bloque anterior estudiamos dos conceptos básicos de la Geometría: ángulos y triángulos. También analizamos las relaciones métricas que dan lugar a las clasificaciones de dichos conceptos.

En el presente apartado analizaremos un elemento de la Geometría que resulta muy útil en nuestra vida diaria y se conoce como “congruencia de figuras”. Este elemento lo podemos utilizar para verificar, si dos ventanas de nuestra casa o escuela son iguales, o también si las ruedas de los transportes son iguales y adecuadas.

El término congruencia se conoce como “igualdad de figuras” o figuras iguales y se utiliza cuando se crea algún objeto y éste requiere de dos partes o más partes iguales.

Iniciaremos nuestro estudio del concepto de congruencia desde el elemento natural del término, es decir, de lo que viene a nuestra mente cuando escuchamos el término “iguales”. Así avanzaremos hacia llegar a la formalización del término “congruencia” aplicado en diversas situaciones de la Geometría plana.

Este segundo bloque presenta definiciones, información, casos y actividades, así como ejercicios e instrumentos de evaluación.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	• *Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.* • *Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.*

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Cuantifica, representa y contrasta, experimental o matemáticamente, las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Aplicas el criterio de congruencia de los triángulos en determinados problemas de tu propio contexto y argumentas el uso de este criterio en la solución de ellos.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	Triángulos: criterios de congruencia • L, L, L (Lado, Lado, Lado) • L, A, L (Lado, Ángulo, Lado) • A, L, A (Ángulo, Lado, Ángulo)	Comprensión de textos. Observación de objetos y gráficos. Identifica formas. Resolución de problemas.
Procedimentales	Aplicación de los criterios de congruencia para establecer si dos o más triángulos son congruentes entre sí. Resolución de ejercicios para aplicar los criterios de congruencia. Argumentación del uso de los criterios de congruencia.	Realización de ejercicios y aplicación de los criterios de congruencia en los triángulos. Presentación del proceso para llegar a la solución de problemas. Expresa el procedimiento y solución de problemas.

Actitudinales	Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje. Compartir ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.	Exposición de trabajos con criterios de orden y limpieza. Respeto y escucha las opiniones y/o argumentos de otras personas. Seguimiento e interpretación de instrucciones.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 3 horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices 1 hora para revisar los contenidos temáticos y 2 horas para llevar a cabo las actividades propuestas, el desarrollo de tu producto de aprendizaje y las evaluaciones.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Problemario
- Construcción de un rompecabezas

Tu **problemario matemático** es la evidencia del concentrado de estructuras matemáticas que demuestra la explicación de los resultados obtenidos. Lo elaborarás en una libreta o cuaderno, donde muestres los problemas, procedimientos (el planteamiento de la actividad a tinta y proceso de solución a lápiz), resultados marcados con tinta y trazos geométricos del bloque, éstos deben mostrarse con orden y limpieza. Además debe incluir una carátula con tus datos (nombre, asignatura, bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha) y un índice.

Los productos serán evaluados con los instrumentos presentados al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

La congruencia de figuras es un constructo matemático que tú ya has explorado en cursos anteriores (secundaria). Si observas los dos triángulos de la figura 2.1, ¿Podrás determinar si son iguales? ¿Qué pasos darías para tomar tu decisión? ¿Cuáles son los detalles a observar?

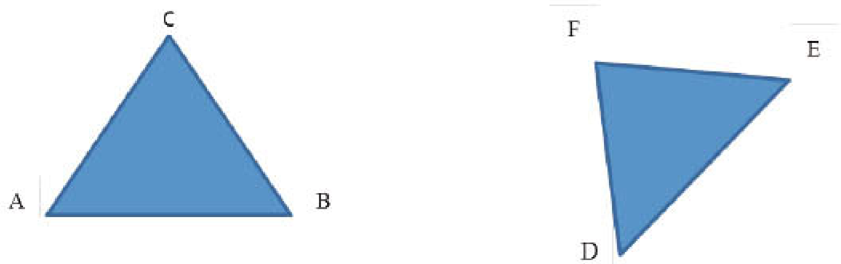


Figura 2.1.

Escribe tres detalles que ayudarían a determinar si los dos triángulos son iguales:

a) ....

b) ....

c) ....

¿Con qué conocimientos cuentas?

Has llegado al segundo bloque de Matemáticas II. Para comprenderlo es conveniente recordar lo visto en el primer bloque.

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Lee detenidamente las indicaciones de los incisos que se muestran enseguida y en tu libreta o cuaderno realiza las operaciones necesarios para dar respuesta a lo que se te solicita.

1. Si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la figura 2.2 tienen la misma medida, y se representan por $2x+10$ y $5x-43$, respectivamente, halla el valor de x:

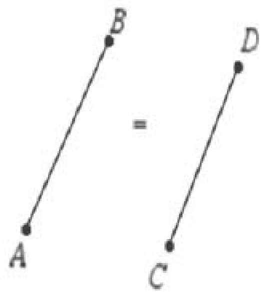


Figura 2.2.

2. Se sabe que $x=a+2b-5$, $y=2a+b-1$, $z=a-3b$.

   Hallar los valores de:

   a) $2x+y-3z=$

   b) $xz+xy=$

3. Edna sale de su casa con destino a la biblioteca de su bachillerato y su recorrido está representado por la ecuación $3x+2y=12$, su amiga Yaremi que se encuentra en una unidad deportiva con su amigo Castre, parte al mismo tiempo para encontrarse en la biblioteca del bachillerato y su recorrido se representa por $2x-y=1$. Encuentra la coordenada del punto que representa a la biblioteca en el bachillerato, empleando el método de sistemas de ecuaciones por sustitución o igualación.

Coordenadas geográficas: sistema de referencia que sirve para determinar los ángulos laterales de la superficie terrestre.

4. Utiliza tu imaginación para construir el siguiente triángulo, de manera que uno de sus lados mida 3 cm y otro mida 2 cm. Posteriormente responde a los siguientes planteamientos.

a) ¿Cuántos triángulos diferentes puedes realizar con los elementos que se te proporcionan en esta construcción? Justifica tu respuesta.

b) El tercer lado del triángulo ¿puede tener cualquier medida? Argumenta tu respuesta.

5. Dibuja dos triángulos cuyo perímetro sea de 12 cm. ¿Son necesariamente iguales? Responde sí o no y por qué.

....

6. Dibuja dos triángulos que tengan ángulos de 30°, 60° y 90°. ¿Son necesariamente iguales? Responde sí o no y por qué.

....

7. Toma un pedazo de papel en forma cuadrada y dóblalo diagonalmente por la mitad. Posteriormente, dobla por la mitad el triángulo obtenido de la misma manera, dos veces más. Desdóblalo y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos triángulos iguales entre sí puedes contar? ....

b) ¿Qué elementos observas en ellos que te dicen que son iguales? ....

....

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 6 a 7 preguntas considera tu resultado como **Bien**, de **4 a 5** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 4** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: **ecuaciones de primer grado, sistema de ecuaciones simultáneas con dos variables, construcción de triángulos, medida de ángulos, perímetros y áreas.**

Aprende más

La congruencia de triángulos

La congruencia de objetos geométricos es importante para la solución de problemas en contextos muy variados como ingeniería, aeronáutica, construcción, arquitectura, diseño de autopartes, mecatrónica, etcétera.

Congruencia es el término que se emplea en Geometría para decir que dos figuras son iguales. Un paso importante para establecer la igualdad de triángulos es determinar la correspondencia de sus elementos, la cual debe hacerse a partir de los vértices del triángulo; es decir, si queremos demostrar que los triángulos ΔABC y ΔDEF de la figura 2.3, son congruentes, entonces debe existir correspondencia entre las parejas de los vértices $A-D$, $B-E$ y $C-F$. En consecuencia, tendríamos la correspondencia de sus lados y ángulos: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DF}$ para los lados. En el caso de los ángulos $\widehat{A}$ con $\widehat{D}$, $\widehat{B}$ con $\widehat{E}$ y $\widehat{C}$ con $\widehat{F}$.

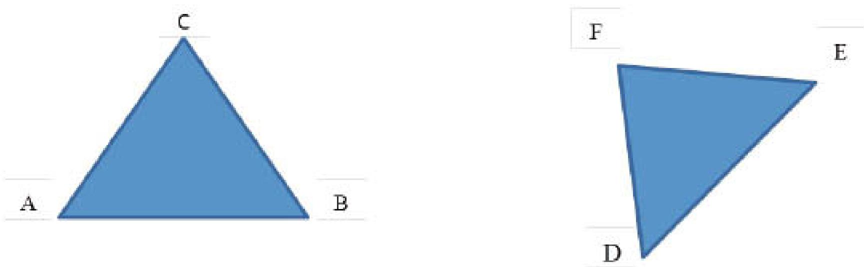


Figura 2.3.

De manera informal, decimos que dos triángulos son congruentes si, por medio de movimientos de traslación, rotación y reflexiones, podemos hacerlos coincidir.

Congruencia es el término que se emplea en Geometría para decir que dos figuras son iguales. **Dos figuras son congruentes si al colocar una sobre la otra todos sus puntos coinciden**, es decir, si ambas tienen la misma forma y tamaño. El símbolo de congruencia es "$\cong$" y es resultado de la unión de dos signos: "~" que indica igualdad en forma y "=" que indica igualdad en el tamaño, como se aprecia en la figura 2.4.

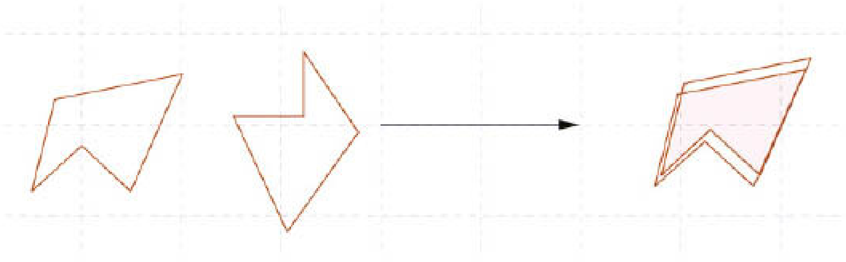


Figura 2.4.

Criterios de congruencia de triángulos

Los criterios de congruencia de triángulos son las medidas calculadas que permiten establecer si un par de triángulos son congruentes entre sí. En seguida se presentan los tres criterios de congruencia:

Criterio 1: LLL (lado-lado-lado)

Si los tres lados de un triángulo son iguales a los tres lados correspondientes de otro triángulo, ambos triángulos son congruentes entre sí. Esto se muestra en la figura 2.5.

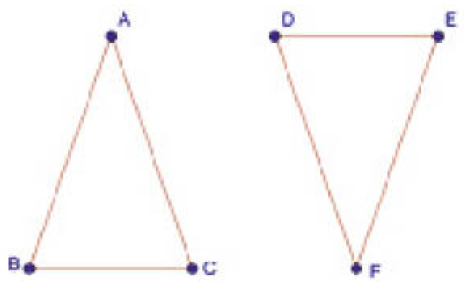


Figura 2.5.

Justificación

Si:

$$\overline{AB} = \overline{DF}$$
$$\overline{BC} = \overline{DE}$$
$$\overline{AC} = \overline{EF}$$

Entonces:

$$\Delta ABC \cong \Delta FDE$$

Criterio 2: LAL (lado-ángulo-lado)

Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales a los elementos similares de otro triangulo, ambos triángulos son congruentes entre sí. Esto se representa en la figura 2.6.

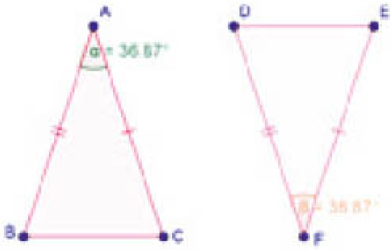


Figura 2.6.

Justificación

Si:

$$\overline{AB} = \overline{DF}$$
$$\measuredangle BAC = \measuredangle DFE$$
$$\overline{AC} = \overline{EF}$$

Entonces:

$$\Delta ABC \cong \Delta FDE$$

Criterio 3: ALA (ángulo-lado-ángulo)

Si uno de los lados de un triángulo y los ángulos adyacentes a éste son respectivamente iguales a uno de los lados de otro triángulo y a los ángulos adyacentes a él, ambos triángulos son congruentes entre sí. Como se muestra en la figura 2.7.

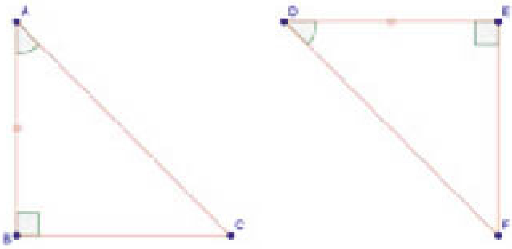


Figura 2.7.

Justificación

Si:

$$\measuredangle BAC = \measuredangle FDE$$
$$\measuredangle ABC = \measuredangle FED$$
$$\Delta ABC \cong \Delta FDE$$

Entonces:

$$\Delta ABC \cong \Delta FDE$$

Aunque estos criterios se utilizan para afirmar que dos triángulos son congruentes entre sí, para comprobarlo se utilizan las propiedades de los triángulos.

Para resolver este tipo de problemas, es importante identificar las afirmaciones iniciales que se conocen. Estas afirmaciones iniciales constituyen lo que llamamos hipótesis. Denominamos tesis a la afirmación conclusiva a la que pretendemos llegar, es decir, lo que queremos afirmar.

Tesis: afirmación conclusiva a la que pretendemos llegar, es decir, lo que queremos afirmar.

Hipótesis: suposición o una idea que puede ser cierta o no, basada en información previa.

Ejemplos:

1. Dada la afirmación de que los triángulos $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ de la figura 2.8 y, que las medidas de algunos de sus elementos son $\overline{AB} = 3x + 1$ y, la medida del $\measuredangle C$ es $62°$. Por otro lado, la medida del $\measuredangle F$ está dada por $4z - 18°$ y el lado $\overline{DE} = 5$. Determina los valores de x y z.

Semejanza: cuando dos figuras tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.

Igualdad: dos objetos son iguales si poseen el mismo valor.

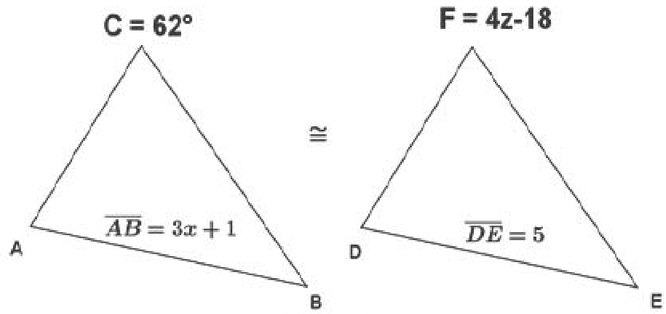


Figura 2.8.

Solución:

Afirmaciones (tesis)	***Razones (hipótesis)***
$3x + 1 = 5$	*Si:* $\overline{AB} = \overline{DE}$
$3x + 1 - 1 = 5 - 1$	*Propiedad aditiva de la igualdad*
$3x = 4$	*Reducción de términos semejantes*
$\frac{3x}{3} = \frac{4}{3}$	*Propiedad recíproca de la igualdad*
$x = \frac{4}{3}$	*Valor de x*
$4z - 18° = 62°$	*Si: los ángulos* $\measuredangle C$ *y* $\measuredangle F$ *son iguales o congruentes.*
$4z - 18° + 18° = 62° + 18°$	*Propiedad aditiva de la igualdad*
$4z = 80°$	*Reducción de términos semejantes*
$\frac{4z}{4} = \frac{80°}{4}$	*Propiedad recíproca de la igualdad*
$z = 20°$	*Valor de z*
$x = 4/3$ $z = 20°$	*Resolviendo la primera afirmación para x, y la segunda afirmación para z.*

2. En la siguiente figura 2.9, $\overline{BD}$ es la diagonal del rectángulo *ADCB*. Demuestra que los $\triangle ADB$ y $\triangle CBD$ son congruentes.

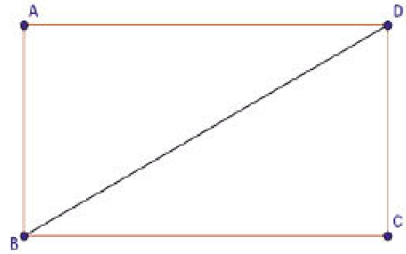


Figura 2.9.

Solución:

Hipótesis: *ADCB* es un rectángulo; *BD* es su diagonal

Tesis: $\triangle ADB \cong \triangle CBD$

Afirmaciones	***Razones***
1. ADCB es un rectángulo	*Por la hipótesis, podemos afirmar la existencia de parejas de lados congruentes y el hecho de que los ángulos internos son iguales, es decir, que todos miden 90º.*
2. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	*Propiedad reflexiva, es importante afirmar que $\overline{BD}$ es al mismo tiempo un lado de cada triángulo.*
3. $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	*Los lados de los rectángulos son congruentes dos a dos.*
4. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	*Los lados de los rectángulos son congruentes dos a dos.*
5. $\triangle ADB \cong \triangle CBD$	*Por el criterio LLL, de las afirmaciones 2,3 y 4.*
6. Conclusión	*La diagonal de cualquier rectángulo lo divide en dos triángulos que son congruentes entre sí.*

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: En parejas escribe en tu libreta o cuaderno las razones o justificaciones necesarias para resolver lo que se solicita en los ejercicios del 1 al 15, considerando un orden lógico en los procedimientos. Es importante que escuches las opiniones de tu compañero para llegar a obtener la solución a los ejercicios.

1. Observa en la figura 2.10, si los triángulos ABC y DEF son congruentes, y $\overline{AB} = x + 2y$, $\overline{DE} = 5$, $\overline{BC} = x + y$, $\overline{EF} = 3$, determina los valores de x, y.

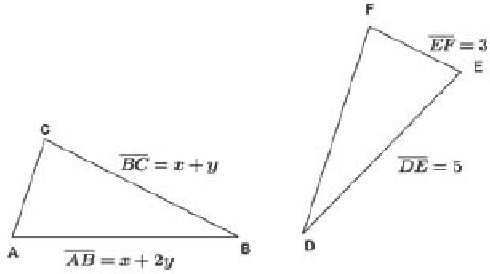


Figura 2.10.

2. Lee el siguiente caso y determina si se puede establecer una congruencia entre los triángulos que describen la ruta que tomó cada persona.

Dos personas parten del mismo punto y caminan en dirección norte durante cierto intervalo de tiempo a la misma velocidad. Después, ambas giran: una rumbo al este y la otra hacia el oeste, caminando nuevamente, ahora en dichas direcciones respectivamente, a velocidades iguales en tiempos iguales. Al término del segundo movimiento, las dos vuelven a girar y se encaminan al punto de partida, al que llegan al mismo tiempo. Justifiquen individualmente sus respuestas una vez que las escriban en sus libretas de apuntes, coméntalas con el grupo.

3. ¿Los ángulos alternos internos entre paralelas cortadas por una secante son congruentes? Responde sí o no y por qué.

4. Observa la figura 2.11 y determina los valores de a y b, en seguida indica el criterio de congruencia que empleaste en cada caso.

   Dado que: $\overline{AB} = \overline{BC}$, ΔABC es isósceles $\overline{BD}$ es mediana de $\overline{AC}$

   $\overline{AB} = 2a - 20$; $\overline{BC} = 50$

   $\measuredangle ABD = 30°$ y $\measuredangle CBD = b - 10°$

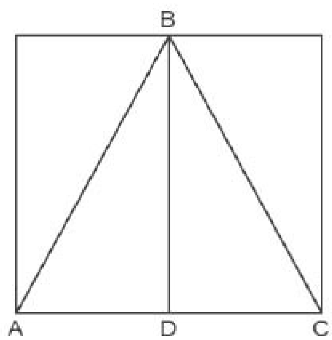


Figura 2.11.

5. Observa la figura 2.12, el $\Delta I \cong \Delta II$. Encuentra los valores de x, y.

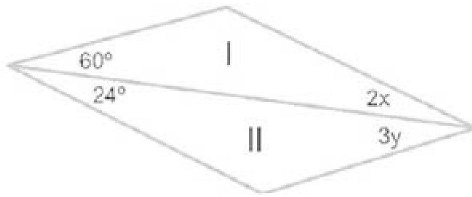


Figura 2.12.

6. Observa en la figura 2.13, el $\Delta I \cong \Delta II$, encuentra los valores de x, y.

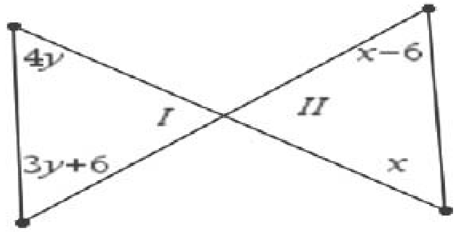


Figura 2.13.

7. Traza un cuadrado e indica sus vértices con las letras *ABCD*. Los puntos *P* y *Q* están ubicados sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, de tal forma que $\overline{AP} = \overline{DQ}$. Si *R* es el punto medio del lado $\overline{AD}$ muestra que $\Delta APR \cong \Delta DQR$.

8. Los datos de la figura 2.14 son: *D* es el punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DF} \perp \overline{BC}$, $\overline{DE} \cong \overline{DF}$, $\overline{AE} = 5a + b$, $\overline{CF} = 19$, $\overline{BE} = 10a - 2b$. Halla el valor de *a* y demostrar que el $\Delta ADE \cong \Delta CDF$

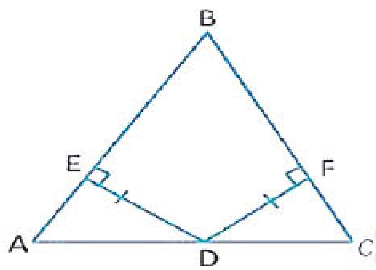


Figura 2.14.

9. El ΔABC de la figura 15 es equilátero, además *E* es el punto medio de $\overline{AC}$, *D* es el punto medio de $\overline{BC}$, *F* es el punto medio de *AB*; $\overline{AF} \cong \overline{BD} \cong \overline{CE}$.

   Demuestra que los triángulos de la figura 2.15 ΔAFD, ΔECF y ΔBDE son congruentes. La correspondencia indica: $\Delta AFD \cong \Delta BDE \cong \Delta CEF$

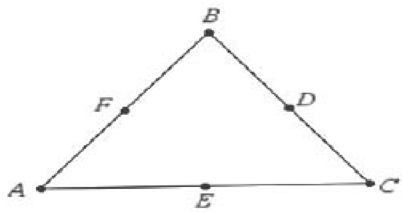


Figura 2.15.

10. Traza el triángulo ABC con ángulo recto en B y de tal forma que $AB = BC$ y localiza el punto D como el punto medio de AC. ¿Cuánto mide el $\measuredangle ABD$?

11. Lee el enunciado y selecciona la respuesta correcta.

    Si dos ______________ de un triángulo son congruentes con respecto a los de otro, y el ______________ entre ellos también es congruente, entonces afirmamos que los triángulos son congruentes:

    a) Lados - ángulo

    b) Ángulos - lado

    c) Lados - lado

    d) Ángulos - ángulo

    e) Ángulos - ángulo

12. Lee el enunciado y subraya la respuesta correcta. Si la congruencia de dos triángulos se establece por medio del criterio LAL, entonces:

    a) Se conocían las medidas de dos lados y el ángulo entre ellos.

    b) Se conocían las medidas de los tres lados de cada triángulo.

    c) Coincidieron dos ángulos del triángulo y uno de los lados con los del otro.

    d) Sus ángulos son iguales y uno de los lados de uno es también igual a uno del otro.

13. Lee el enunciado y subraya la respuesta correcta. Si dos triángulos son congruentes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

    a) La medida del área de un triángulo es igual a la del otro triángulo.

    b) Todos los lados de ambos triángulos son iguales entre sí.

    c) Las alturas de los triángulos no necesariamente son congruentes.

    d) Alguno de los ángulos del primer triángulo es mayor que alguno de los ángu los del segundo triángulo.

14. Observa la figura 2.16 y encuentra la medida de los ángulos *B* y *C*.

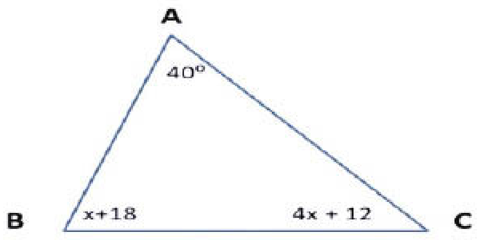


Figura 2.16.

15. En la figura 2.17 se ha superpuesto un cuadrado sobre otro congruente, formando un octágono regular. Demuestra que los triángulos que se forman son congruentes.

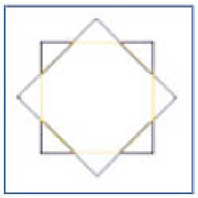


Figura 2.17.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Consideras que algunas partes del cuerpo humano son congruentes? ¿Será importante la congruencia en nuestro cuerpo? ¿Por qué? Explica breve y claramente.

....

....

....

....

Actividad 2

Producto de aprendizaje: construcción de un rompecabezas

Esta es una actividad para manipular triángulos congruentes a través de la correspondencia de sus elementos. Se trata de construir un rompecabezas de la figura o elemento que tú sugieras; puede ser un paisaje, un letrero publicitario, un dibujo, una fotografía, tu casa, incluso una **diapositiva**, en la que se expliquen los criterios de congruencia.

Diapositiva: hoja que contiene imágenes o escritos y sirve para clarificar y ampliar el mensaje verbal.

Manipulación: operar con las manos algún objeto.

Este producto lo realizarás de forma individual, pero puedes trabajar de forma colaborativa para la construcción de tu rompecabezas.

Las características que debe tener el rompecabezas se listan a continuación:

a) Debe ser elaborado en cartón, cartoncillo o algún material que permita su manipulación con facilidad y tenga cierta durabilidad.

b) Las dimensiones deben ser, por lo menos, de 400 cm^2 en promedio.

c) Cada pieza del rompecabezas debe ser un triángulo, el cual debe ser congruente a una o dos piezas del rompecabezas (no tendrán necesariamente la misma imagen). No se permiten cuatro piezas congruentes.

d) En la parte posterior de las piezas congruentes señala el número de pieza y los que correspondan a las congruentes con ella, así como el criterio de congruencia aplicado en su elaboración.

e) El número de piezas base debe ser por lo menos 6, empleando al menos dos veces cada uno de los criterios de congruencia para su elaboración. No construyas las piezas congruentes tomando como base la original: se trata de que pongas en práctica los criterios analizados.

f) Para presentar su trabajo, en una hoja coloquen sus datos: nombre del estudiante, asignatura, semestre y fecha de entrega. En una segunda hoja elaboren una relatoría del trabajo. Estas dos hojas las entregarán a su profesor junto con el rompecabezas.

g) Se les propone organizar en el colegio una muestra de los trabajos por grupo. En este caso, las dimensiones y el número de piezas pueden ser mayores al planteado de manera individual, de tal forma que la actividad luzca y sea un éxito. Soliciten al docente la oportunidad de realizar la muestra dentro de su propia escuela, con el fin de fomentar el trabajo en grupo y la comunicación efectiva.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: construcción de un rompecabezas

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Contenido	Material manipulable.			
	Dimensiones por lo menos de 400 cm^2 en promedio.			
	No hay más de 4 piezas congruentes.			
	Aplicación del criterio de congruencia.			
	Existen por lo menos 6 piezas.			
Presentación	Datos del estudiante, asignatura, semestre, fecha.			
	Creatividad en la construcción del rompecabezas.			
	Las piezas ensamblan correctamente.			

Continúa...

Relatoría	De forma precisa y coherente, señalar el procedimiento matemático para elaborar las figuras y describir cómo lograron aplicar el criterio de congruencia.			
Diseño de las piezas	Trazo de las figuras con alineación con el juego geométrico.			
	Medidas precisas de las figuras.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Escucha con respeto las opiniones de los demás.			
Total de puntos		**13**		

Si en la lista de cotejo lograste los **13 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **10 a 12 puntos** es **Bien**, de **6 a 9** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto final Problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de: nombre de la escuela, estudiante, asignatura, bloque, título del poblemario, semestre, grupo, fecha.			
	Orden y limpieza.			
	Proceso de solución con lápiz.			
Gráficos o esquemas	Trazados correctamente con el juego geométrico.			
Procedimientos	Mantiene secuencia lógica.			
	Unidades de medida pertinentes.			
Solución	Resultados correctos del problema marcados con tinta.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Escucha con respeto las opiniones de los demás.			
Total de puntos		11		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 11 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque II

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
	Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	

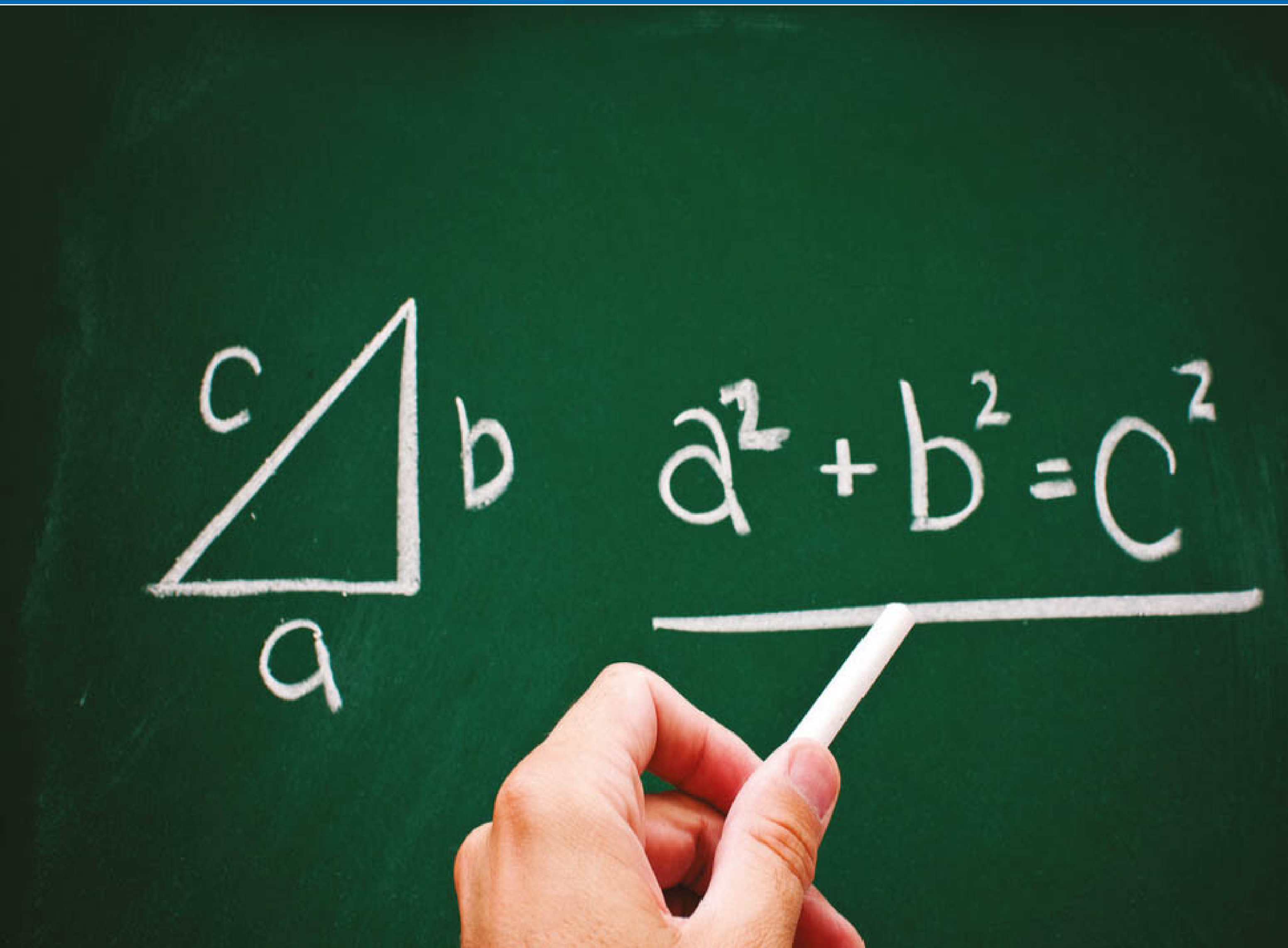
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema odesarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque III

Resuelves problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras



Introducción

En el presente bloque aplicaremos ciertos principios de Geometría que nos permitirán hallar una medida proporcional a otra, es decir, podemos obtener medidas de objetos en función de figuras semejantes. Por ejemplo, has visto cómo la combinación de dos semirrectas de un edificio o de una casa forman un ángulo; al agregar un segmento más, se forma un triángulo y así sucesivamente. Sin embargo, en esta ocasión se presenta la perspectiva histórica del surgimiento de dichas herramientas que ha utilizado el hombre por diversas situaciones que ha enfrentado y que ha resuelto de manera natural a través de la observación y la creatividad.

Las herramientas a las que nos referimos son: la semejanza de triángulos, el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales, con los cuales estamos seguros de que has tenido algún contacto en cursos previos.

Presentaremos, en primer término, la semejanza de triángulos y después la emplearemos para deducir las otras dos.

¿Qué competencias desarrollarás?

En este bloque trabajarás para lograr el desarrollo de las siguientes competencias.

Competencias genéricas	Atributos
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	• *Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.*
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	• *Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.*

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.* • *Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.* • *Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.* • *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Argumentas la pertinencia de la aplicación de los diversos criterios de semejanza, aplicas el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales, así como justificar los elementos necesarios para su aplicación en la resolución de problemas de su entorno.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	Triángulos: • Criterios de semejanza • Teorema de Tales • Teorema de Pitágoras	Presentación de textos. Observación de objetos y gráficos. Resolución de problemas.
Procedimentales	Observación y análisis de objetos en su entorno. Construcción de esquemas o de modelos. Medición y cálculo de ángulos y lados.	Expresar situaciones de su contexto, relacionadas con el tema del bloque que requieran una solución. Presentar procedimientos para llegar a la solución. Representar mediante esquemas el problema a resolver.

Actitudinales	Valora la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje. Comparte ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.	Exposición de trabajos con criterios de orden y limpieza. Respeta y escucha las opiniones y/o argumentos de otras personas. Seguimiento e interpretación de instrucciones.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 8 horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices 4 horas para revisar los contenidos temáticos y 4 horas para llevar a cabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Mapa mental
- Construcción de un ajedrez
- Portafolio de evidencias

El **portafolio de evidencias** es un conjunto de pruebas recolectadas a lo largo del período a evaluar. Lo puedes hacer en una libreta o en un cuaderno que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones las cuales te permitan llegar a soluciones de los problemas presentados en las actividades de este bloque. Los trabajos deben mostrar orden y limpieza. Además debe incluir una portada con tus datos (nombre de la escuela, título “Portafolio de evidencias”, nombre del estudiante y fecha de entrega) y un índice.

Estos productos serán evaluados con los instrumentos mostrados al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

La solución de problemas basados en razón, proporción y variación no implica principios nuevos. Pero la familiaridad con estos temas nos lleva con frecuencia a soluciones rápidas y simples para problemas que de otra forma serían más complicados. Los resultados de observaciones o medidas deben compararse a menudo con algún valor normal para que tengan algún significado. Por ejemplo, decir que un estudiante puede leer 400 palabras por minuto tiene poco significado cuando se expresa de manera aislada, pero cuando esta relación se compara con las 250 palabras por minuto que lee un lector promedio, se puede ver que aquél lee considerablemente más rápido que el lector común. ¿Cuánto más rápido? Para determinarlo, esta relación se divide por la relación del lector promedio, como sigue:

$\frac{400}{250}=\frac{8}{5}$. Entonces, por cada 5 palabras leídas por el lector promedio este estudiante lee 8. Otra forma de hacer esa comparación es diciendo que él lee $1\frac{3}{5}$ veces más rápido que el lector promedio.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones (1): Lee con atención los tres planteamientos que se presentan enseguida e identifica la relación de las cantidades y la comparación entre ellas para obtener la solución de cada caso.

1. Juan tiene $10.00 y desea comprar dulces cuyo precio es de $2.00 cada uno. Su hermano David compra y vende computadoras y cuenta con $40,000 para invertir en computadoras, cuyo precio individual es de $8,000. ¿Cuántos dulces puede comprar Juan? ¿Cuántas computadoras puede comprar David? ¿Qué relación puedes establecer en torno a las cantidades calculadas?

2. Quieres medir la altura de la fachada de tu casa. Suponiendo que no lo harás con el método tradicional (tomar una cinta métrica o un flexómetro para ello) ¿Cómo harías tal medición? ¿Qué instrumentos o materiales pueden apoyarte? Obtén el procedimiento, descríbelo en un esquema y preséntalo al docente para su validación.

3. En la figura 3.1, se ilustra una escalera con 14 escalones que tienen una altura total de 252 cm. ¿Cuál es la altura de cada uno de los 14 escalones?
   Altura: ________cm.

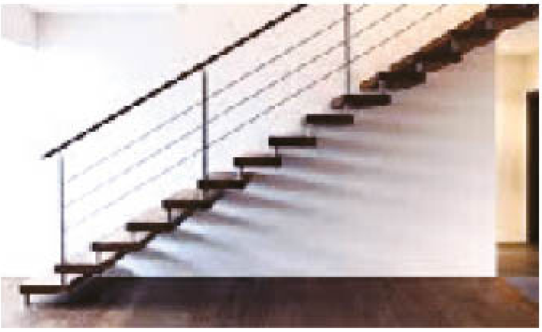


Figura 3.1.

Instrucciones (2): Contesta de forma precisa cada pregunta e intercambia puntos de vista con tus compañeros de grupo.

4. ¿Cuál es la razón entre la altura y el ancho de un pizarrón si su altura es de 75 cm por 2.5 m de ancho?

5. ¿Cuál es la razón de hembras a machos en una pecera que tiene 80 peces, de los cuales 30 son hembras?

6. La imagen del rostro de una persona en una fotografía mide 2 cm de altura por 1.5 cm de ancho, ¿cuál es la razón entre la altura y el ancho del rostro?

7. Para administrar un medicamento se debe considerar el peso del paciente para indicar la dosis. Si se requieren 10 mg de este medicamento para un paciente de 50 kg de peso, ¿cuántos mg se requerirán para un paciente de 75 kg de peso?

8. En un restaurante hay 12 mesas para no fumadores y 4 mesas para fumadores. ¿Cuántas mesas para fumadores deben colocarse en una sucursal de dicho restaurante en el que se colocaron 42 mesas para no fumadores si se desea mantener la misma proporción que en el primer restaurante?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de **7 a 8 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, de **4 a 6** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 4** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: **razones y proporciones**.

Aprende más

Segmentos proporcionales y teorema de Tales

En esta sesión abordaremos los elementos previos a la semejanza de triángulos; los segmentos proporcionales y el teorema de Tales. Ambos elementos están íntimamente relacionados con el concepto de semejanza de triángulos y con diversas situaciones que se presentan diariamente.

En la actividad **¿Con qué conocimientos cuentas?** se presenta una situación donde se te pide relacionar las cantidades de dulces y computadoras que puede comprar Juan y su hermano. Si tratas de graficar las cantidades utilizando una línea recta y colocando al inicio la cantidad mayor y después la menor, podemos establecer lo siguiente:

\$10 \$2 \$ 40000 \$8000

Como puedes ver, al representar las cantidades en segmentos, de alguna forma podemos visualizar lo que serían segmentos proporcionales. De la relación anterior, podemos tener las siguientes posibilidades:

$$10 : 2 :: 40000 : 8000 \text{ o de otra forma } \frac{10}{2} = \frac{40000}{8000}$$

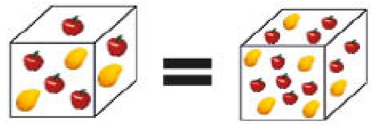
Afirmaciones	Razones
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	Hipótesis
$(cd)\frac{a}{c} = \frac{b}{d}(cd)$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$\frac{acd}{c} = \frac{bcd}{d}$	Multiplicando
$ad = bc$	Propiedad de la existencia del inverso multiplicativo.

Proporción: igualdad entre dos razones, es decir: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ en donde $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ son razones.

Entonces es posible expresar que $ad = bc$.

Sabías que...

En la elaboración de planos, diagramas y mapas a escala se aplica la proporción geométrica.



Ejemplo 1: En una caja hay 5 manzanas y 3 mangos, en otra caja hay 10 manzanas y 6 mangos. ¿Son proporcionales las cantidades de manzanas y mangos en ambas cajas?

Solución:

La primera caja tiene una razón de manzanas a mangos de 5:3. La segunda:10:6. Si las cajas tienen cantidades proporcionales se debe cumplir la propiedad fundamental de las proporciones. Por lo tanto: La proporción 5:3 :: 10:6 debe satisfacer la condición: (5)(6) = (3)(10), es decir, 30 = 30, que demuestra que las cantidades en ambas cajas sí son proporcionales.

Ejemplo 2: Si los ángulos agudos de un triángulo rectángulo están a razón 3:2 (figura 3.2) ¿Cuáles son sus medidas?

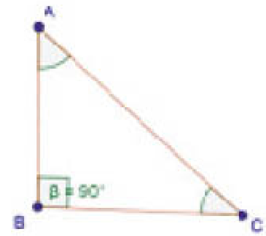


Figura 3.2.

Solución:

Afirmaciones	***Razones***
$\dfrac{\measuredangle BAC}{\measuredangle ACB}=\dfrac{3}{2}$	*Los ángulos están en razón 3:2. Esto significa que podemos establecer la proporción:*
$\dfrac{\measuredangle BAC}{\measuredangle ACB}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{3x}{2x}$	*Propiedad fundamental de las proporciones.*
$\measuredangle BAC+\measuredangle ACB+90^o=180^o$	*La suma de ángulos interiores de un triángulo es 180º.*
$3x+2x+90^o=180^o$ $3x+2x=180^o-90^o$ $5x=90^o$ $x=\dfrac{90^o}{5}$ $x=18^o$	*Utilizando el principio de sustitución y despejando la ecuación, obtenemos:*
$\measuredangle BAC=3(18^o)=54^o$ $\measuredangle ACB=2(18^o)=36^o$	*Sustitución de x en las expresiones que los representan.*
$\measuredangle BAC=54^o$ y $\measuredangle ACB=36^o$	*Conclusión.*

En la antigüedad, el filósofo griego Tales de Mileto (624-547 aC) diseñó, a partir de observaciones simples, un método para medir elementos que le resultaban curiosos. Por ejemplo: las pirámides de Egipto, los árboles que lo rodeaban, e incluso las alturas de algunos de sus conciudadanos que obtenía utilizando segmentos proporcionales. Al realizar los cortes en sus zanahorias (o probablemente algún elemento que tuviera a su disposición), descubrió las bases de lo que conocemos actualmente como **teorema de Tales**. Dicho teorema establece lo siguiente: **"Si tres o más paralelas cortan a dos transversales o secantes, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales"**. Este teorema lo verás representado en la figura 3.3.

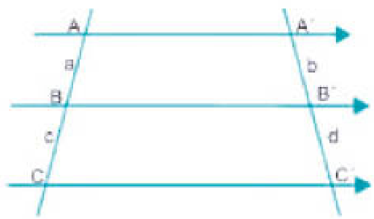


Figura 3.3. Teorema de Tales.

Donde se construye la siguiente proporción: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, además se pueden formar las siguientes proporciones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ o $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ o $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$; $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ o $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

Teorema de Tales. Si las rectas de la figura 3.3, $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$ y están cortadas por las secantes $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$, entonces $\frac{\overleftrightarrow{AB}}{\overleftrightarrow{BC}}=\frac{\overleftrightarrow{A'B'}}{\overleftrightarrow{B'C'}}$.

Ejemplo 3: ¿Cuál es el valor de x en la figura 3.4? **Solución:**

A partir de la figura 3.4 tenemos el siguiente razonamiento:

Afirmaciones	***Razones***
$5 : x :: 4 : 6$	*Teorema de Tales*
$\frac{5}{x}=\frac{4}{6}$	*Notación equivalente*
$(5)(6)=(x)(4)$ $(x)(4)=(5)(6)$	*Propiedades fundamentales de las proporciones*
$x=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$	*Despeje de x*

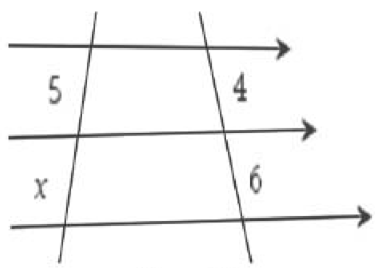


Figura 3.4.

En algunas ocasiones es conveniente expresar los resultados como fracciones o expresiones radicales; es decir, no siempre debes convertir tus resultados a números decimales.

Teorema de Tales aplicado a triángulos

El teorema de Tales bien puede aplicarse a triángulos tomando dos de sus lados como secantes o transversales y trazando los segmentos de división paralelos a la base. De esta forma se obtiene el teorema:

> "Toda paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales".

Esto lo puedes observar en la figura 3.5.

Caso particular del teorema $\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$

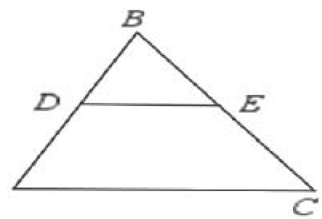


Figura 3.5.

Algunos autores refieren el teorema anterior como el de Tales, otros le llaman teorema fundamental de la proporción. Lo importante es que te des cuenta que es un caso particular del teorema de Tales y descubrir la forma en la que puedes emplearlo para resolver diversas situaciones. En semejanza es fundamental identificar la correspondencia de los lados, es decir, cuáles son los lados que se corresponden. A éstos les llamamos lados homólogos de la figura, los cuales son aquellos que se oponen a los ángulos iguales. Para el presente ejemplo de la figura 3.5, tenemos que los lados homólogos son los segmentos: $\overline{AB}$ y $\overline{DB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{BE}$; $\overline{CA}$ y $\overline{ED}$.

Ejemplo 4: En la figura 3.6, determinar el valor de x, si $\overline{AB} = 20$ y $\overline{BC} = 18$.

Solución:

A partir de la figura 3.6 tenemos el siguiente razonamiento:

Afirmaciones	*Razones*
$2x : \overline{AB} :: 12 : \overline{BC}$	*Teorema de Tales*
$x = \frac{20}{3}$	*Notación equivalente*

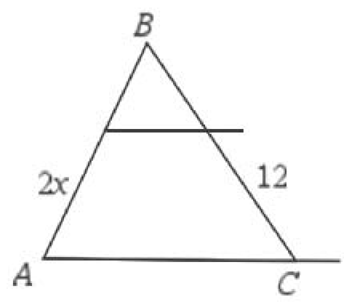


Figura 3.6.

Otro caso particular del teorema de Tales, se enuncia de la siguiente manera:

> "Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes entre sí".

Este teorema nos expresa que, por ejemplo, en el paralelogramo *ABCD*, se tienen lados opuestos congruentes; es decir $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. Los cuadriláteros son paralelogramos con dos pares de lados paralelos. Para demostrarlo, se debe trazar la diagonal del paralelogramo y aplicar los criterios de congruencia.

Hipótesis: ABCD es un paralelogramo, es decir
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Construcción: Trazar la diagonal $\overline{BD}$.

TESIS: Demostrar que los triángulos $\Delta BAD \cong \Delta BCD$.

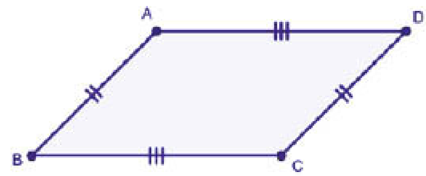


Figura 3.7.

Afirmaciones	**Razones**
$\overline{DB} \cong \overline{DB}$	Propiedad reflexiva de la igualdad
$\measuredangle ABD \cong \measuredangle BDC$	Por ser ángulos alternos internos
$\measuredangle DBC \cong \measuredangle ADB$	Por ser ángulos alternos internos
$\Delta BAD \cong \Delta BCD$	Son triángulos congruentes, por el criterio "A,L,A".
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	Conclusión: un paralelogramo tiene lados opuestos congruentes.

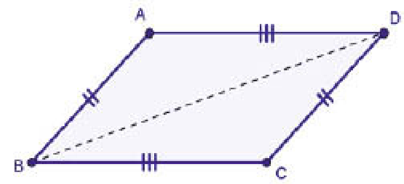


Figura 3.8.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta o cuaderno, recuerda realizar los procedimientos con orden y limpieza. Al terminar compártelos con tus compañeros, escucha con atención las opiniones de los demás con el fin de obtener las soluciones correctas.

1. Se sabe que la bisectriz de cualquiera de los ángulos de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los otros dos lados. Si en el triángulo ABC, AB = 6, AC = 5 y BC = 8, encuentra las longitudes de los segmentos de BC, que determinan la bisectriz del ángulo A.

2. ¿Recuerdas las escuadras tradicionales del juego de geometría? ¡Bien! usando la que tiene forma de triángulo isósceles, elabora un diagrama del procedimiento para medir la altura del edificio más alto de tu escuela. ¿Qué otras aplicaciones similares puedes observar?

3. Determina el valor que falta en las siguientes proporciones:

   a) $\frac{x}{3}=\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{x}=\frac{x}{16}$ c) $\frac{5}{a}=\frac{7}{6}$ d) $\frac{a-1}{2}=\frac{1}{a}$

4. Determina si las condiciones mostradas en las figuras 3.9 y 3.10 son las adecuadas para que la recta que corta los lados del triángulo es paralela al tercer lado.

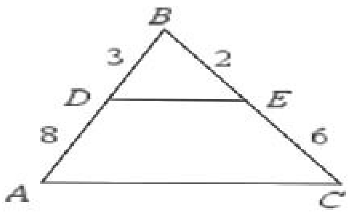


Figura 3.9.

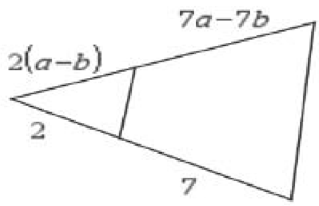


Figura 3.10.

5. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$, determinar el valor de x y la medida del segmento $\overline{AE}$ de la figura 3.11.

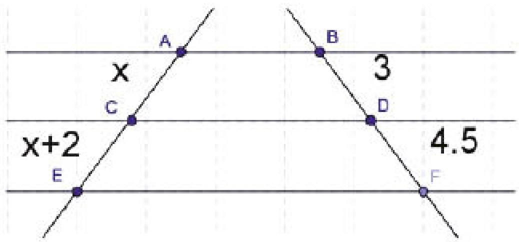


Figura 3.11.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si tienes dos zanahorias (lo bastante rectas para visualizar segmentos) y las cortas dos veces pero simultáneamente. ¿Qué ocurre con los pedazos de zanahoria que obtienes de cada una? Si cada uno de los pedazos lo identificamos con una letra, ¿puedes establecer alguna proporción? ¿Es necesaria alguna condición en los cortes para poder establecer proporciones?

Organicen una dinámica en el aula, en la que cada compañero identifique los elementos que se obtienen después de realizados los cortes respectivos.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Semejanza de triángulos

En esta sección abordarás el concepto de semejanza de triángulos y sus aplicaciones en problemas reales y situaciones teóricas. Para ello vamos a adentrarnos un poco a la idea intuitiva de semejanza.

Si cada centímetro de dibujo que hagamos representa tres metros de la realidad, ¿de qué tamaño dibujarías un tronco de un árbol, que en la realidad mide 28 metros?

> La **semejanza** entre dos elementos se da precisamente cuando lo que varía entre ellos es su dimensión, es decir; la forma básica no cambia, solamente se altera el tamaño.

Para dejar lo anterior bien claro, realiza el dibujo de tu salón de clases (no incluyas el mobiliario), empleando una escala de 1 cm : 0.5 m. Comparte tu trabajo en el grupo y obtengan conclusiones acerca del concepto de semejanza.

Escribe una de las conclusiones: ....

....

....

Vamos a acercarnos de una manera más específica a la semejanza de triángulos, para ello observaremos un par de triángulos. Existen algunos elementos a identificar y verificar, antes de decidir acerca de la semejanza entre dos triángulos.

Ejemplo: Analiza con tus escuadras los triángulos equiangulares de perímetros diferentes de la figura 3.12 y responde ¿son semejantes? ¿A qué atribuyes tu respuesta? Comparte con los compañeros de clase tus observaciones para establecer algunos acuerdos que el docente pueda validar.

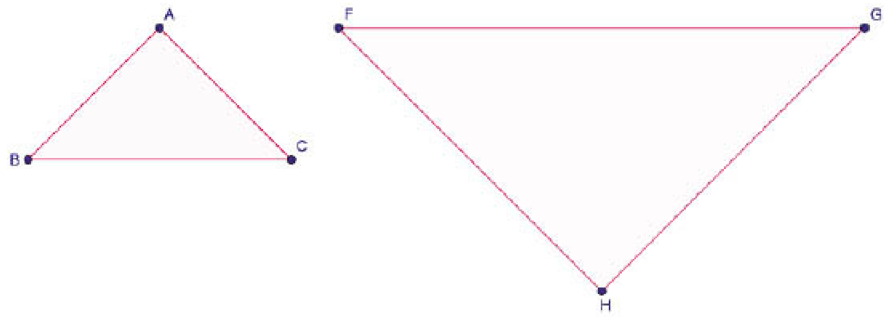


Figura 3.12.

....

....

....

Criterios de semejanza de triángulos

En el bloque II se analizaron los criterios de congruencia $(\cong)$, en este bloque III analizaremos los criterios de semejanza, su símbolo matemático es $(\simeq)$, es decir, se habla de lados proporcionales. Para distinguir los criterios de congruencia y semejanza utilizaremos letras minúsculas para designar estos últimos.

Criterio 1: LLL (lado-lado-lado)

Si los tres lados de un triángulo son proporcionales, éstos son semejantes. Se muestra en la figura 3.13.

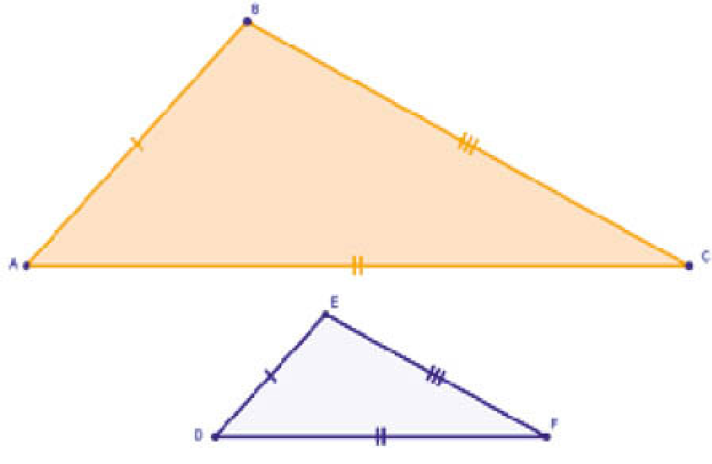


Figura 3.13

Justificación

Si:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Entonces:

$$\Delta ABC \simeq \Delta FDE$$

Criterio 2: LAL (lado-ángulo-lado)

Si dos triángulos tienen un par de lados proporcionales y el ángulo comprendido entre esos lados es congruente en ambos casos, los triángulos son semejantes. Se muestra en la figura 3.14.

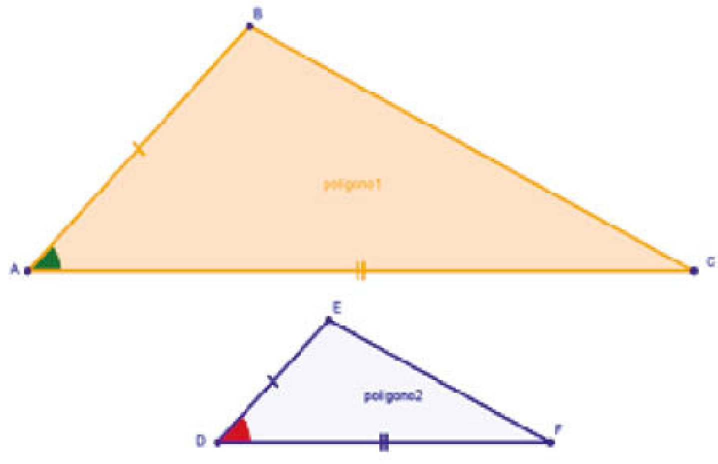


Figura 3.14.

Justificación

Si:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$$

Entonces:

$$\Delta ABC \simeq \Delta FDE$$

Criterio 3: AA (ángulo-ángulo)

Si dos triángulos tienen dos parejas de ángulos congruentes entre ellos, significa que son semejantes. Se muestra en la figura 3.15.

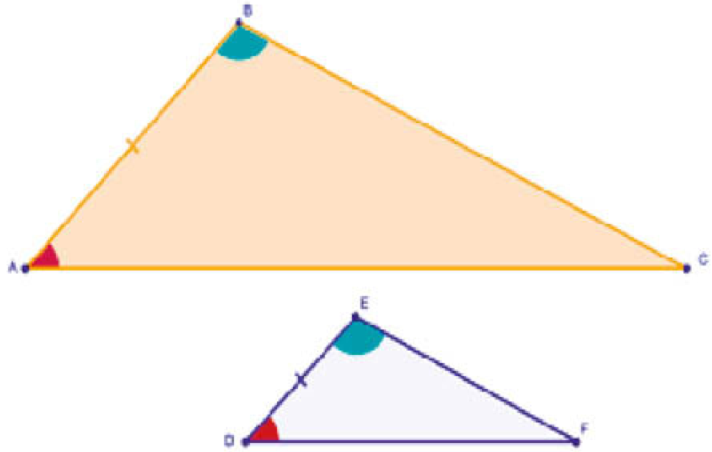


Figura 3.15.

Justificación

Si:

$$\overline{AB} \simeq \overline{DE}$$
$$\measuredangle BAC \cong \measuredangle FDE$$
$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle FED$$

Entonces:

$$\triangle ABC \simeq \triangle FDE$$

Aunque estos criterios se utilizan para afirmar que dos triángulos son semejantes entre sí, para comprobarlo se utilizan las propiedades de los triángulos congruentes. Para resolver estos diferentes tipos de problemas que requiere determinar la longitud de los lados de los triángulos involucrados, es importante identificar las afirmaciones iniciales que se conocen.

Ahora te presentamos algunos ejemplos de aplicación de la semejanza geométrica.

Ejemplo 1: Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6.5 m a la misma hora que un poste de 4.5 m de altura da una sombra de 0.9 m. Esto muestra la figura 3.16.

Solución:

$$\frac{0.9}{6.5} = \frac{4.5}{x}$$
$$x = \frac{(6.5)(4.5)}{0.9} = 32.5$$

El edificio tiene una altura de 32.5 m.

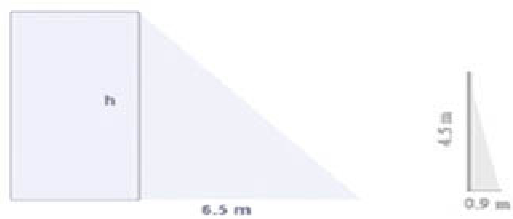


Figura 3.16.

Ejemplo 2: En la figura 3.17, $AB \parallel CD$ y los segmentos AD y BC se cortan en E. Determinar si $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ son semejantes.

Solución:

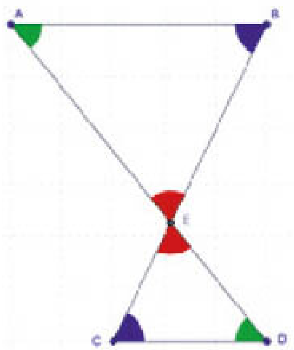


Figura 3.17.

Afirmaciones	***Razones***
1. $\measuredangle EBA \cong \measuredangle ECD$	*1. Por ser alternos internos entre paralelas.*
2. $\measuredangle BAE \cong \measuredangle EDC$	*2. Por ser alternos internos entre paralelas.*
3. $\measuredangle BAE \cong \measuredangle EDC$	*3. Por ser opuestos por el vértice.*
$\therefore$ $\Delta ABE \cong \Delta CDE$	*Conclusión*

Ejemplo 3: En la figura 3.18, se observa la parte baja de un acantilado y el objetivo es medir la distancia que hay de pared a pared del mismo, en la parte más alta de cada lado. Supongamos también que no es posible medir la distancia requerida de la manera tradicional: ¿cómo resolver la situación?

Acantilado: accidente geográfico que consiste en una pendiente o vertical perpendicular al mar.

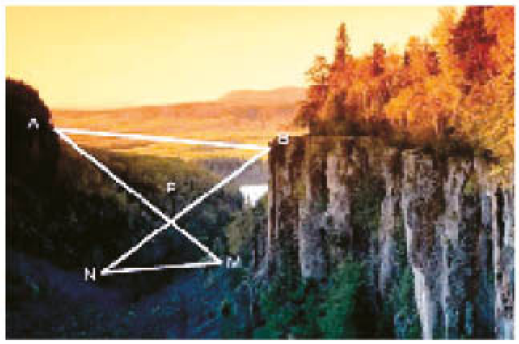


Figura 3.18.

Solución:

Ubicamos un punto accesible, digamos P, a la altura que consideremos. Visualizamos desde un punto M el punto de medición A de una de las paredes (donde apoyarías tu cinta métrica) y de la misma manera desde otro punto N el correspondiente punto B en la otra pared. De tal forma que: AB || MN. Así tenemos: $\angle PAB \cong \angle PMN$ y $\angle PBA \cong \angle PNM$ que por el criterio uno los triángulos APB y MNP son semejantes.
De esta forma, para tener la distancia AB, bastaría con medir las distancias MN y cualquiera de las dos BN o AM, para tener dos de los lados de cada uno de los triángulos y establecer la proporción adecuada.

Veamos la situación en un diagrama y supongamos algunas de las mediciones realizadas. MN = 15 m, NB = 76 m, NP = 9 m.

$$\text{Así: } \frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BP}\text{, luego } \frac{15}{9} = \frac{AB}{76}\text{, por lo tanto } AB = \frac{15 \times 76}{9} = 126.66\ m$$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Lee con atención las indicaciones de los siguientes ejercicios y realiza los procedimientos con orden y limpieza en tu libreta o cuaderno. Posteriormente compártelos con tus compañeros y escucha con atención las opiniones de los demás con el fin de obtener las soluciones correctas.

1. Demuestra el siguiente enunciado: "Si una recta une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces es paralela al tercer lado e igual a la mitad de su longitud.

2. Demuestra si los triángulos de la figura 3.19, son semejantes y, ¿cuál es el criterio que aprovecharon para establecer la semejanza?

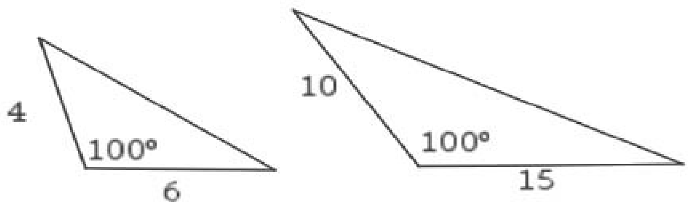


Figura 3.19

3. Realiza una investigación bibliográfica o en medios electrónicos, en la que incluyas los teoremas relativos a semejanza de triángulos, que se derivan de los criterios analizados hasta este momento. No olvides citar fuente de consulta. El producto de tu investigación lo presentarás mediante un **mapa mental**, con el propósito de tener a la vista y de una manera completa los razonamientos que siempre debemos tomar en cuenta para establecer semejanzas u otros elementos entre dos triángulos.

4. Con ayuda de tu asesor presenta tu mapa mental y los resultados obtenidos, compleméntalo en caso necesario.

5. Un triángulo tiene como medidas de sus lados 27, 32 y 40 m. Los lados de un dibujo a escala son 135, 160 y 200 cm. ¿Son semejantes estos triángulos? ¿Cuál es la razón de semejanza?

Mapa mental: diagrama usado para representar las palabras o las ideas.

Dibujo a escala: dibujo con tamaño correcto que ha sido reducido o aumentado en una cierta cantidad.

6. Un triángulo tiene como medidas de sus lados 8, 6 y 12 m y otro triángulo tiene medidas 6, 4 y 3 m. ¿Son semejantes estos triángulos? ¿Cuál es la razón de semejanza?

7. Si un hombre de 1.75 m de altura proyecta una sombra de 3.50 m, ¿qué sombra aproximada proyectará un poste de 8.25 m?

8. Si un árbol de 20 m proyecta una sombra de 45 m, ¿qué sombra proyectará un árbol de 30 m?

9. Un edificio de 95 m de altura proyecta una sombra de 650 m. Un hombre quiere aprovechar esta situación para calcular su estatura, considerando que su sombra es de 11.60 m.

10. Una antena proyecta una sombra de 50.4 m, y un poste de altura 2.54 m proyecta una sombra de 4.21 metros. ¿Cuánto mide la antena?

11. Una torre proyecta una sombra de 79.42 m, y un poste de altura 3.05 m proyecta una sombra de 5.62 m. ¿Cuánto mide la torre?

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Si observas el campo, ¿qué figuras semejantes puedes encontrar? Enlístalas y explica breve y claramente.

....

....

....

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Teorema de Pitágoras

Este teorema surge de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Para entender el procedimiento de este teorema es necesario recordar algunos conceptos importantes.

Los lados se relacionan mediante el teorema de Pitágoras, el cual afirma que "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". El teorema $c^2 = b^2 + a^2$ está representado en la figura 3.20.

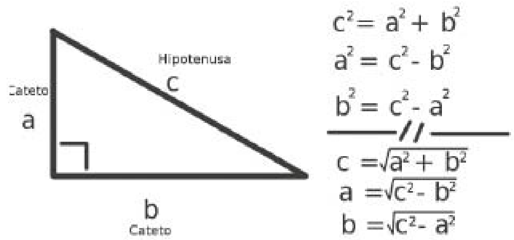


Figura 3.20.

Recuerda el teorema de Pitágoras

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Ahora te presentamos la aplicación de este teorema en situaciones prácticas en los siguientes ejercicios:

Ejemplo 1: En la figura 3.21 halla la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son 3 y 7 m, respectivamente.

Solución:

Dado que el triángulo formado a partir de la diagonal es rectángulo, por el teorema de Pitágoras.

$$x^2 = (3m)^2 + (7m)^2$$
$$x^2 = 9m^2 + 49m^2$$
$$x^2 = \sqrt{58m^2}$$
$$x = \sqrt{58}m$$
$$x = 7.62m$$

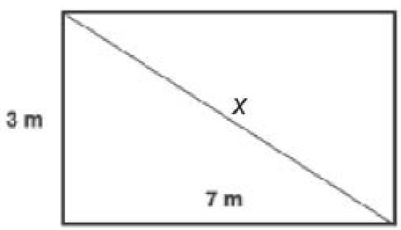


Figura 3.21.

Ejemplo 2: En el siguiente triángulo (figura 3.22) calcula el valor de la incógnita aplicando el teorema de Pitágoras.

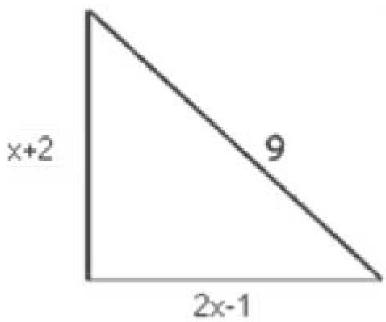


Figura 3.22.

Solución:

$(9)^2 = (x + 2)^2 + (2x - 1)^2$
$81 = x^2 + 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1$
$81 = 5x^2 + 5$

$$x^2 = \frac{76}{5} \qquad \text{como } 76 = 4 \cdot 19$$

$$x = \sqrt{\frac{4 \cdot 19}{5}} = 2\sqrt{\frac{19}{5}}$$

Ejemplo 3: Eduardo necesita subirse a la azotea de su casa, la cual tiene 7 m de alto. Para ello debe valerse de una escalera cuya base o pie de escalera debe estar a 2 m de distancia de la pared por motivos de seguridad. ¿Qué longitud debe tener la escalera para que Eduardo pueda alcanzar la azotea?

Solución:

Si consideramos un triángulo rectángulo formado por el piso, la pared y la escalera, empleando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 7^2 + 2^2$$

$$x^2 = 49 + 4 = 53$$

$$x = \sqrt{53} = 7.28 \ m$$

Ejemplo 4: En la figura 3.23 se tiene un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 6 y su base mide 8 ¿Cuál es el valor del área del triángulo?

Solución:

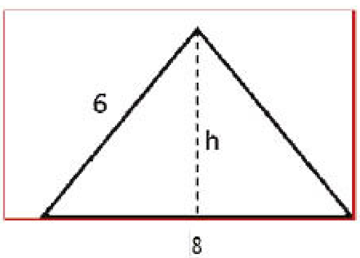


Figura 3.23

Sabiendo que la altura es la mediana de la base, por tanto:

$$6^2 = h^2 + 4^2; \quad h^2 = 36 - 16; \quad h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$A = \frac{8 \times 2\sqrt{5}}{2} = 8\sqrt{5} \ u^2$$

Ejemplo 5: De la figura 3.24, hallar el valor de x del triángulo ΔADB.

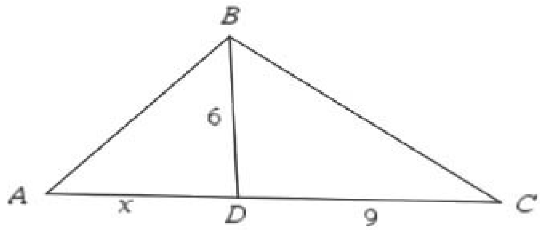


Figura 3.24.

Solución:

En el triángulo ABC, trazamos la altura BD con respecto a la hipotenusa AC; de tal forma que $BD \perp AC$. Tenemos que los triángulos ADB y CDB son rectángulos. Además estos triángulos comparten ángulos con el triángulo ABC, al relacionar los triángulos tenemos que ambos son semejantes, lo cual permite establecer la proporcionalidad de sus lados. Es decir:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

Por la propiedad anterior podemos establecer:

$$\frac{6}{9} = \frac{x}{6}; \quad x = \frac{36}{9} = 4$$

Ejemplo 6: Determina el valor de las variables en la figura 3.25.

Solución:

En los triángulos ADC Y ABD tenemos:

$$\frac{y}{2} = \frac{8}{y}$$
$$y^2 = 16$$
$$y = 4$$

Luego, por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 4^2 + 2^2$$
$$x^2 = 20$$
$$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

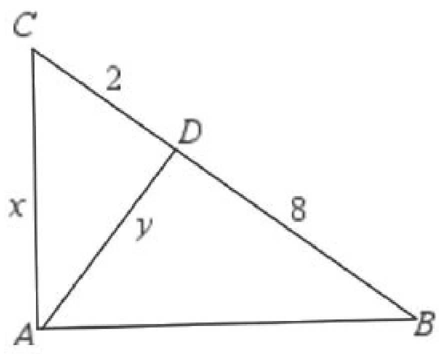


Figura 3.25.

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta. Evidencia el uso de las propiedades para expresar analítica y gráficamente el teorema de Pitágoras. Finalmente presentarás tu trabajo a tus compañeros. Será importante que escuches las opiniones de los demás a fin de enriquecer tu trabajo.

Lote baldío: terreno urbano o rural sin edificar o cultivar que forma parte de los bienes del Estado.

Colisión: choque entre dos o más cuerpos.

1. Un lote baldío rectangular de 70 por 40 m se encuentra ubicado en una esquina. Una persona camina a lo largo de la diagonal del lote evitando llegar a la esquina para no darle toda la vuelta y pasa diariamente 4 veces por este camino ¿Qué distancia ahorra en su caminata al día?

2. Se tiene un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es igual a 4. ¿Cuál es el valor del área del triángulo?

3. Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, si las longitudes de los catetos son 9 y 12.

4. El radio de una circunferencia es 15. Calcula la distancia del centro de la misma a una cuerda cuya longitud es 28.

5. Encuentra el área de un rectángulo, cuya diagonal mide 24 cm y su altura 10 cm.

6. Un auto choca contra un árbol de 6 m de altura. En la colisión el árbol se rompe en dos, de tal forma que la parte horizontal es 1/3 de la que queda en forma vertical. ¿A qué distancia de la base del árbol queda la parte más alta de la copa de éste, sobre el piso?

7. Demuestra que las siguientes ternas de valores corresponden a los lados de triángulos rectángulos.

   a) 6, 8 y 10 *b)* 1, 1 y 2 *c)* 2, 2 y $2\sqrt{2}$ *d)* 60, 80 y 100

8. En la figura 3.26 es la altura que corresponde a la hipotenusa del triángulo ABC. Determina en cada inciso lo que se te pide:

   a) $s = 2$, $x = 5$, encuentra h y z.
   b) $s = 3$, $r = 8$, encuentra z y x.
   c) $s = 9$, $x = 11$, encuentra r y h.

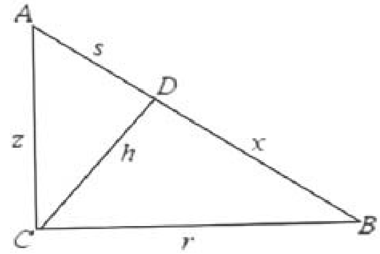


Figura 3.26.

9. Realiza una investigación en la que incluyas la evolución a lo largo de la historia de los teoremas de Pitágoras y Tales incluyendo las implicaciones actuales de ambos, así como las aplicaciones más frecuentes. A partir de ella elabora un mapa mental, en el que incluyas los elementos más significativos y comparte con la clase tu información.

10. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene una diagonal de 4 cm?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Explica como aplicarías el teorema de Pitágoras cuando tú tienes que ir a un cierto lugar y necesitas tomar el camino más corto.

....

....

....

....

Actividad 4

Producto de aprendizaje: construir en equipos un ajedrez (tablero y piezas)

Esta actividad permitirá que integres los aprendizajes adquiridos durante el presente bloque. Será una actividad bastante triangular, que esperamos disfrutes y compartas con las personas que te rodean.

Instrucciones (1): En equipos construirán un ajedrez (tablero y piezas); para ello será necesario que escuches con atención las sugerencias de tus compañeros de equipo y todos trabajen con orden y limpieza. Te sugerimos revisar la sección **Apéndice 2**, con información acerca del juego de ajedrez. El ajedrez que construyan tendrá las siguientes particularidades:

Las medidas del tablero son 44 cm por lado con diagonal de $44 \cdot \sqrt{2}$ cm. A partir de estas medidas tendremos que ir pintando de dos colores diferentes las 64 casillas con las que cuenta el tablero de ajedrez. Lo interesante de nuestro tablero es que incluirás medidas por todos lados, es decir; la medida de lados, diagonales y ángulos (de ser posible), que puedas identificar en el tablero. Las piezas serán todos triángulos. Los peones triángulos rectángulos cuyos lados midan 3, 4 y 5 cm respectivamente. A partir de ellos haremos las torres, caballos, alfiles, la reina y el rey. Para torres y caballos la proporción con respecto a los peones será de 1:1.2; para alfiles será de 1:1.4 y para la reina y el rey de 1:1.7. De esta forma tendrás la medida de cada pieza, las cuales deben ser, ya sabes, de dos colores distintos. Tu creatividad decidirá cómo las mantienes en pie dentro del tablero y cómo las diferenciarás de las demás. Al final tendremos una tabla en la que recordaremos la aplicación de diversos métodos para encontrar distancias a partir de algunos elementos de triángulos semejantes y rectángulos. El material a emplear puede ser el que tú elijas y desde luego el que puedas adquirir fácilmente.

Instrucciones (2): Con base en la actividad 4 realiza en pareja lo siguiente:

1. Una partida de ajedrez empleando la tabla que elaboraron, pide a un familiar, amigo o a tu profesor que te ayuden a organizarte.
2. Una vez concluido el juego organicen un debate destacando la importancia de utilizar triángulos semejantes y rectángulos en situaciones reales.
3. Redacta en tu libreta una síntesis o relatoría de lo vivido en esta actividad, cuida que tus ideas sean coherentes y sin errores ortográficos. Además describe el procedimiento para encontrar las distancias.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: construir en equipos un ajedrez (tablero y piezas)

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación y medición del tablero. Gráficos o esquemas.	Medida de la diagonal del tablero $44 \cdot \sqrt{2}$ cm.			
	Consta de 64 casillas.			
	Sólo utiliza 2 colores.			
	Trazados correctamente con el juego geométrico.			
Piezas del ajedrez Solución	Las piezas son triángulos realizados con creatividad.			
	Los peones son triángulos rectángulos cuyos lados midan 3, 4 y 5 cm.			
	Torres y caballos, la proporción con respecto a los peones será de 1:1.2.			
	La medida para los alfiles será de 1:1.4.			
	Medida para la reina y el rey de 1:1.7.			
Relatoría	Ideas congruentes, sin faltas ortográficas.			
	Descripción del procedimiento para encontrar distancias.			
Actitudes	Trabaja de forma colaborativa.			
	Escucha las opiniones de los demás y comparte ideas.			
Total de puntos		**13**		

Si en la lista de cotejo lograste los 13 puntos considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **10 a 12 puntos** es **Bien**, de **6 a 9** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto final portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	Entrega la libreta o el cuaderno donde realizó los ejercicios.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden lógico.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	5 ejercicios de la actividad 1 sin error.			
	Dibujo y conclusión del apartado de semejanza.			
	12 ejercicios de la actividad 2 sin error.			
	Reflexión de la actividad 2.			
	10 ejercicios de la actividad 3 sin error.			
	Reflexión de la actividad 3.			
	Actividad 4 Producto de aprendizaje sin error.			

Actitud	Escucha con atención opiniones de los demás y comparte ideas.			
	Trabajó las actividades de forma colaborativa.			
Total de puntos		**13**		

Si en la lista de cotejo lograste los **13 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **10 a 12 puntos** es **Bien**, de **6 a 9** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad identificadas.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque III

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.	

Continúa...

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
	Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
	Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.	
	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
	Articula aprendizajes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	

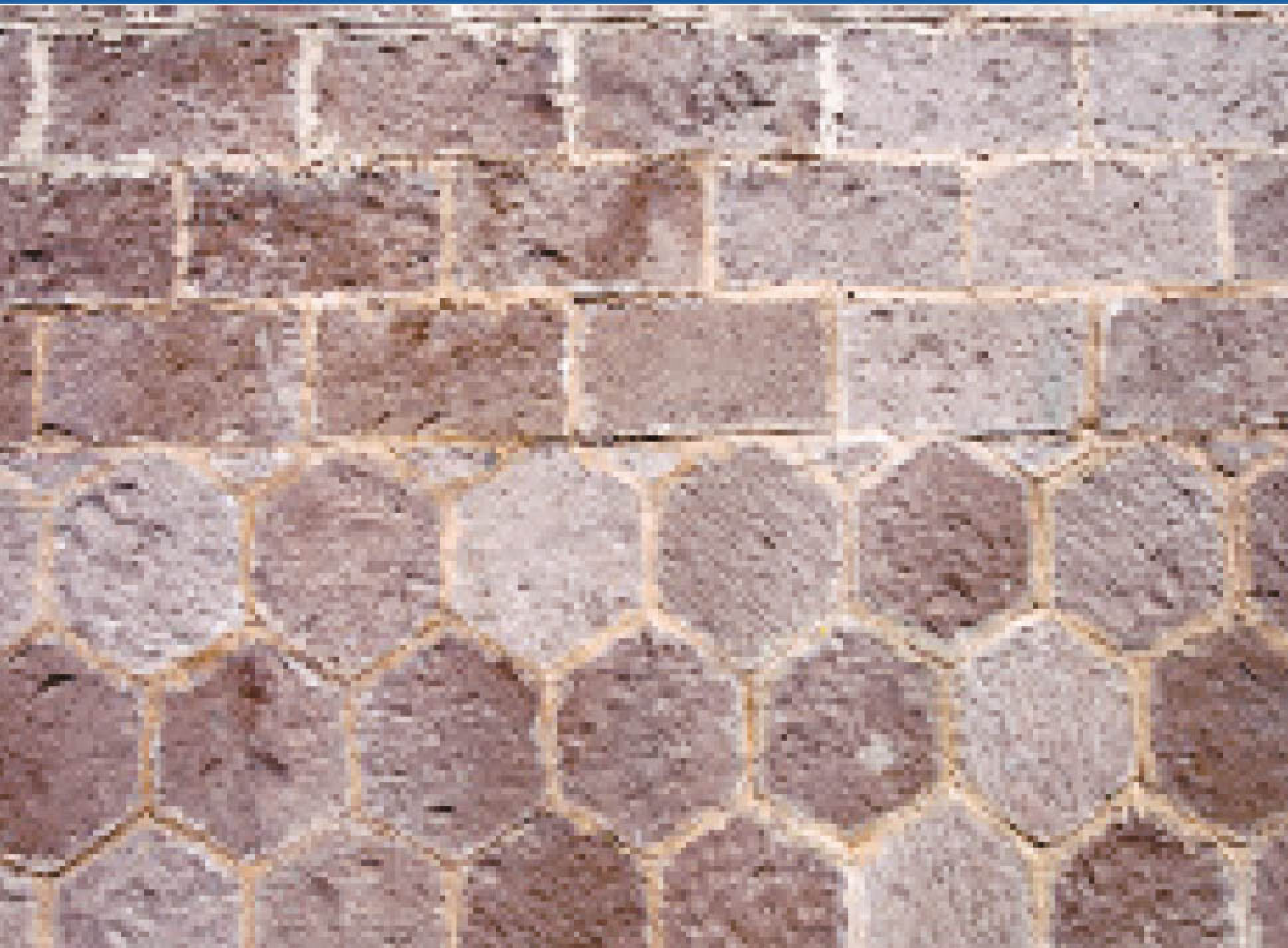
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque IV

Reconoces las propiedades de los polígonos



Introducción

La Geometría, a través de los polígonos, se aplica en diversos ámbitos de nuestra sociedad, como en la producción industrial, en el Diseño, Arquitectura, Topografía, también es un componente necesario en las artes plásticas y es un aspecto importante en el estudio de la naturaleza.

En el presente bloque desarrollaremos herramientas sobre los polígonos, este conocimiento es indispensable en la vida cotidiana porque permite orientarnos en el espacio, también es útil para hacer estimaciones de las formas y distancias de los objetos que están a nuestro alrededor, además es necesario para hacer cálculos relativos sobre la distribución de las cosas o de objetos, como por ejemplo para calcular la medida de terrenos, o para construir y diseñar edificios se requiere calcular los materiales que se ocuparán de acuerdo con sus formas. Éstos son unos de tantos ejemplos que se podrían mencionar sobre la aplicación de los polígonos.

Los aprendizajes adquiridos sobre las características de los triángulos, la congruencia y semejanza entre los mismos y los teoremas de Tales y Pitágoras, entre otros conocimientosm, te ayudarán a comprender las características de los polígonos, sus elementos, propiedades, perímetros y áreas que abordaremos en este bloque IV .

En orden de ideas presentaremos, en primer término, a los polígonos y después sus elementos y propiedades, así como el cálculo de sus áreas y perímetros.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	• *Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.* • *Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.*

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.* • *Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Aplicas las propiedades de los polígonos en determinados problemas de tu contexto y argumentas el uso de este criterio en la solución de ellos.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	Reconoce a los polígonos. Identifica los elementos y propiedades de los polígonos. Calcula áreas y perímetros de los polígonos regulares e irregulares.	Observación de objetos y gráficos. Resolución de problemas.
Procedimentales	Aplicación de las propiedades de los polígonos en la resolución de ejercicios. Argumentación del uso de las propiedades de los polígonos.	Mostrar elementos y propiedades de polígonos. Realización de ejercicios y aplicación de los criterios de los polígonos. Presentación del proceso para llegar a la solución. Dibujo de objetos con la forma de polígonos y explicar los criterios de estas formas.

Actitudinales	Orden y puntualidad en sus trabajos. Honestidad y sociabilidad con sus compañeros y maestros.	Aplica el orden y la puntualidad en los ejercicios de cada actividad. Expresa y muestra acciones en clase que refieran la honestidad y sociabilidad.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 8 horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices 4 horas para revisar los contenidos temáticos y 4 horas para llevar a cabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Portafolio de evidencias
- Investigación sobre polígonos

El **portafolio de evidencias** es un conjunto de pruebas recolectadas a lo largo del período a evaluar. Lo puedes hacer en una libreta o en un cuaderno que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones las cuales te permitan llegar a soluciones de los problemas presentados en las actividades de este bloque. Los trabajos deben mostrar orden y limpieza. Además debe incluir una portada con tus datos (nombre de la escuela, título "Portafolio de evidencias", nombre del estudiante y fecha de entrega) y un índice.

Estos productos serán evaluados con los instrumentos mostrados al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

En la vida cotidiana nos encontramos con multitud de formas en las que, si te fijas bien, puedes apreciar polígonos, como en: panales de abejas, construcciones, planos de todo tipo, edificios, estadios e infinidad de ejemplos más.

Optimización de recursos: utilizar los recursos de que se dispone para generar un beneficio o ganancia.

En el mundo empresarial se utilizan aspectos de los polígonos para la resolución de problemas de reparto o distribución. En estos casos, se modelan tomando los puntos de entrega como vértices y las posibles rutas a seguir, como lados o diagonales de un polígono. De esta forma se aplican herramientas que permiten establecer estrategias que pueden ahorrar tiempo, dinero y, desde luego, esfuerzo. Otro ejemplo muy cotidiano es la **optimización de recursos**. Imagina que quieres construir una lata de aluminio, para envasar refresco de cola. Sabes que la cantidad de refresco por lata será de medio litro y requieres minimizar la cantidad de aluminio a emplear por diversas causas (costo, ecología, peso, etc.). ¿Qué dimensiones debe tener la lata? Aunque está implícito, para resolver la situación se requiere del conocimiento de propiedades de los polígonos, en este caso, del área de un rectángulo.

Considerando las referencias anteriores, escribe seis ejemplos de objetos de tu entorno cuya forma implique la de algún polígono:

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....
5. ....
6. ....

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Con atención, lee cada caso y en tu libreta, destinada para formar tu portafolio de evidencias realiza los procedimientos con un orden lógico y las operaciones necesarias para llegar a la solución de cada caso.

CASO 1. Te están vendiendo un terreno, pero sólo te dicen que la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a la suma de las medidas de sus ángulos exteriores, ¿qué tipo de terreno te venden?

CASO 2. Tienes un terreno de forma hexagonal y quieres vender sólo la tercera parte de él, ¿cómo determinarías el área que quieres vender?

CASO 3. Supongamos que de una hectárea de terreno (ha = 10,000 m^2) con dimensiones de 50 metros de largo por 200 m de ancho, te quieren vender una sección de 45.28 metros de largo por 36.67 m de ancho, ¿cuántos metros cuadrados te venden y cuántos quedan?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Al concluir verifica tus respuestas en el anexo, si en la actividad anterior respondiste correctamente los **3 casos**, considera tu resultado como **Bien**, **2 o 1 casos** como **Regular** y si tus procedimientos y resultados **no llegan a la solución de los 3 casos**, tu desempeño es **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

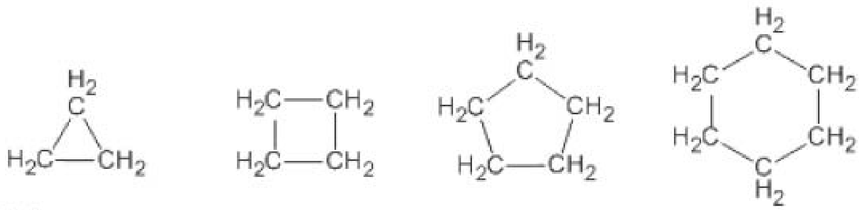
Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: **medidas de ángulos, perímetros y áreas de polígonos.**

Aprende más

Reconocimiento de las propiedades de los polígonos

Identificaremos las propiedades de los polígonos en situaciones diarias de nuestro entorno.

Si observas a tu alrededor, las paredes, los techos, el piso, el pizarrón, las bancas, las sillas, las puertas, … en fin, lo que te rodea, verás muchas cosas; pero lo importante es que observes que tiene lados rectos y circulares, las cuales al unirse representan figuras como rectángulos, cuadrados, círculos, triángulos, entre otras. Y no solo en tu salón puedes apreciar estas formas, en tus clases de química orgánica, cuando veas el tema de hidrocarburos cíclicos, observarás las siguientes cadenas cerradas o cíclicas:



Ciclopropano Ciclobutano Ciclopentano Ciclohexano

Como estas figuras están formadas por líneas definidas les llamamos polígonos o figuras planas. ¿Ahora reconoces la importancia del estudio de los polígonos o figuras planas? ¿Reconoces que no es lo mismo la figura del pizarrón, que las losetas del piso, ni tampoco el foco? ¿En qué son diferentes? ¿Qué diferencias marcarías en las diferentes figuras que observas? Conversa con alguno de tus compañeros sobre las respuestas a estas interrogantes y finalmente exprésenlas a todo el grupo.

Para comenzar a trabajar sobre el tema, te invito a recordar algunos conceptos geométricos.

¿Qué es un círculo? ....

¿Qué elementos tiene un triángulo? ....

....

¿Qué diferencias encuentras entre un triángulo y un rectángulo? Menciona tres diferencias.

¿Cómo sabrías que alguien te habla de un cuadrado y no de un rectángulo?

¿Qué necesitarías saber para construir un triángulo? Menciona dos cosas.

¿Te daría lo mismo construir tu casa en un terreno triangular que en uno cuadrado? Menciona dos razones.

Si tuvieras que caminar un largo camino, ¿qué harías?, ¿caminarías en línea recta o por donde baja el rio? Menciona dos ventajas del primer trayecto y dos desventajas del segundo.

¿Ya te fijaste que la observación y conocimiento son muy importantes y que haciendo uso de ellos podemos deducir muchas cosas?

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Observa y compara por cinco minutos los diferentes polígonos de la figura 4.1, después anota en tu cuaderno las diferencias entre ellos. Reúnete con un compañero de clase para que cada uno mencione por lo menos dos diferencias, finalmente haz las anotaciones de todas las diferencias que hayan encontrado. La entrega de tu trabajo deberá ser en la fecha indicada por el profesor.

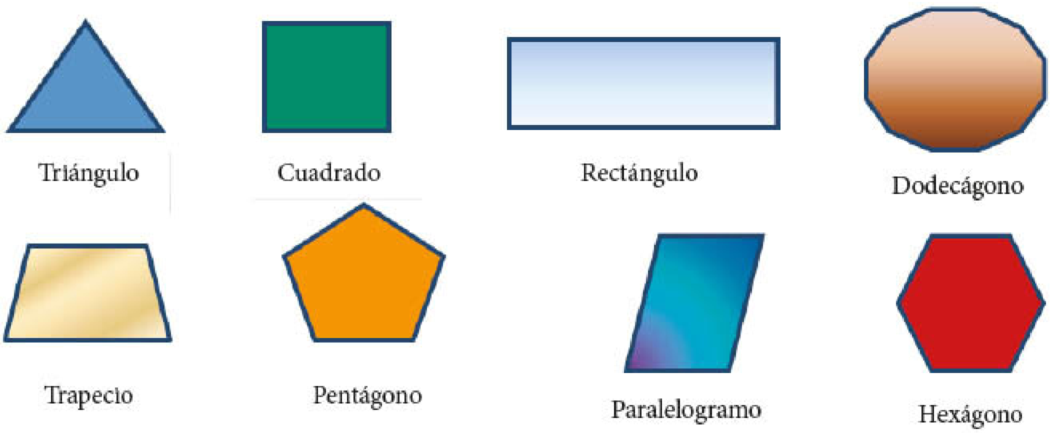


Figura 4.1.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Cuando caminas por una calle, ¿los objetos que ves a tu alrededor llegan a formar polígonos? Explica breve y claramente.

....

....

....

....

Aprende más

Polígonos regulares

Como podrás haber observado, un polígono es una figura plana, cerrada, formada por lados rectos. Las anteriores figuras y muchas otras más son polígonos.

Por la medida de sus lados, los polígonos pueden ser regulares o irregulares.

En la figura 4.2 se presentan algunos polígonos regulares:

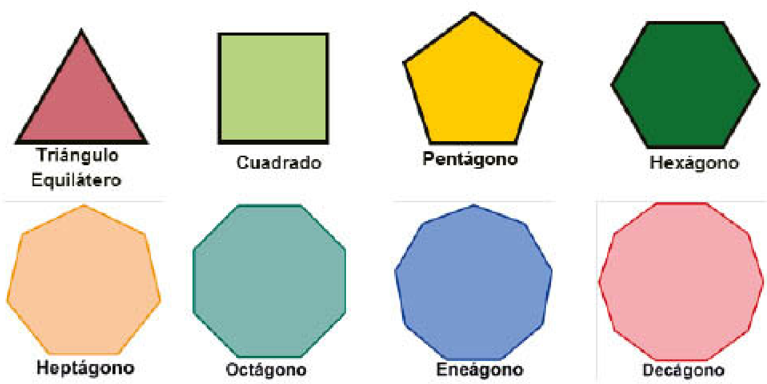


Figura 4.2.

Observando los polígonos que aparecen en la figura 4.2 puedes darte cuenta que tanto sus lados como sus ángulos son iguales. Esta es la característica más importante de los **polígonos regulares**. De este modo, el primer polígono regular es el triángulo regular, denominado triángulo equilátero, que está formado por tres lados y ángulos iguales; le siguen el cuadrado (formado por cuatro lados y ángulos iguales), el pentágono (de cinco lados y ángulos iguales), el hexágono (de seis lados y ángulos iguales), el heptágono (de siete lados y ángulos iguales), el octágono (de ocho lados y ángulos iguales), el eneágono (de nueve lados y ángulos iguales), el decágono (de diez lados y ángulos iguales) y así sucesivamente.

Los **polígonos irregulares** no tienen ángulos y lados iguales, tal es el caso del triángulo isósceles, el triángulo escaleno, el rectángulo, romboide, trapecio, trapezoide y en general cualquier polígono de lados y ángulos diferentes. La figura 4.3 muestra algunos de los polígonos irregulares:

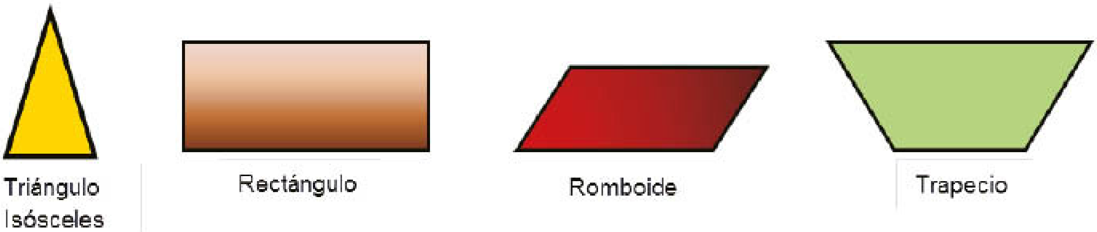


Figura 4.3.

La primera característica que podemos mencionar es que los polígonos se forman con segmentos rectos unidos por sus extremos de dos a dos; como podrás observar en la figura 4.4.

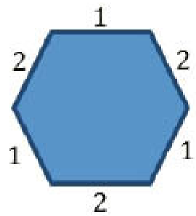


Figura 4.4.

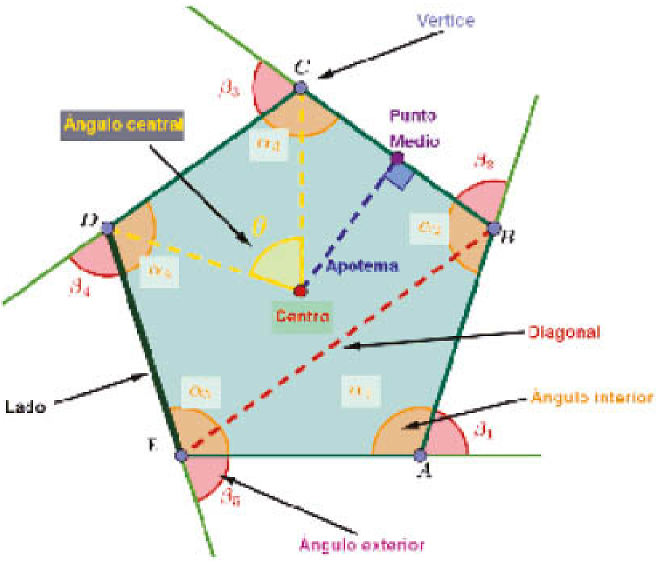


Figura 4.5.

Al trazar un polígono comienzas desde un lado inicial continuando el trazo de cada lado unido por un vértice hasta terminar uniendo el lado final con el inicial.Ahora, ¿cuáles son los elementos importantes que diferencian a unos polígonos de otros?

Mira con atención la figura 4.5, en ella se muestran los elementos principales de un polígono, los cuales describiremos a continuación.

Lados. Son los segmentos rectilíneos que unen dos vértices del polígono. Del número de lados depende el nombre: triángulo (3 lados), cuadrilátero (4 lados), pentágono (5 lados), hexágono (6 lados), etc.

Ángulo central. Este ángulo se forma por las rectas que unen el centro con dos vértices consecutivos.

Ángulo interno. Es el ángulo interior que se forma con dos lados consecutivos.

Diagonal. Segmento rectilíneo que une dos vértices no consecutivos.

Vértice. Punto de intersección de dos lados.

Centro. Punto equidistante de los vértices del polígono.

Ángulo externo. Ángulo suplementario del ángulo interno. Se forma con un lado y la prolongación del lado que comparte el mismo vértice.

Apotema. Segmento rectilíneo perpendicular trazado desde el centro hasta el punto medio de cualquier lado.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Para que comprendas y practiques el trazo de un polígono te invitamos a que realices uno.

Instrucciones: En tu libreta, con ayuda de tus escuadras, te pedimos que traces un romboide como el que se muestra en la figura 4.3, el cual es un polígono irregular. Después de trazarlo realiza una descripción de los pasos que seguiste para dibujarlo. La entrega de tu trabajo deberá ser limpio y en la fecha indicada por el profesor.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Propiedades de los polígonos

Primeramente mencionaremos que una propiedad es el atributo o cualidad esencial de alguien o algo. De acuerdo con nuestro tema, es la cualidad de los polígonos.

Primera propiedad

Numéricamente los lados, vértices, ángulos interiores, ángulos exteriores y ángulos centrales son iguales. En la figura 4.6 se muestra esta propiedad.

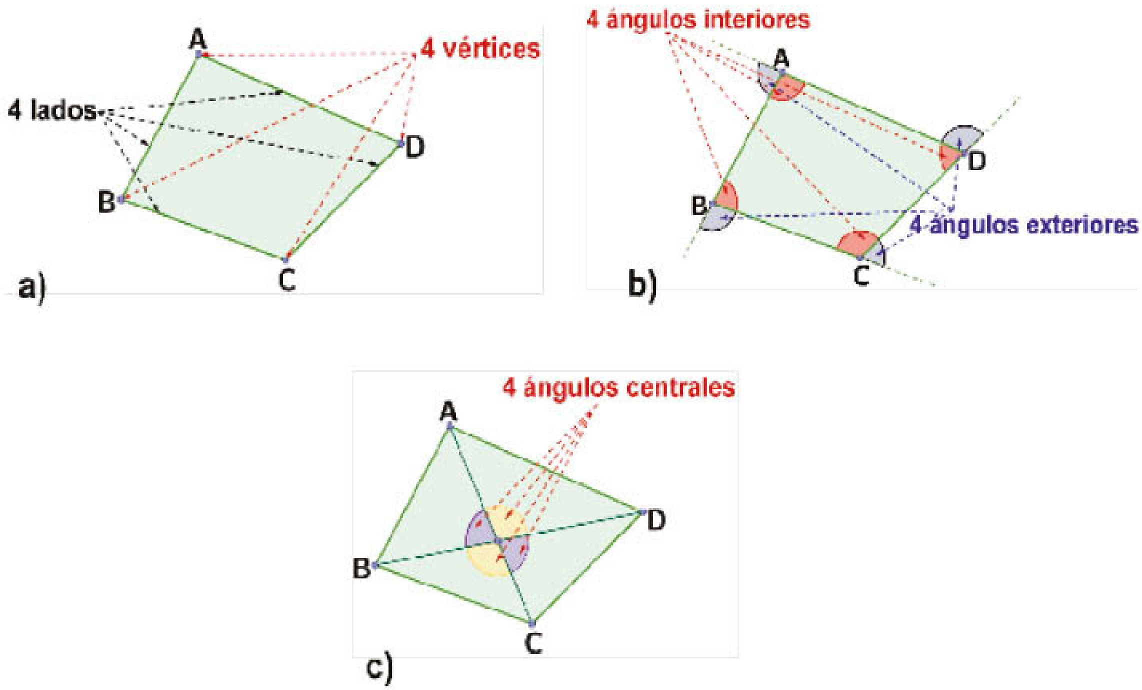


Figura 4.6.

Entonces, como en la figura anterior, si realizas una figura de 6 lados tendrás:

- 6 vértices
- 6 lados
- 6 ángulos interiores
- 6 ángulos exteriores
- 6 ángulos centrales

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Con lo aprendido anteriormente, en tu libreta responde las siguientes preguntas, posteriormente intercambien las respuestas entre compañeros del grupo con el fin de obtener las respuestas correctas.

1. ¿Cuántos ángulos, lados, ángulos internos, ángulos centrales, ángulos externos y vértices obtienes en un dodecágono?
2. ¿Cuántos ángulos, lados, ángulos internos, ángulos centrales, ángulos externos y vértices obtienes en un heptágono?
3. ¿Cuántos ángulos, lados, ángulos internos, ángulos centrales, ángulos externos y vértices obtienes en un cuadrado?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

APRENDE MÁS

Segunda propiedad

En la figura 4.7 se observa que a partir de un vértice de un polígono se pueden trazar un número definido de diagonales en función del número de lados.

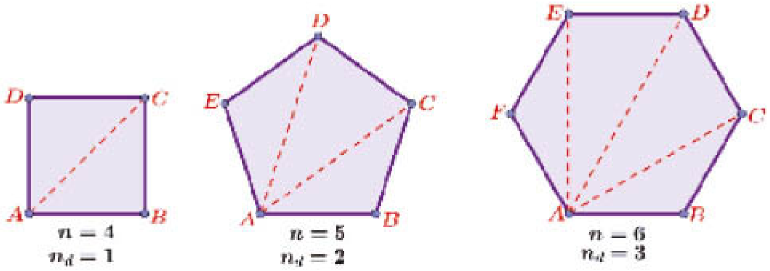


Figura 4.7.

Podemos darnos cuenta que la diferencia entre el número de lados del polígono y la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde uno de sus vértices es 3, por lo que se puede afirmar que el número de diagonales (n_D) que se pueden trazar en el polígono de n lados desde cualquiera de sus vértices está dado por la expresión: $n_D = n - 3$.

Ejemplo: ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice en un octágono?

Solución: De acuerdo con la segunda propiedad:

$$n_D = 8 - 3 = 5$$

La figura 4.8 muestra la veracidad de esto.

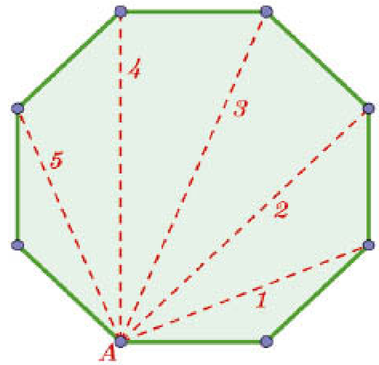


Figura 4.8.

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: Del referente anterior, en tu cuaderno realiza el procedimiento para responder las siguientes preguntas, y traza las figuras correspondientes. Finalmente, en una plenaria, presenta las respuestas, en el tiempo indicado por el profesor.

1. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un heptágono? ________
2. ¿Cuántas diagonales tendría en total la misma figura? ________
3. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un nonágono? ________
4. ¿Cuántas diagonales tendría en total la misma figura? ________
5. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un decágono? ________
6. ¿Cuántas diagonales tendría en total la misma figura? ________
7. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un undecágono? ________
8. ¿Cuántas diagonales tendría en total la misma figura? ________

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Tercera propiedad

El número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono es:

$$n_D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Explicación:

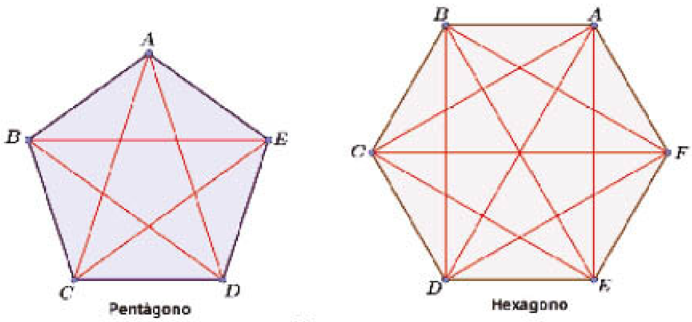


Figura 4.9.

Para el pentágono las diagonales son:

Vértice	1	2
A	AC	AD
B	BD	BE
C	~~CA=AC~~	CE
D	~~DA=AD~~	~~DB=BD~~
E	~~EB=BE~~	~~EC=CE~~

$$n_D = 2 + 2 + 1 = 5$$

Para el hexágono:

Vértice	1	2	3
A	AC	AD	AE
B	BD	BE	BF
C	~~CA=AC~~	CE	CF
D	~~DA=AD~~	~~DB=BD~~	DF
E	~~EA=AE~~	~~EB=BE~~	~~EC=CE~~
F	~~FB=BF~~	~~FC=CF~~	~~FD=DF~~

$$n_D = 3 + 3 + 2 + 1 = 9$$

Del tema de sucesiones, estudiado en Matemáticas I, tenemos que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aplicando a los resultados obtenidos se tiene que:

Para el **pentágono**:

Número de diagonales en cada vértice: $n_1 = 5 - 3 = 2$

Número de diagonales totales: $n_D = 2 + (2+1) = 2 + \frac{\cancel{2}(3)}{\cancel{2}} = 2 + 3 = 5$

Para el **hexágono**:

Número de diagonales en cada vértice: $n_1 = 6 - 3 = 3$

Número de diagonales totales: $n_D = 3 + (3+2+1) = 3 + \frac{3\left(\overset{2}{\cancel{4}}\right)}{\cancel{2}} = 3 + 6 = 9$

Generalizando:

Para un polígono de n lados:

Número de diagonales en cada vértice: $n_1 = n - 3$
Número de diagonales totales:

$$n_D = n - 3 + ([n-3] + [n-2] + [n] + \ldots + 3 + 2 + 1) = n - 3 + \frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

$$n_D = \frac{2(n-3) + (n-3)(n-2)}{2} = \frac{(n-3)(\cancel{2} + n - \cancel{2})}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Aplica lo aprendido

Actividad 5

Instrucciones: En tu cuaderno o libreta realiza el procedimiento necesario con un orden lógico, para responder las siguientes preguntas. Para concluir, presenta las respuestas en el tiempo indicado por el profesor.

1. ¿Cuántas diagonales tendría una figura de 8 lados? ....
2. ¿Cuántas diagonales tendría una figura de 10 lados? ....
3. ¿Cuántas diagonales tendría una figura de 12 lados? ....
4. ¿Cuántas diagonales tendría una figura de 20 lados? ....

5. Traza un heptágono (figura de 7 lados) y desde el vértice que quieras traza las diagonales hasta los demás vértices. Cuenta cuántos triángulos se formaron dentro del polígono: ....

Piensa y escribe ¿cuántos triángulos se obtienen en una figura al trazar las diagonales desde un vértice?

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Cuarta propiedad

Al trazar diagonales desde un mismo vértice se obtiene ($n - 2$) triángulos. Ver figura 4.10.

Esto es: $n_t = n - 2$ triángulos.

En la figura vemos que:

n	n_t
7	5
10	8

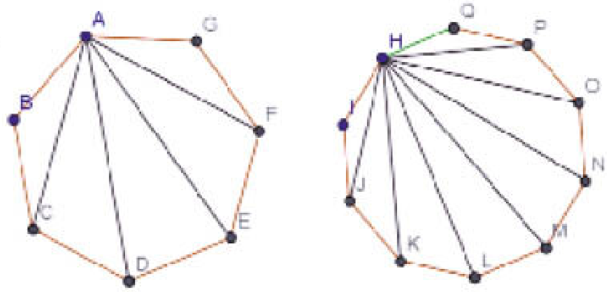


Figura 4.10.

Nos damos cuenta de que la diferencia entre el número de lados del polígono (n) y el número de triángulos desde uno de sus vértices (n_t) es dos, por lo que se comprueba la cuarta propiedad.

Así es, si trazamos las diagonales desde cualquier vértice de un polígono, obtenemos 2 triángulos menos que el número de lados que tenga el polígono.

Aplica lo aprendido

Actividad 6

Instrucciones: En tu cuaderno traza las figuras correspondientes y realiza el procedimiento para responder las siguientes preguntas. Finalmente, preséntalas al grupo en una plenaria.

1. Para un icoságono o isodecágono (polígono de veinte lados), ¿cuántos triángulos obtienes si trazas las diagonales desde un vértice? ....

2. Piensa: ¿cuántos triángulos obtendrías al trazar las diagonales desde el vértice de un dodecágono? ....

3. Y ¿desde el vértice de un tetradecágono? ....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Quinta propiedad

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono está dada por la expresión: $S\angle_i = 180°(n-2)$, donde (n) es el número de lados del polígono.

Para un hexágono que tiene 6 lados, la suma de sus ángulos internos es de:

$$S_{\angle i} = 180^\circ \times (6-2)$$

Esto es: $S_{\angle i} = 180^{\circ} \times (4) = 720^{\circ}$

La figura 4.11 lo muestra:

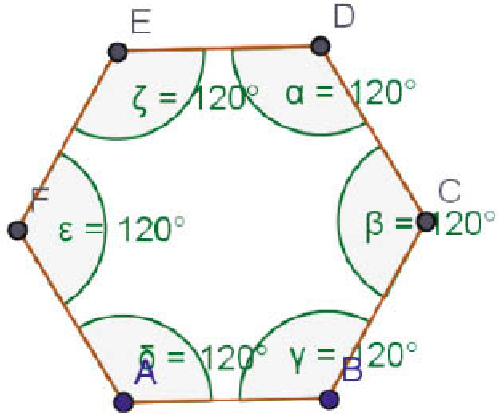


Figura 4.11.

En la figura 4.12 puedes ver un decágono que tiene 10 lados, la suma de sus ángulos internos es de:

$$S_{\angle i} = 180^{\circ} \times (10 - 2) = 180^{\circ} \times 8 = 1440^{\circ}$$

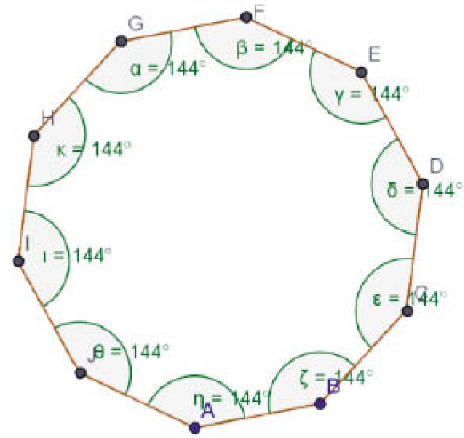


Figura 4.12.

Aplica lo aprendido

Actividad 7

Instrucciones: En tu cuaderno realiza el procedimiento necesario con orden para responder a las siguientes preguntas. Finalmente, en una plenaria, presenta las respuestas en el tiempo indicado por el profesor.

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos internos de un heptágono? ____________
2. ¿Cuál es la suma de los ángulos internos de un cuadrado? ____________
3. ¿Cuál es la suma de los ángulos internos de un triángulo? ____________

4. ¿Cuál es la suma de los ángulos internos de un nonágono? ....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Sexta propiedad

La suma de las medidas de los **ángulos exteriores** de un polígono es 360°.

$$S\angle_e = 360°$$

Lo puedes observar en la figura 4.13.

Un **ángulo exterior** es un ángulo suplementario del ángulo interior.

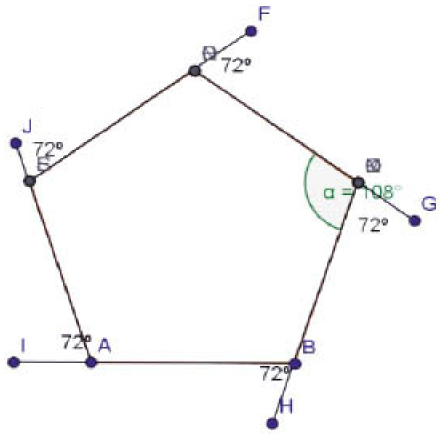


Figura 4.13.

Aplica lo aprendido

Actividad 8

Instrucciones: En tu cuaderno realiza el procedimiento necesario con orden para atender las siguientes indicaciones. Finalmente, preséntalas al grupo en una plenaria.

1. Traza un triángulo escaleno y suma la magnitud de sus ángulos exteriores.
2. Traza un hexágono y suma la magnitud de sus ángulos exteriores.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Séptima propiedad

Al unir un punto de un lado con los vértices opuestos se obtienen (n – 1) triángulos. Esto lo puedes ver en la figura 4.14, en la que se obtuvieron (6 – 1) = 5 triángulos.

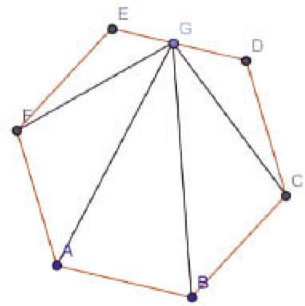


Figura 14

Aplica lo aprendido

Actividad 9

Instrucciones: En tu cuaderno realiza el procedimiento necesario con un orden lógico y aplica las siguientes propiedades. Finalmente preséntalas al grupo en el tiempo indicado por el profesor.

1. Aplica esta propiedad a un cuadrado, trázalo y comprueba.
2. Aplica esta propiedad a un triángulo, trázalo y comprueba.
3. Aplica esta propiedad a un octágono, trázalo y comprueba.
4. Aplica esta propiedad a un decágono, trázalo y comprueba.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Octava propiedad

Al unir un punto interior cualquiera con los vértices se obtiene "*n*" triángulos. Esto lo puedes ver en la figura 4.15.

Nota importante: *Los triángulos no son iguales*.

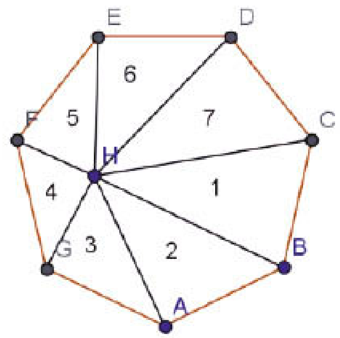


Figura 4.15.

Aplica lo aprendido

Actividad 10

Instrucciones: En tu cuaderno traza las figuras correspondientes y realiza el procedimiento necesario con orden, para atender las siguientes indicaciones. Posteriormente presenta y explica tu trabajo a tus compañeros.

1. Desde un punto interior de un cuadrado une los vértices con diagonales que no se superpongan y cuenta los triángulos que se forman.

2. Desde un punto interior de un hexágono une los vértices con diagonales que no se superpongan y cuenta los triángulos que se forman.

3. Desde un punto interior de un decágono une los vértices con diagonales que no se superpongan y cuenta los triángulos que se forman.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Por último, acerca de los polígonos regulares, como el que se muestra en la figura 4.16, podemos afirmar que tienen las siguientes características:

1. El **centro** de un polígono regular es un punto equidistante de todos los vértices del polígono.
2. Los polígonos se pueden dividir en triángulos cuyos lados son un lado del polígono y los dos segmentos que unen el centro y los vértices del lado (radios).
3. El **apotema** es el segmento que une el centro y la mitad de cada lado del polígono.
4. El **radio** es el segmento que une el centro y cada vértice.
5. Todo polígono regular tiene una circunferencia inscrita de radio igual a su apotema y una circunferencia circunscrita de radio igual al segmento que une el centro con uno de los vértices.

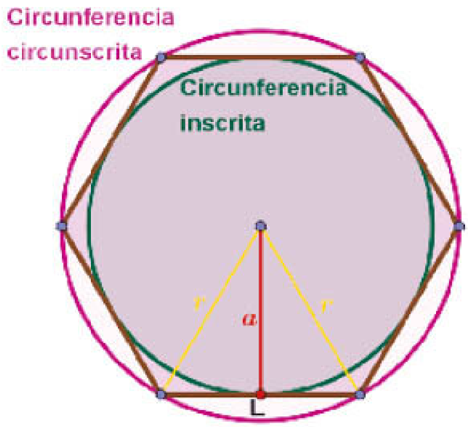


Figura 4.16.

Polígonos irregulares: aquellos que no tienen lados y ángulos iguales, con o sin lados paralelos.

Las propiedades que hemos estudiado se aplican por igual a éstos.

Aprende más

Perímetros y áreas de polígonos

Observa las siguientes imágenes y verás las formas de algunos polígonos.

Sabías que...

Las colmenas de las abejas están hechas con tubos de seis caras, que corresponden a la forma perfecta para la producción de miel, debido a que requieren menos cera y pueden contener más miel.

Perímetro de un polígono

El perímetro de cualquier polígono de n lados, regular o irregular, se obtiene sumando las medidas de sus lados, esto es:

$$P = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n$$

Donde l_1 es la medida del primer lado, l_2 la del segundo lado, l_3 la del tercero, y así sucesivamente. Si el polígono es regular: $P = n \cdot l$

Área de los polígonos

El **área** de cualquier polígono regular de n lados se obtiene con la mitad del producto de su perímetro por su apotema. La fórmula para el área es:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{perímetro \cdot apotema}{2}$$

Demostración:

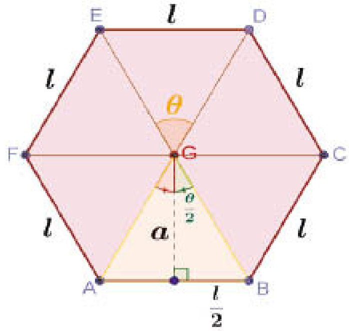


Figura 4.17.

Si se conocen las medidas de los lados l y apotema a:

En la figura 4.17, el área del triángulo ABG está dada por $A_t = \frac{l \cdot a}{2}$ y dado que hay triángulos congruentes, entonces $A_t = n \cdot A_t = n\left(\frac{l \cdot a}{2}\right) = \frac{nl \cdot a}{2}$, pero $P = nl$, por lo que $A_t = \frac{P \cdot a}{2}$, que es lo que se quería demostrar.

Ahora bien, si no se conoce la apotema:

La medida del ángulo central es: $\theta = \frac{360°}{n}$, de modo que para el triángulo ABG se tiene $m\angle AGB = \frac{\theta}{2} = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$.

Así: $tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{l}{2a}$, de donde $a = \frac{l}{2tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$, por lo que

$$A_t = \frac{P \cdot \frac{l}{2tan\left(\frac{180°}{n}\right)}}{2} = \frac{nl \cdot \frac{l}{2tan\left(\frac{180°}{n}\right)}}{2} \text{ y, finalmente } A = \frac{n \cdot l^2}{4tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

que se emplea cuando se conocen las medidas de los lados (l) del polígono y el número de lados (n).

Sin embargo, también se pueden aplicar las siguientes fórmulas:

Cualquier ***triángulo***:

- Dadas su base y altura: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{base \cdot altura}{2}$
- Dados sus tres lados: $A = \sqrt{s(s-l_1)(s-l_2)(s-l_3)}$, que es la fórmula de Herón. En esta fórmula: s es el semiperímetro; es decir $s = \frac{P}{2} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2}$
- Dados dos lados (a y b) y el ángulo (θ) entre ellos: $A = \frac{a \cdot b \cdot sen\, \theta}{2}$

Cuadrado: $A = l \times l = l^2 = lado \times lado = lado^2$

Rectángulo o paralelogramo: $A = b \times h = base \times altura$

$$A = l \cdot a = largo \cdot ancho$$

Rombo o romboide: $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{(Diagonal\ mayor) \cdot (diagonal\ menor)}{2}$

Trapecio o trapezoide: $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(Base\ mayor + base\ menor) \cdot altura}{2}$

Para cualquier polígono irregular:

$$A_T = Suma\ de\ las\ áreas\ de\ los\ triángulos\ interiores$$

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

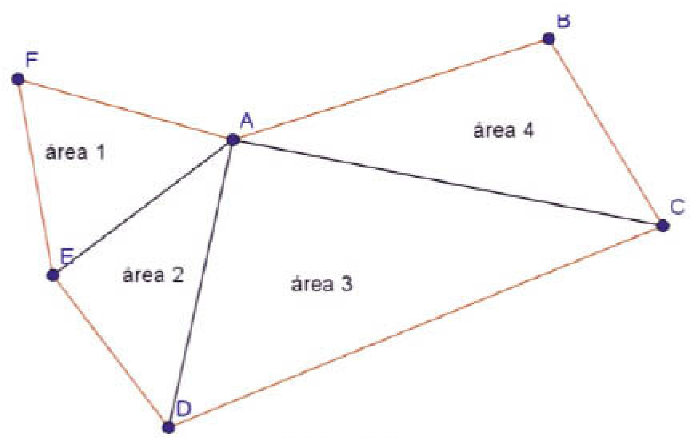


Figura 4.18.

En resumen:

Perímetro

De cualquier polígono: $P = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n$

Área

Triángulo: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{base \cdot altura}{2}$

Cuadrado: $A = l \cdot l = l^2 = lado \cdot lado = lado^2$

Rombo o romboide: $A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{(Diagonal\ mayor) \cdot (diagonal\ menor)}{2}$

Trapecio o trapezoide: $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2} = \dfrac{(Base\ mayor + base\ menor) \cdot altura}{2}$

Pentágono, hexágono, heptágono… : $A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{Perímetro \cdot apotema}{2}$

Polígonos irregulares: Suma de las áreas de sus triángulos internos:

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

Ejemplos 1: Calcular el área y perímetro de un cuadrado de 15 cm de longitud por lado.

Solución:

Perímetro: $P = n \cdot l = 4(15) = 60$, $P = 60\ cm$

Área: $A = l^2 = 15^2 = 225$,

Respuesta: *El perímetro es de 60 cm y el área de 225 cm²*

Ejemplo 2: Calcular el área y perímetro de un pentágono que tiene lados de 8 cm de longitud y apotema de 6 cm.

Solución:

Perímetro: $P = n \cdot l = 5(8) = 40\,,\ P = 40\ cm$

Área: $A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{40(6)}{2} = 20(6) = 120\,,\ A = 120\ cm^2$

Respuesta: *El perímetro es de 40 cm y el área de 120 cm²*

Ejemplo 3: Calcular la dimensión de la apotema de un heptágono que tiene un área de 256 cm^2 y un perímetro de 85 cm.

Solución:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$256 = \frac{85 \cdot a}{2}$$

$$a = \frac{256(2)}{85} = \frac{512}{85} = 6.02$$

Respuesta: *El apotema del heptágono es de 6.02 cm aproximadamente.*

Ejemplo 4: La figura 4.19 es un cuadrado de área igual a 256 cm^2. Calcula el área del triángulo AEB, tomando en cuenta que E es el punto medio de $\overline{CB}$.

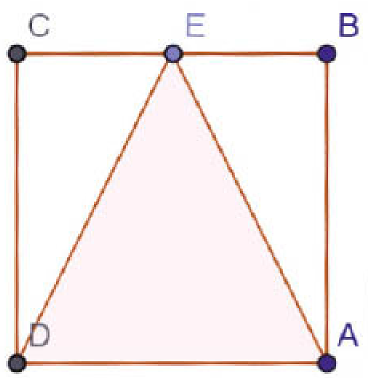


Figura 4.19.

Solución:

Trazos auxiliares:

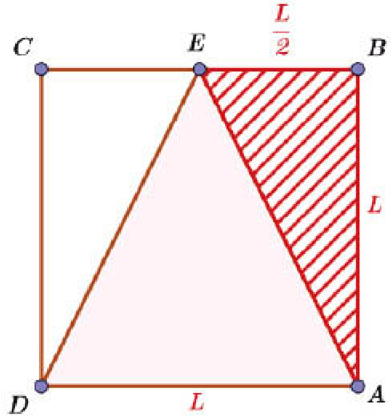


Figura 4.20.

Cálculo de las medidas de los lados del cuadrado:

$$A = L^2$$

$$256 = L^2$$

$$L = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$$

Para el triángulo AEB, podemos tomar como base al segmento AB y como altura al segmento EB, pues es triángulo rectángulo y los catetos son base y altura, respectivamente. Así:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{16\left(\frac{16}{2}\right)}{2} = \frac{16(8)}{2} = 8(8) = 64 \text{ cm}^2$$

Respuesta: *El área del triángulo AEB es de 64 cm²*

5. Se van a colocar adoquines hexagonales en el piso del patio de tu escuela como los que se muestran en la figura 4.21. Para ello se adquirieron piezas de 10 cm de lado. El área que se desea adoquinar tiene forma rectangular de 25 m de largo por 29 m de ancho. ¿Cuántos adoquines se tienen que comprar?

Figura 4.21.

Solución:

Cálculo del área de una pieza:

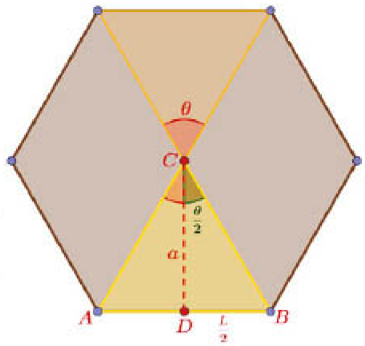


Figura 4.22.

θ es el ángulo central cuya medida es: $\theta = \frac{360°}{6} = 60°$. En el triángulo BCD, la medida del ángulo BCD es la mitad de θ, por lo que $m\angle BCD = 30°$ y como L = 10 cm, entonces DB = 5 cm.

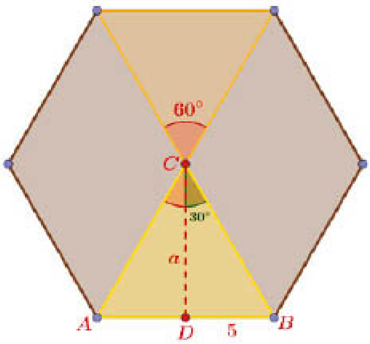


Figura 4.23.

Así: $\tan 30° = \frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{\tan 30°} = 8.7$ cm

De este modo, el área del triángulo ABC es:

$$A = \frac{10(8.7)}{2} = \frac{87}{2} = 43.5 \text{ cm}^2$$

La pieza cubre un área de 6(43.5) = 261 cm^2, que equivale a

$$A_{1\,pza} = 261\ \cancel{cm^2}\ \frac{(1\ m)^2}{(100\ \cancel{cm})^2} = 0.0261\ m^2$$

Ahora bien, el área que se desea adoquinar es de $A_p = 25(29) = 725$ m^2, por lo que el cálculo de piezas necesarias es:

$$n = \frac{A_p}{A_{1\,pza}} = \frac{725\ \cancel{m^2}}{0.0261\ \cancel{m^2}} = 27{,}777.78$$

Respuesta: se requieren, al menos, 27,778 piezas de adoquín, aproximadamente.

Aplica lo aprendido

Actividad 11

Instrucciones: En equipos conformados de acuerdo con el profesor, resuelve los siguientes ejercicios, realizando en tu libreta los procedimientos con un orden lógico, con el fin de mostrar las evidencias de cada solución. La entrega del trabajo deberá ser en la fecha indicada por el profesor.

1. El área de un triángulo es de 88 cm^2 y su altura es de 25 cm, ¿cuál es la longitud de la base?
2. ¿Cuánto mide la apotema de un octágono que tiene un área de 1256 cm^2 y un perímetro de 300 cm?
3. En la escuela se va a construir la cancha de fútbol rápido que tiene 120 m de largo y 60 m de ancho, pero a su alrededor, se hará una pista de carreras de 8 m de ancho para atletismo, como lo muestra la figura 4.24. Halla el área del terreno y el área de la pista.

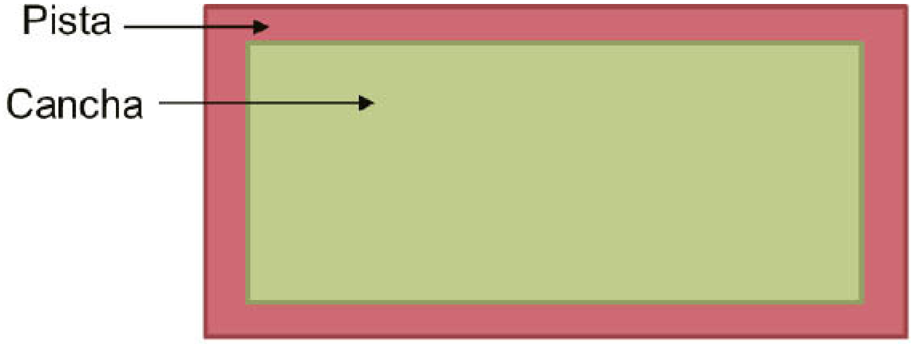


Figura 4.24.

4. En la escuela se va a construir el auditorio, que es un hexágono de 40 m de lado. ¿Cuántas butacas se podrán poner si hay que reservar un área entre corredores y estrado 500 m^2 y cada butaca ocupa un área de 2.5 m^2?
5. En la comunidad se pondrá piso con losetas de 20 cm x 20 cm para el teatro que es un octágono con dimensiones de 25 m por lado y una apotema de 15 m. ¿Cuántas losetas se colocarán en el piso?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Por qué consideras que la cubierta de un balón de fútbol la forman polígonos como el hexágono?

....

....

....

....

....

Actividad 12

Producto de aprendizaje: investigación del hexágono

Instrucciones: En equipos de 4 compañeros realiza esta actividad que resultará interesante y además muy práctica:

Investiga por qué el hexágono es una figura tan sólida, que hasta las abejas la utilizan en la construcción de sus panales para depositar la miel. Explica la forma en que los resultados de tu investigación son útiles en la construcción de casas con techos de dos aguas.

Te sugerimos que consultes a un ingeniero civil, a tus maestros de Matemáticas y fuentes bibliográficas o electrónicas a tu alcance, a las que puedes acceder por medio de internet o en bibliotecas de tu comunidad.

Tu trabajo debe contener una carátula donde escribas tus datos (nombre, asignatura, semestre y fecha de entrega). En la siguiente hoja debes incluir un índice y después el contenido de tu investigación, con datos relevantes y pertinentes e imágenes para representar alguna idea, ejemplos donde se aplique la información obtenida. Posteriormente una conclusión y finalmente la bibliografía. Cuida que las ideas mantengan coherencia y que tengan errores ortográficos.

Seguramente los datos que obtengas serán asombrosos y nunca te lo habías imaginado.

Como podrás darte cuenta, las propiedades de los polígonos son muy útiles y si profundizas más sobre el conocimiento de los polígonos descubrirás cosas insólitas de nuestro entorno y de la naturaleza.

Al finalizar tu investigación, realiza una presentación y explica tu trabajo a todos tus compañeros.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: investigación del hexágono

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Información	Datos relevantes y pertinentes.			
	Bibliografía.			
	Representación de ideas principales.			
	El desarrollo del contenido es coherente.			
	No presenta errores ortográficos.			

Continúa...

Presentación	Carátula con datos del estudiante, asignatura, semestre, fecha.			
	Creatividad en la investigación del hexágono.			
	Ejemplifica aplicaciones.			
	Contiene índice.			
Conclusión	De forma precisa y coherente.			
Exposición	Presenta puntos importantes del tema.			
	Tiene dominio en el manejo de conceptos.			
	Argumenta con precisión y claridad.			
	Utiliza imágenes para representar ideas principales y textos cortos.			
	Su articulación y su volumen de voz le permiten mantener el interés del grupo.			
Actitud	En el trabajo mostró orden, puntualidad y honestidad.			
	Mostró disposición para compartir sus ideas.			
Total de puntos		**17**		

Si en la lista de cotejo lograste los **17 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **12 a 16 puntos** es **Bien**, de **6 a 11** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto final portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	Entrega la libreta o el cuaderno donde realizó los ejercicios.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden lógico y limpieza.			
	Presenta índice.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	5 ejercicios de la actividad 1 sin error.			
	Dibujo y conclusión del apartado de semejanza.			
	12 ejercicios de la actividad 2 sin error.			
	Reflexión de la actividad 2.			
	10 ejercicios de la actividad 3 sin error.			
	Reflexión de la actividad 3.			
	Actividad 4 Producto de aprendizaje Sin error.			

Continúa...

Procedimientos	Mantienen secuencia lógica, trazos alineados y unidades pertinentes.			
	Resultados correctos marcados a tinta.			
Actitud	En el desarrollo de los ejercicios mostró honestidad y socializaba sus trabajos.			
Total de puntos		**17**		

Si en la lista de cotejo lograste los **17 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **12 a 16 puntos** es **Bien**, de **6 a 11** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque IV

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
	Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Sintetiza evidencias obtenidas me-diante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	

Continúa...

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.	
	Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque V

Empleas la circunferencia

Introducción

Estamos ingresando al último de los elementos geométricos que el programa del curso contempla. Y no es que se hayan agotado, sino que estamos abordando los contenidos que señala el programa de estudio que debes desarrollar en el presente nivel educativo. Sin embargo, debes indagar aún más temas de Geometría, con el fin de desarrollar la habilidad de representar gráficamente tu entorno.

En este bloque abordaremos el tema de la circunferencia y el círculo. Son dos palabras con significados distintos, muy relacionados, pero distintos. Estas formas geométricas las podemos encontrar en una gran diversidad de objetos, la presencia de estos elementos en nuestro entorno es tan frecuente, y podemos verlos, desde la forma en la que giran las hélices de un helicóptero, las propelas de un barco, los dispositivos de almacenamiento (discos duros, magnéticos, ópticos), latas de refrescos e incluso en términos o expresiones que a lo mejor has escuchado: el círculo vicioso, los círculos empresariales y en objetos diversos como neumáticos, tuberías, vasos, gorras, etc. No es casualidad lo anterior, estamos ante la figura geométrica más simple y útil para el hombre, aunque es precisamente la simpleza, la que en un momento dado la convierte en fuente de elementos que a lo largo de la historia han motivado a diversos autores a realizar estudios sobre la circunferencia y círculo.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	• *Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.*
3. Elige y practica estilos de vida saludables.	• *Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.* • *Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.*

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.* • *Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y* • *Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.* • *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Empleas las propiedades de los elementos asociados a una circunferencia como: radio, diámetro, cuerda, arco, secantes y tangentes en la resolución de problemas. Asimismo, resuelves ejercicios de perímetros y áreas de la circunferencia.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Circunferencia • Rectas y segmentos • Ángulos • Perímetro y área	Describe las propiedades de los elementos asociados con las circunferencias.
Procedimentales	Describe las propiedades de los elementos asociados con las circunferencias. Argumentación de las características relacionadas con problemas reales de la comunidad.	Aplica las propiedades y relaciones de segmentos, ángulos, arcos y rectas ligados a las circunferencias para establecer sus relaciones y medidas.

Actitudinales	Orden y puntualidad en sus trabajos. Solidaridad y sociabilidad con sus compañeros y maestros.	Aplicando el orden y la puntualidad en los ejercicios de cada actividad. Expresando y mostrando acciones en clase que refieran la solidaridad y sociabilidad.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 8 horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices 4 horas para revisar los contenidos temáticos y 4 horas para llevar a cabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Portafolio de evidencias
- Investigación acerca de la rueda

El **portafolio de evidencias** es un conjunto de pruebas recolectadas a lo largo del período a evaluar. Lo puedes hacer en una libreta o en un cuaderno que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones las cuales te permitan llegar a soluciones de los problemas presentados en las actividades de este bloque. Los trabajos deben mostrar orden y limpieza. Además debe incluir una portada con tus datos (nombre de la escuela, título "Portafolio de evidencias", nombre del estudiante y fecha de entrega) y un índice.

Estos productos serán evaluados con los instrumentos mostrados al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

Aproximadamente en el año 5500 a.C., durante la prehistoria se dio la invención de la rueda, lo que dio inicio a la tecnología de hoy en día. Aunque de manera indirecta se tienen aplicaciones de la circunferencia en diferentes áreas de las ciencias.

La circunferencia es un elemento geométrico de mucha importancia. Diariamente lo encontramos en todas partes, gracias a esta forma se pueden realizar técnicas de gran precisión con productos como los CD's, los relojes, entre otros. Una aplicación de la circunferencia la observamos en una bicicleta, ya que en ella han trabajado ingenieros que conocen los principios de la circunferencia y aprovechan al máximo todo lo que ésta les puede ofrecer. ¿Qué opinas de las utilidades de la circunferencia en la vida actual y dónde podemos encontrarla? Escribe tus comentarios en las líneas siguientes, de manera breve y clara.

....

....

....

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Has llegado a la segunda parte del curso de Matemáticas II, y para comprender los nuevos temas es conveniente recordar lo visto en el primer semestre y en los bloques anteriores, como las propiedades de los polígonos y la aplicación del criterio de congruencia de los triángulos.

Instrucciones: Responde las siguientes interrogantes, realizando en tu libreta los procedimientos con orden y limpieza, que te permitan obtener las soluciones. Finalmente, en la fecha que te indique el profesor, presenta y explica el trabajo realizado a todos tus compañeros.

1. ¿Cómo demuestras el teorema de Pitágoras?

2. ¿Qué necesitas conocer para calcular el área de un pentágono?

3. Si tuvieran la misma longitud de la apotema un hexágono y un cuadrado, ¿en qué figura existe mayor cantidad de área?

4. Calcula el área del triángulo equilátero de la figura, sabiendo que su perímetro es 32.2 cm y la apotema de 3.1 cm.

5. Calcula la distancia x entre un vértice y el centro de un pentágono, como lo muestra la figura 5.1. Sabiendo que su área es de 30 m^2 y que el perímetro es de 20 m.

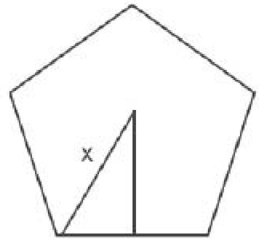


Figura 5.1.

6. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 24 m y 10 m, como lo muestra la figura 5.2 ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m.

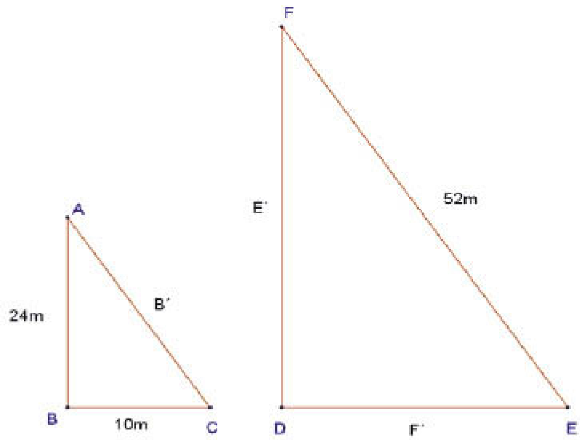


Figura 5.2.

7. Calcula el área de un hexágono de 45 cm de longitud por lado.

8. Calcula el área de un cuadrado que tiene una diagonal de 6cm.

9. Calcula la longitud de los lados de un octágono que tiene una apotema de 8 cm y un área de 80 cm^2.

10. ¿Cuál es el área de la parte sombreada en la figura 5.3? Justifica tu respuesta.

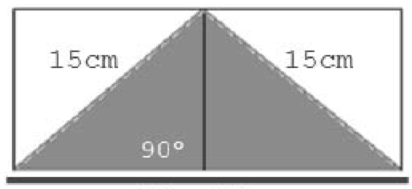


Figura 5.3.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Al concluir verifica tus respuestas en el anexo. Si de la actividad anterior respondiste correctamente de **10 a 9 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, de **8 a 6** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **5 o menos** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: **teorema de Pitágoras, áreas de polígonos, congruencia, semejanza y ecuaciones de primer grado.**

Aprende más

Definición de circunferencia

La circunferencia y sus propiedades han sido tema de discusión, reflexión y estudio durante muchos años. Desde la antigüedad, los dedicados a realizar cálculos observaron una relación estrecha entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. En el siglo XVII dicha relación recibió el nombre de Pi (π), el cual proviene del vocablo que los antiguos griegos le daban al perímetro del círculo: *peripheria*. Seguramente en cursos básicos de Matemáticas tuviste contacto con este término e incluso lo empleaste para realizar algunos cálculos; sin embargo, sólo para descubrir su comportamiento, comprender el tema y la dinámica de la evolución del número.

En este bloque además abordaremos el tema de la circunferencia con el propósito de comprender la importancia y la gran utilidad que ha representado para la humanidad.

Circunferencia: conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto llamado centro. El segmento de recta que une al centro con cualquiera de los puntos de la circunferencia recibe el nombre de radio.

Al definir la circunferencia como un lugar geométrico, damos por entendido que se encuentra formada por una infinidad de puntos que cumplen la propiedad especificada. El término equidistante significa que un conjunto de puntos están a la misma distancia de un punto llamado centro, como se puede ver en la figura 5.4.

Figura 5.4.

Para refererirnos a una **circunferencia**, utilizaremos de preferencia la letra **C**.

Círculo

El círculo es una figura plana limitada por una curva cerrada que también forma parte de él, llamada **circunferencia** (figura 5.5).

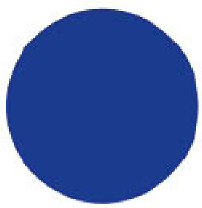


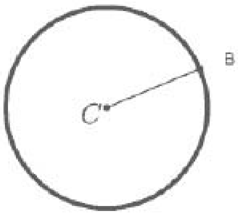
Figura 5.5.

Elementos de la circunferencia y sus relaciones

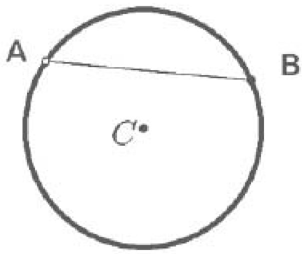
Los elementos y rectas o segmentos de recta relacionados con una circunferencia se muestran en la tabla siguiente:

Elementos de la circunferencia y sus relaciones

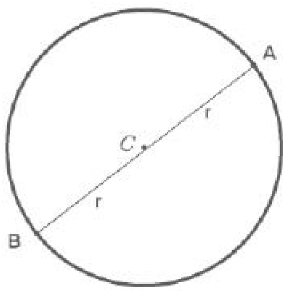
Concepto



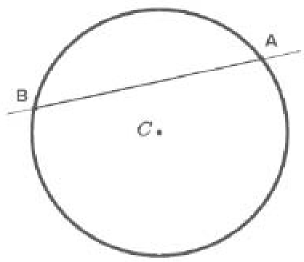
El segmento $\overline{CB}$ se denomina **radio**, los radios de una circunferencia son congruentes entre sí.



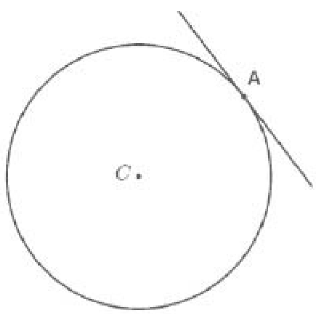
El segmento $\overline{AB}$ se denomina **cuerda** de la circunferencia.



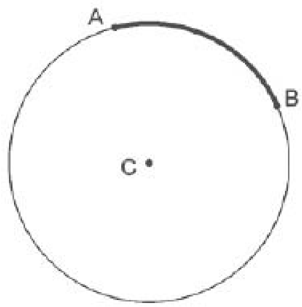
Diámetro $\overline{AB}$**.** Es la recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro de ésta y mide dos radios. $D = 2r$. En la circunferencia hay infinidad de diámetros y todos son congruentes entre sí.
El diámetro divide la circunferencia en dos arcos congruentes que se llaman **semicircunferencias**.



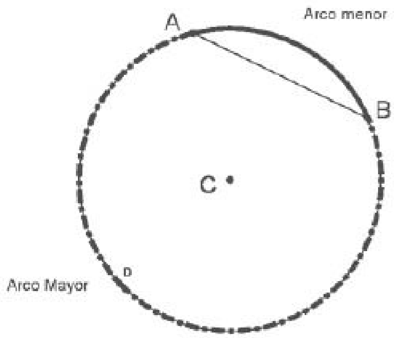
Secante. Es la línea recta que tiene dos puntos comunes con la circunferencia. sin pasar por el centro.



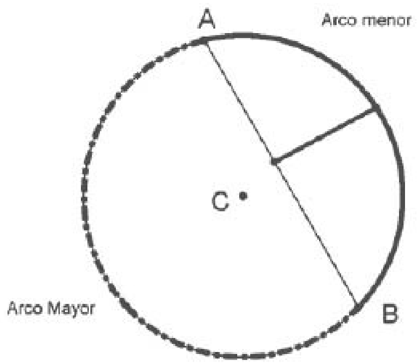
Tangente. Si la recta tiene un solo punto en común con la circunferencia, se dice que es tangente y al punto se le llama punto de tangencia o punto de contacto.



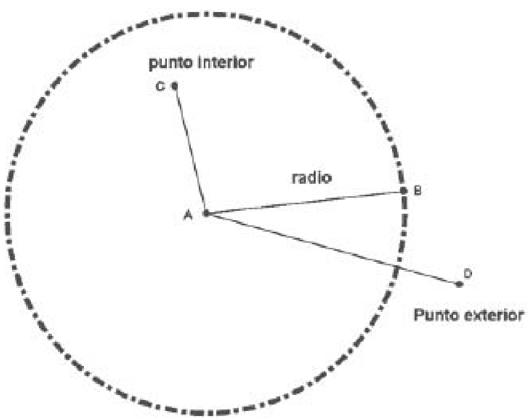
Arco de la circunferencia. Es una porción de circunferencia. El conjunto de puntos que se encuentran entre A y B, incluyendo a éstos, se llama arco y se representa por: $\overset{\frown}{AB}$



Cuerda. Es el segmento de la circunferencia determinado por dos puntos de la circunferencia. La cuerda divide la circunferencia en dos arcos. Según su tamaño, a uno lo denominamos arco mayor y al otro arco menor.



Flecha. También llamada **sagita** de un arco circular, es la distancia desde el centro del arco al centro de la cuerda y se forman segmentos congruentes en la cuerda.



Puntos exteriores. Son los puntos cuya distancia al centro es mayor que el radio, $\overline{AB} < \overline{AD}$.

Puntos interiores. Son los puntos que distan del centro y son menores que el radio $\overline{AB} > \overline{AC}$.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Realiza los siguientes ejercicios en tu libreta, manteniendo orden en el registro. Reflexiona tus respuestas y coméntalas con tus compañeros de clase. Presenta el trabajo en la fecha que indique tu profesor.

1. Traza una circunferencia con un radio de 7cm de longitud.
2. En una circunferencia de 8cm de diámetro, traza una recta tangente.
3. ¿Cuántos radios y cuantos diámetros se pueden trazar en una circunferencia?
4. ¿Cuántas tangentes se pueden trazar sobre una circunferencia?
5. Si el radio de una circunferencia mide ½ cm, ¿cuánto mide el diámetro de la misma?
6. Tomando en cuenta la rueda de una bicicleta, identifica los radios, cuerdas, diámetros y arcos que forman parte de ella. Anota tus observaciones y compártelas con tus compañeros de clase.
7. Identifica los segmentos y rectas que se solicitan en la siguiente figura 5.6.

B =
ON =
HJ =
L =
K =
AB =
EF =
CD =
BG =

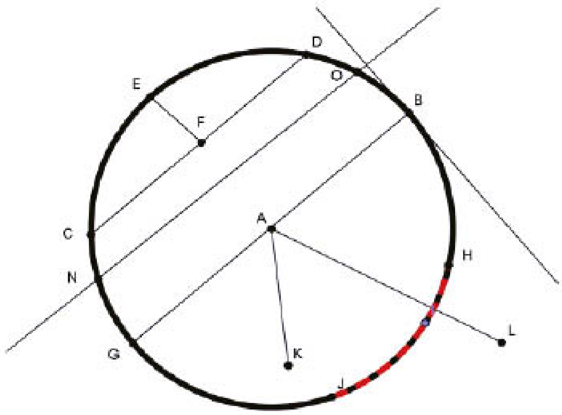


Figura 5.6.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Ahora analizaremos algunos aspectos referentes a la propia circunferencia y a la relación que guarda con otras circunferencias, de diferente diámetro, que pueden dibujarse en su interior o exterior.

Relación entre circunferencias

Concepto

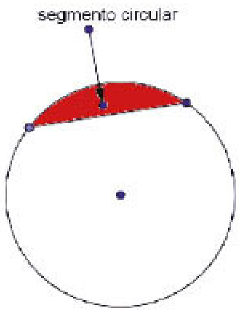


Figura 5.7.

El área delimitada por una cuerda y la circunferencia se conoce como **segmento circular**, como lo muestra la figura 5.7.

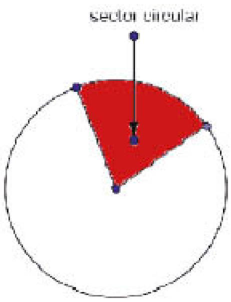


Figura 5.8.

El área delimitada por dos radios se llama **sector circular**, como se muestra en la figura 5.8.

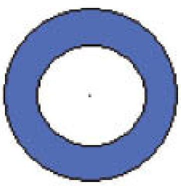


Figura 5.9.

El área delimitada por dos circunferencias concéntricas se llama **corona circular**, como se muestra en la figura 5.9.

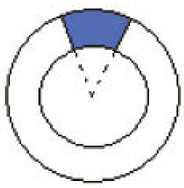


Figura 5.10.

El área delimitada por un sector de la corona circular se llama **trapecio circular**, como se muestra en la figura 5.10.

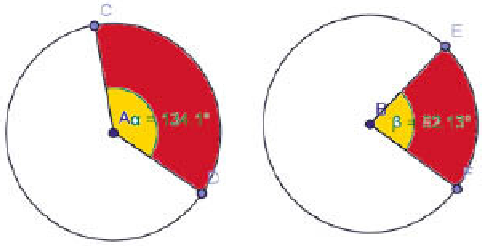


Figura 5.11.

Desigualdad de ángulos y arcos. Dos sectores circulares diferentes generan arcos diferentes, por tener ángulos diferentes, como se muestra en la figura 5.11.

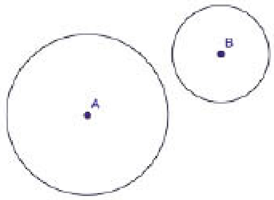


Figura 5.12.

Circunferencias exteriores.
Son aquellas que no tienen ningún punto en común, como se muestra en la figura 5.12.

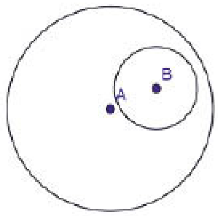


Figura 5.13.

Circunferencias interiores.
Son aquellas en la que el área de una de ellas es parte del área de la otra, como se muestra en la figura 5.13.

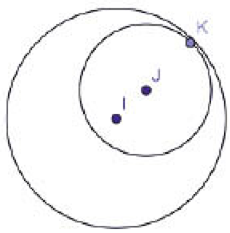


Figura 5.14.

Circunferencias tangentes interiores.
Son aquellas circunferencias interiores que se tocan en un punto, como se muestra en la figura 5.14.

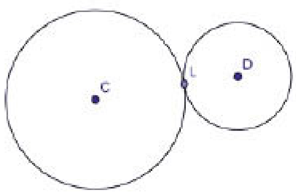


Figura 5.15.

Circunferencias tangentes exteriores.
Son aquellas circunferencias exteriores que se tocan en un solo punto, como se muestra en la figura 5.15.

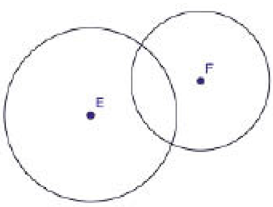


Figura 5.16.

Circunferencias secantes.
Son aquellas circunferencias interiores que se cortan en dos puntos, como se muestra en la figura 5.16.

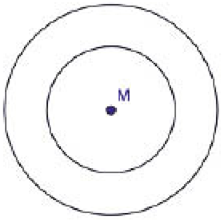


Figura 5.17.

Circunferencias concéntricas. Son aquellas que tienen el mismo centro y diferente magnitud de radio, como se muestra en la figura 5.17.

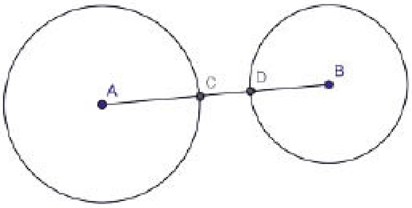


Figura 5.18.

Cuando dos o más circunferencias son exteriores, la suma de la longitud de sus radios es menor que la distancia entre sus centros $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})<\overrightarrow{AB}$
Esto es: la suma de los segmentos AC y DB es menor que el segmento AB, como se muestra en la figura 5.18.

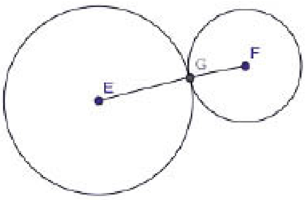


Figura 5.19.

Cuando dos o más circunferencias son tangentes exteriores la suma de las longitudes de sus radios es igual a la distancia entre sus centros.

Esto es: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}$. Significa que la suma de los segmentos EG y GF es igual al segmento EF, como se muestra en la figura 5.19.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones (1): A partir de las definiciones anteriores, realiza en tu libreta los trazos indicados. Presenta tu trabajo en la fecha que indique tu profesor.

Traza dos circunferencias, de 5 cm y 7 cm de radio respectivamente de tal forma que sean:

a) tangentes exteriores
b) secantes interiores
c) interiores
d) tangentes interiores
e) concéntricas
f) exteriores

Instrucciones (2): Tomando como base lo que hemos tratado en este bloque, realiza el siguiente ejercicio: relaciona la columna A con la columna B, con el fin de asociar cada concepto con su definición. Para ello anota dentro del paréntesis la letra que corresponda.

A

a) Radio

b) Centro

c) Recta tangente

d) Circunferencias concéntricas

e) Circunferencias interiores

f) Circunferencias tangentes Interiores

g) Secante

h) Diámetro

i) Cuerda

j) Flecha

k) Circunferencias tangentes exteriores

l) Arco

m) Punto interior

n) Punto exterior

B

( ) Es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

( ) Cuando la suma de las longitudes de sus radios es igual a la distancia entre sus centros.

( ) Los puntos cuya distancia al centro es mayor que el radio.

( ) Son aquellas en la que el área de una de ellas es parte del área de la otra.

( ) Es la línea recta que tiene dos puntos comunes con la circunferencia, sin pasar por el centro.

( ) Si la recta tiene un solo punto en común con la circunferencia.

( ) También llamada sagita de un arco circular, es la distancia desde el centro del arco al centro de la cuerda.

( ) Son aquellas circunferencias que tienen el mismo centro y diferente magnitud de radio.

( ) Es una porción de circunferencia.

( ) Es el segmento de la circunferencia determinado por dos puntos de ella.

( ) Punto al que equidistan todos los puntos de una circunferencia.

( ) Puntos que distan del centro menos que el radio.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si observas los rines de los autos o camiones, ¿qué líneas de la circunferencia puedes encontrar.

....

....

....

....

....

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Ángulos que se forman en una circunferencia

En este apartado abordaremos el tema de los ángulos relacionados o derivados de la circunferencia, y comprobaremos la importancia que tienen por sus diversas aplicaciones académicas, profesionales y científicas.

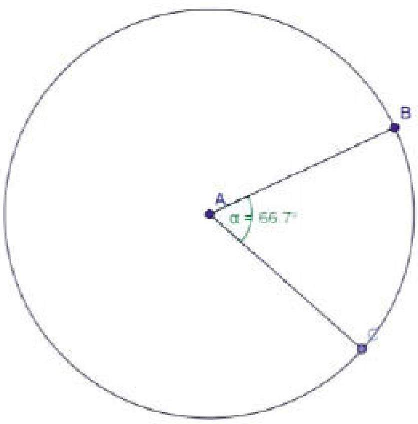
Imagínate que una nave espacial quiere regresar a la Tierra y lo hace verticalmente a la atmósfera, ¿te imaginas qué pasaría? También en alguna ocasión habrás visto una lluvia de estrellas o al menos oído que un "x" día va a haber lluvia de estrellas, ¿te has preguntado qué es?, ¿crees que llueven estrellas?

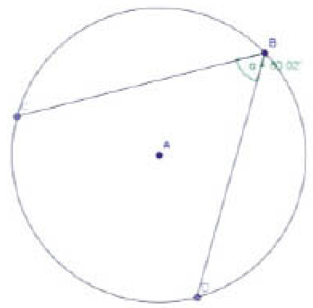
Atmósfera terrestre: capa más externa y menos densa de la tierra. Está formada por diferentes tipos de gases.

Desde luego que sería muy bueno que investigaras la respuesta a estas interrogantes para que tengas un conocimiento más amplio y consciente de la naturaleza de la circunferencia.

Si recuerdas, en el bloque I se analizó la naturaleza de los ángulos y cómo se clasifican, ahora los vamos a ver cuando se relacionan con la circunferencia.

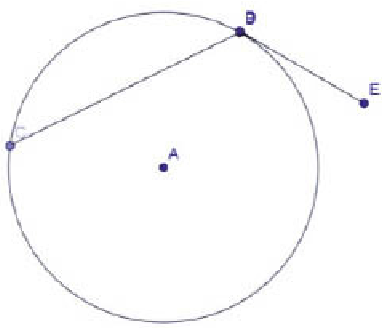
Un ángulo se puede trazar desde diferentes puntos en la circunferencia, los trazos más importantes son:

Ángulos en la circunferencia	Concepto
	**Ángulo central.** Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y determina un arco de la misma magnitud. Entonces, si un ángulo central mide 66.7°, genera un arco de 66.7º también, si es un ángulo de 120º, genera un arco de 120º.



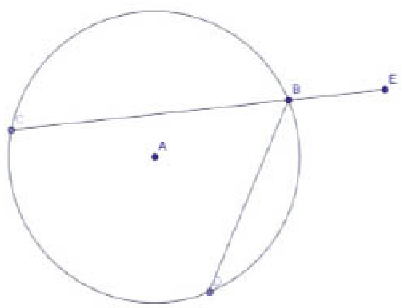
Ángulo inscrito. Un ángulo inscrito tiene su vértice sobre cualquier punto de la circunferencia. El arco que se genera es el doble de magnitud que el ángulo.

Un ángulo inscrito de 80º, genera un arco de 160º, un ángulo inscrito de 120º, genera un arco de 240º.



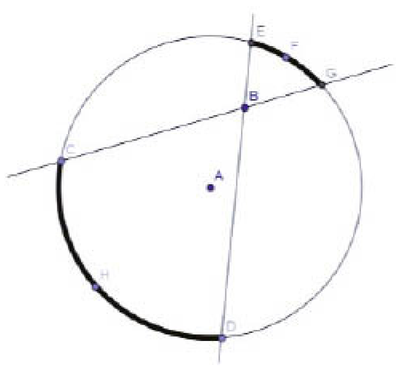
Ángulo semi-inscrito. Es aquel que tiene su vértice sobre un punto de la circunferencia, uno de sus lados es una secante y la otra una tangente, el arco que genera es el doble de la magnitud del ángulo mencionado.

Entonces si el ángulo semi-inscrito tiene una magnitud de 170º, el arco correspondiente mide 340º.



Ángulo ex inscrito. Es el ángulo adyacente de un ángulo inscrito.

Entonces, si el ángulo inscrito mide 75º, el ángulo ex inscrito mide 105º.

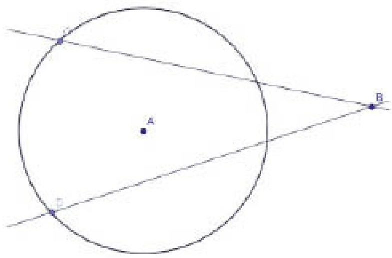


Ángulo interior. Es aquel que su centro es un punto interior y sus lados son secantes de la circunferencia; la magnitud del ángulo es igual a la semisuma de los arcos que determinan las secantes.
En la figura anterior qué quiere decir: que el ángulo CBD es la mitad de la suma de los arcos CHD Y EFG.

$$\angle CBD = \frac{\widehat{CHD} + \widehat{EFG}}{2}$$

Por ejemplo, si el ángulo interior mide 60º, entonces sus arcos miden 100º y 20º.

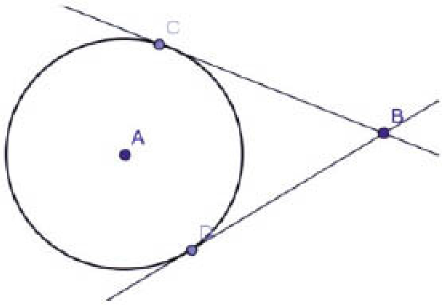
Dos rectas secantes



Ángulo exterior. Es un ángulo con vértice en un punto exterior a la circunferencia y sus lados son secantes, tangentes o secante y tangente a la circunferencia.

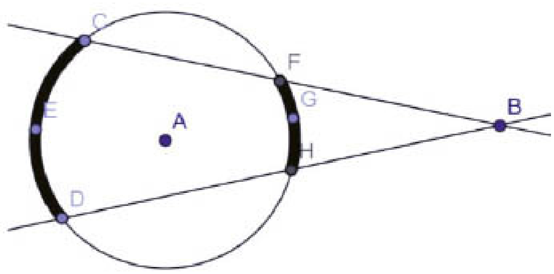
Teorema. El ángulo exterior a una circunferencia es igual a semisuma de las medidas de los arcos comprendidas por sus lados.

Dos rectas tangentes

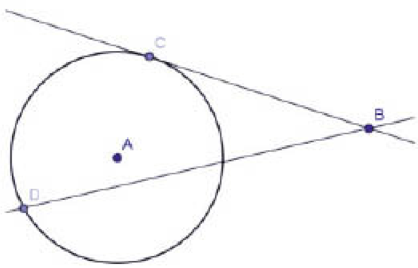


Esto es: $\angle CBD = \dfrac{\overset{\frown}{CED} + \overset{\frown}{FGH}}{2}$

Ejemplo:



Recta secante y tangente



Entonces, si los arcos que determinan un ángulo exterior son de 120º y 48º, el ángulo mide:

$$\frac{120^\circ + 48^\circ}{2} = \frac{168^\circ}{2} = 84^\circ$$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones (1): En tu libreta, con ayuda de tu compás y transportador, traza los 10 ángulos que se te piden y determina la magnitud de sus arcos. Finalmente preséntalas a tus compañeros de clase y escucha las opiniones de ellos para corregir, en caso necesario, algún ejercicio.

a) Un ángulo central de 200º
b) Un ángulo central de 80º
c) Un ángulo interior de 75º
d) Un ángulo central de 300º
e) Un ángulo interior de 150º
f) Un ángulo inscrito de 125º
g) Un ángulo inscrito de 49º
h) Un ángulo semi inscrito de 79º
i) Un ángulo semi inscrito de 129º
j) Un ángulo interior de 59º

Instrucciones (2): En tu libreta, con ayuda de tu compás y tu transportador, traza las figuras en una circunferencia: segmentos, rectas y ángulos que se te solicitan en los siguientes numerales. Al terminar, presenta tu trabajo a tus compañeros de clase y escucha las opiniones de ellos para corregir si fuera necesario.

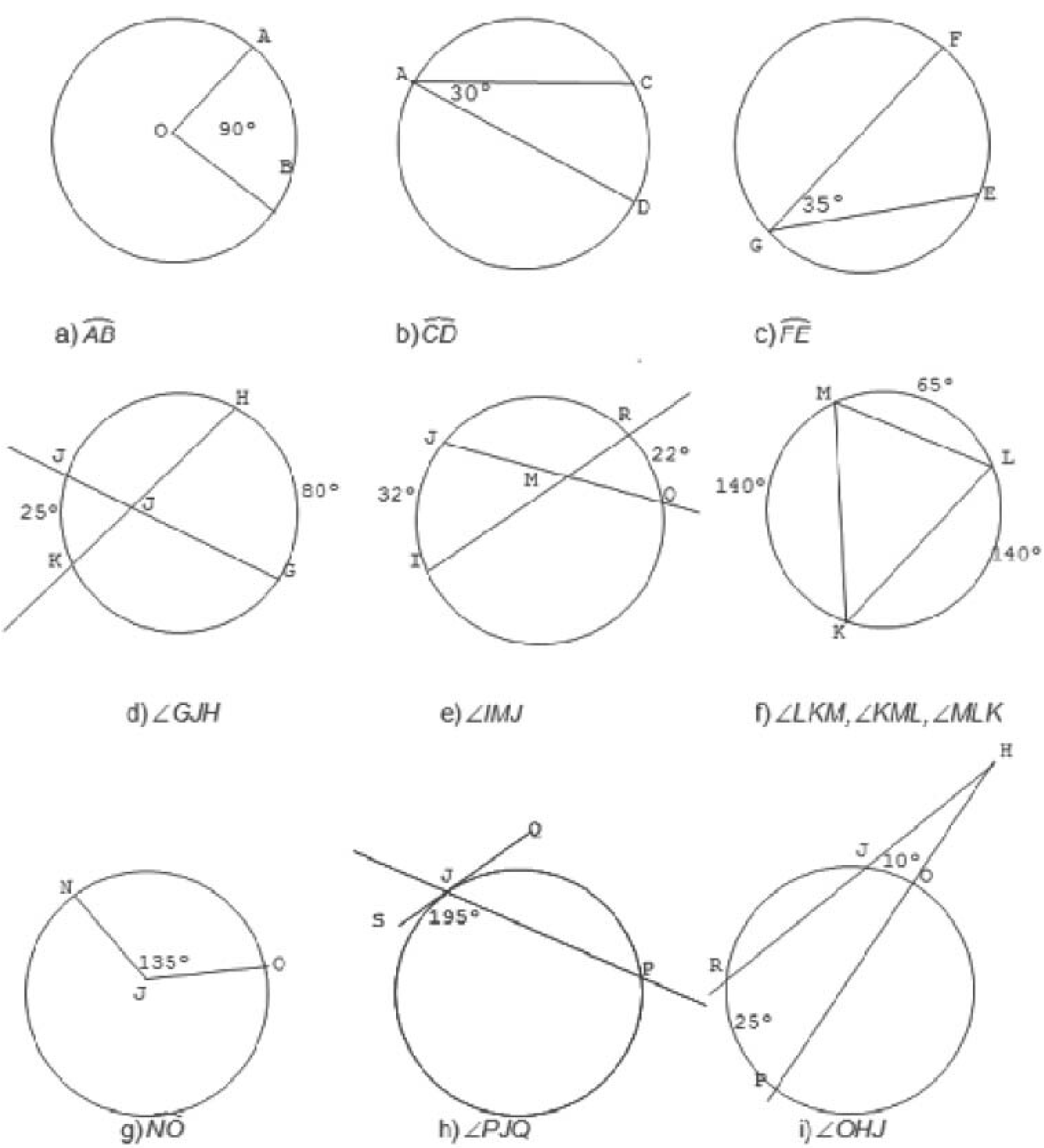
a) La mediatriz de una cuerda pasa por el centro.
b) La secante perpendicular al radio determina dos cuerdas iguales, que van del extremo del radio a los puntos de intersección de la secante con la circunferencia.
c) Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes, dichas tangentes son iguales.
d) Un triángulo cuyos lados son, respectivamente, un diámetro y dos cuerdas, es un triangulo rectángulo.
e) Si dos lados de un ángulo son tangentes a una circunferencia, la bisectriz de dicho ángulo pasa por el centro del círculo.
f) La mediatriz de una cuerda que une los extremos de dos radios es bisectriz del ángulo formado por los radios.
g) La tangente trazada sobre una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia.

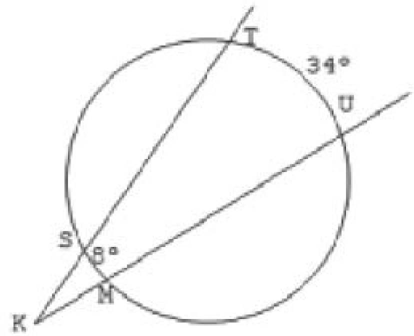
Instrucción (3): Con tu transportador y con los datos proporcionados en la figura 5.20 determina la medida del ángulo o arco en los siguientes 11 círculos.

Sabías que...

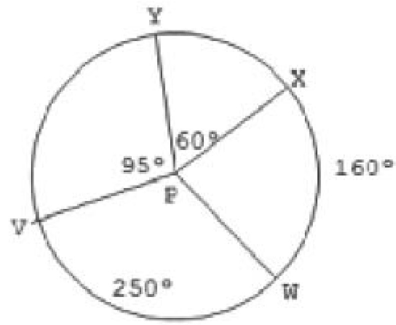
La relación entre ángulos y planos permite determinar intensidades de luz y obtener de esta manera excelentes tomas útiles para la óptica, la fotografía o el cine.

Figura 5.20.





j) $\angle MKS$



k) $\angle WPV, \angle WPX, \widehat{XY}, \widehat{YV}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿En un reloj podremos encontrar ángulos de una circunferencia y sus propiedades? Explica breve y claramente.

....

....

....

....

....

....

Aprende más

Perímetro y área de una circunferencia

La circunferencia ha jugado un papel importante en nuestras vidas, ya que la aplicación de sus propiedades las observamos en el diseño y construcción de llantas, además de rines para todo tipo de vehículos, en envases, recipientes, en discos de música, en lentes por mencionar algunos ejemplos.

Vamos a definir al perímetro de la circunferencia como el contorno del círculo que contiene un espacio, superficie o área y que posee una longitud, la cual se obtiene de multiplicar dos veces la medida de su radio o una vez la medida de su diámetro por un número irracional llamado "pi". Este número se simboliza con la letra griega π, la cual proviene de la inicial de las palabras de origen griego περιφέρεια 'periferia' y περίμετρον 'perímetro' de una circunferencia. Esta notación fue utilizada primero por William Oughtred (1574-1660), y propuesto su uso por el matemático galés William Jones (1675-1749), aunque fue el matemático Leonhard Euler, con su obra *Introducción al cálculo infinitesimal*, de 1748, quien la popularizó. Fue conocida anteriormente como constante de Ludolph (en honor al matemático Ludolph van Ceulen) o como constante de Arquímedes (que no se debe confundir con el número de Arquímedes).

Se trata de un número irracional, lo que significa que no puede expresarse como fracción de dos números enteros, como demostró Johann Heinrich Lambert en 1761 (o 1767). También es un número trascendente, es decir, que no es la raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros. En el siglo XIX el matemático alemán Ferdinand Lindemann demostró este hecho, cerrando con ello definitivamente la permanente y ardua investigación acerca del problema de la cuadratura del círculo indicando que no tiene solución.

También se sabe que π tampoco es un número, de Liouville (Mahler, 16 1953), es decir, no sólo es trascendental sino que no puede ser aproximado por una secuencia de números racionales.

A pesar de tratarse de un número irracional, se sigue averiguando la máxima cantidad posible de decimales. Los 50 primeros son:

$$\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028849716939937510$$

En ciencia e ingeniería esta constante puede emplearse, la mayoría de las veces, con una precisión de sólo una docena de decimales. Con 50 decimales se podría describir con precisión la curvatura del Universo con un error más pequeño que el tamaño de un **protón**.

Protón: partícula cargada positivamente que se encuentra dentro del núcleo atómico.

Como te has dado cuenta, π es un número que expresa la relación entre el diámetro de la circunferencia y la longitud de la misma. Dicho en términos más comprensibles: π es el número de veces que el diámetro se subtiende sobre la circunferencia.

Quiere decir que π multiplicado por la longitud del diámetro es igual a la longitud de la circunferencia (llamado perímetro).

Una circunferencia encierra un área llamada círculo, por lo que el contorno de esta área es la circunferencia o sea el perímetro; por lo tanto la magnitud del perímetro de un círculo se calcula con la fórmula: $P = \pi \cdot D$

Para esto será necesario considerar a $\pi = 3.1416$

Ahora, si conocemos el perímetro de una circunferencia, como se muestra en la figura 5.21, podremos calcular el diámetro o el radio de la manera siguiente:

Si $P = \pi \cdot D$, entonces: $D = \frac{P}{\pi}$, o también $r = \frac{P}{2\pi}$

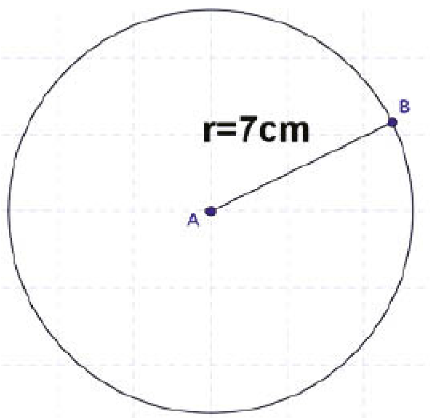


Figura 5.21.

Sabiendo que el área de un polígono se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{(perímetro)(apotema)}{2}$$

En el caso de la circunferencia, el radio es la recta perpendicular a la tangente; por lo tanto, resulta que el radio es la apotema de la misma; entonces, sustituyendo, tendremos:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{\pi \cdot 2r \cdot a}{2} = \frac{\pi \cdot 2\, r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

Concluimos que el área de una circunferencia se calcula multiplicando, 3.1416 por el cuadrado de la longitud del radio.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Aplicando las fórmulas de área y perímetro en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Calcular el área de una circunferencia que tiene un radio de 7 cm.

Solución:

$$A = \pi (7\ cm)^2 = (3.1416)\left(49\ cm^2\right) = 153.9384\ cm^2$$

Ejemplo 2: Calcular el diámetro de una circunferencia que tiene un área de 100 cm^2.

Solución:

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Despejando, tendremos: $D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$

Sustituyendo: $D = \sqrt{\frac{4\left(100\ cm^2\right)}{3.1416}}$

Realizando operaciones: $D = 11.28\ cm$

Ejemplo 3: Si queremos calcular el perímetro de un círculo que tiene 5 cm de diámetro como se muestra en la figura 5.22, tendremos:

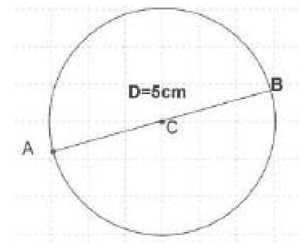


Figura 5.22.

Solución:

$$P = (5\ cm)\ (3.1416) = 15.708\ cm$$

Ejemplo 4: Si el radio de una circunferencia es de 10 cm, ¿cuánto mide de perímetro? y ¿cuánto mide de área? **Solución:**

$$P = \pi \cdot D = \pi \cdot 2r$$

Sustituyendo: $P = 3.1416 \times 2(10\ cm) = 62.832\ cm$

$$A = \pi r^2 = \pi(10\ cm)^2 = 314.16\ cm^2$$

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: En la libreta realiza los cálculos que se te indican en los problemas, aplicando los principios de área y perímetro de la circunferencia. Los procedimientos que realices deberán mantener un orden lógico. Este trabajo lo entregarás en la fecha que indique el profesor.

1. En la tabla se mencionan varios objetos circulares. Realiza las mediciones y las operaciones necesarias para obtener la información.

Objeto a medir	Diámetro	Perímetro	Perímetro/Diámetro
Moneda de $10			
Plato			
Neumático			
Disco compacto (CD)			
Vaso desechable			

2. Determina la longitud de la circunferencia que tiene 8 cm de diámetro.

3. Determina la longitud de la circunferencia que tiene 5 cm de radio.

4. Determina la longitud de la circunferencia que tiene 6 cm de diámetro.

5. Determina la longitud de la circunferencia que tiene 55 cm de radio.

6. Determina la longitud del radio de la circunferencia que tiene 56 cm^2 de área.

7. Determina la longitud del diámetro de la circunferencia que tiene 1524 m^2 de área.

8. Determina la longitud del radio de la circunferencia que tiene 580 cm^2 de área.

9. Determina la longitud de la circunferencia circunscrita a un hexágono de 60 cm^2 de área. Como se muestra en la figura 5.23.

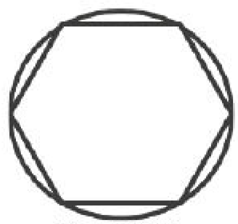


Figura 5.23.

10. Observa la figura 5.24 y determina el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia que tiene un área de 500 cm^2.

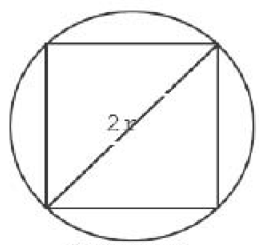


Figura 5.24.

11. ¿Qué diámetro debe tener la rueda de un molino de agua para llevar una cubeta hasta el fondo del pozo que tiene una profundidad de 45 m, si la soga que la sostiene debe enredarse sobre la rueda del molino?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Qué harías para calcular el perímetro y área de la circunferencia de un balón de futbol, basquetbol y volibol, si sólo cuentas con las agujetas de tus zapatos o una cuerda y una regla de treinta centímetros? Explica breve y claramente.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aplica lo aprendido

Actividad 5

Producto de aprendizaje: investigación sobre la circunferencia

Instrucciones: En grupos de tres compañeros, harás una presentación de otras diez aplicaciones de la circunferencia, explicando la utilidad que representan para tu entorno y la humanidad. Al concluir, presenta y explica tu trabajo a tus compañeros en la fecha que te indique tu profesor.

La actividad que realizarás para cerrar este bloque será en equipos de tres, mostrando un sentido de solidaridad, es decir, se deben apoyar unos y otros a fin de cumplir con su trabajo.

Investigarán ¿cuándo se creó la rueda y cuál ha sido su utilidad en nuestra época?¿Cómo se demuestra el valor de π?, además mencionarás cómo se aplica en tu entorno, dónde la utilizas, y lo más importante: ¿cuáles son las ventajas de usar círculos en vez de polígonos? Menciona cinco ventajas y cinco desventajas. Al concluir tu trabajo, presenta a tus compañeros los hallazgos obtenidos. La entrega de este producto de aprendizaje será en la fecha indicada por tu profesor y debe tener una portada o carátula con tus datos (nombre, asignatura, semestre y fecha de entrega), después se presenta la información obtenida, y en otra hoja su reflexión, en donde escribirán lo que lograron aprender sobre la utilidad y aplicación de la rueda. Además tengan cuidado de presentar sus ideas en forma ordenada y coherente, sin errores ortográficos. Al final de tu trabajo, escribe una reflexión personal, del aprendizaje adquirido al haber realizado tu investigación.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: investigación sobre la cirfunferencia

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Información	Fecha de la creación de la rueda.			
	Utilidad en el contexto real.			
	Demostración del valor de π.			
	Aplicación de π.			
	Mínimo 3 ventajas del uso de circunferencia.			
	Mínimo 3 desventajas del uso de la circunferencia.			

Presentación	Datos del estudiante, asignatura, semestre, fecha.			
	Creatividad en investigación de la rueda.			
	Entrega en tiempo y forma.			
Reflexión personal	De forma precisa y coherente. Señala las aplicaciones y utilidad de la rueda.			
Diseño de las piezas	Trazo de las figuras.			
	Medida de las figuras.			
Actitudes	Muestra un sentido de solidaridad en el trabajo.			
	Se socializaron los conocimientos entre los participantes del equipo de trabajo.			
Total de puntos		**13**		

Si en la lista de cotejo lograste los **13 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 12 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de Cotejo para evaluar el producto final portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título "Portafolio de evidencias", nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	Entrega la libreta o el cuaderno donde realizó los ejercicios.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden lógico y limpieza.			
	Presenta índice.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica 10 interrogantes con respuestas sin error.			
	7 ejercicios de la actividad 1 sin error.			
	Problema 1 y ejercicio de la actividad 2 sin error.			
	Reflexión sobre líneas de la circunferencia.			
	10 ejercicios de ángulos de la actividad 3 sin error.			
	Trazos de la circunferencia de la actividad 3.			
	Medida de los ángulos en los 11 círculos de la actividad 3.			

Documentos de evidencias	Trazos de la circunferencia de la actividad 3.			
	Medida de los ángulos en los 11 círculos de la actividad 3.			
	Reflexión sobre ángulos en la circunferencia.			
	Actividad 4. Resolución de los 11 planteamientos.			
	Reflexión sobre perímetro y área de la circunferencia.			
	Actividad 5. Producto de aprendizaje.			
Procedimientos	Mantienen secuencia lógica, trazos alineados y unidades pertinentes.			
	Resultados correctos marcados a tinta.			
Actitud	En el trabajo mostró orden, puntualidad y solidaridad.			
Total de puntos		**19**		

Si en la lista de cotejo lograste los **19 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **13 a 18 puntos** es **Bien**, de **6 a 12** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	**Excelente**	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque V

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue	Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.	
3. Elige y practica estilos de vida saludables.	Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
	Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
	Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico.	
	Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.	
	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

Continúa...

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque VI

Describes las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos

Introducción

A partir de este sexto bloque y hasta el octavo, nos ocuparemos del estudio de las relaciones entre los ángulos y lados de los triángulos. A esta rama de las Matemáticas y de la Geometría se le conoce con el nombre de **Trigonometría**.

El hecho de estudiar ahora Trigonometría no implica despedirnos de los elementos geométricos aprendidos en los bloques anteriores debido a que muchos de los elementos de ésta, se derivan de los principios y propiedades de las figuras planas, en particular del triángulo.

Para este bloque requerirás el uso de una calculadora que cuente con funciones propias de la Trigonometría, como son el seno, coseno y la tangente de un ángulo. También emplearemos algunas tablas con los valores de las funciones trigonométricas para ángulos determinados. La intención del presente bloque es identificar los sistemas de medidas de ángulos, así como la comprensión y aplicación de elementos trigonométricos en la solución de situaciones problemáticas.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	• *Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas*
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	• *Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.*
3. Elige y practica estilos de vida saludables.	• *Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.* • *Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.*

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.* • *Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.* • *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.	• *Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Construyes e interpretas modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos al aplicar las funciones trigonométricas en la resolución de problemas que se derivan de situaciones relacionadas con estas funciones.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Sistema sexagesimal y circular. • Funciones trigonométricas. • Razones trigonométricas directas y recíprocas de ángulos agudos. • Cálculo de valores de las funciones trigonométricas para 30°, 45° y 60° y sus múltiplos. • Resolución de triángulos rectángulos.	Comprensión de textos. Observación de objetos y gráficos. Resolución de problemas.

Procedimentales	Identifica diferentes sistemas de medida de ángulos. Describe las razones trigonométricas para ángulos agudos. Aplicación de razones trigonométricas.	Aplicación de los criterios de congruencia para establecer si dos o más triángulos son congruentes entre sí. Resolución de ejercicios para aplicar los criterios de congruencia Argumentación del uso de los criterios de congruencia.
Actitudinales	Orden y puntualidad en sus trabajos. Honestidad y sociabilidad con sus compañeros y maestros.	Estableciendo indicadores que permitan mantener el orden y la puntualidad. Expresando y mostrando acciones en clase que refieran la honestidad y sociabilidad.

¿Qué tiempo vas emplear?

Considera 11 horas para el desarrollo de este bloque. Lo más recomendable es que utilices 5 horas para revisar los contenidos temáticos y 6 horas para llevar a cabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Integrar un problemario
- Investigación sobre modelos y métodos matemáticos para las mediciones de alturas.

Tu **problemario matemático** lo elaborarás en una libreta o cuaderno como evidencia, donde muestres los problemas, procedimientos (el planteamiento de la actividad a tinta y proceso de solución a lápiz), resultados marcados con tinta y trazos geométricos, estos deben mostrarse con orden y limpieza. Además debe incluir una carátula con tus datos (nombre, asignatura, bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha) y un índice. Los productos serán evaluados con los instrumentos que se te presentan al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

El núcleo central del curso lo constituye el estudio de la geometría euclidiana que te ayuda a describir los objetos y sus partes de acuerdo con sus formas, dimensiones y propiedades. Contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando logras identificar propiedades y relaciones que puedes enunciar en proposiciones generales, elaborar y expresar argumentos que validen dichas proposiciones. Finalmente, establece relaciones lógicas entre ellas, aún sin llegar necesariamente a un rigor **axiomático** propio de estudios más especializados

Axiomático: controvertible, evidente, irrefutable, irrebatible, incuestionable, contundente a tal punto que no necesita demostración.

¿Qué opinas de las utilidades de la Geometría en la vida actual y dónde podemos encontrarla? Escribe tus comentarios en las líneas siguientes de manera breve y clara.

....

....

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones (I). Subraya la respuesta correcta. Si lo requieres realiza los cálculos en tu cuaderno.

1. Un ángulo es:

a) La unión de dos líneas.

b) La separación que hay entre dos puntos.

c) El vértice que se forma con dos líneas.

d) Parte del plano comprendida entre dos semirrectas.

2. Es la fórmula para calcular el área de una circunferencia:

a) $2\pi r$ b) πr^2 c) $\frac{\pi r^2}{2}$ d) $\frac{4}{3}\pi r^2$

3. En la proporción $\frac{3}{6}=\frac{4}{a}$ el valor de a es:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10

4. ¿Qué fracción decimal de una hora son 20 minutos?

a) 0.2 b) 0.3 c) 0.33 d) 0.4

5. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 2 unidades cada uno, ¿cuánto mide la hipotenusa?

a) 4 b) 8 c) $2\sqrt{2}$ d) 16

Instrucciones (II). En tu cuaderno dibuja una circunferencia utilizando un compás y con apoyo de un trasportador realiza lo siguiente:

1. Divídela en cuatro ángulos centrales de 90°.
2. Repitiendo el procedimiento anterior, elige una de las secciones y divídela en tres partes iguales; es decir, cada una de 30°.
3. La sección de 30° divídela en tres partes iguales cada una de 10°.
4. Esta última divídela en diez partes iguales. Compara con tu transportador las divisiones que acabas de realizar y obsérvalas.

Instrucciones (III). Contesta las siguientes preguntas con base en los resultados que obtuviste.

a) ¿Coinciden las marcas en tu gráfico con las correspondientes del transportador?
b) ¿Qué nombre le darías a cada una de las partes de la última división realizada?

Anota tus respuestas y compártelas con el grupo para llegar a un consenso al respecto de la actividad realizada.

Al concluir, verifica tus respuestas en el anexo. Si de la actividad anterior respondiste correctamente los ejercicios I y II, considera tu resultado como **Bien**; si respondiste a 4 planteamientos del ejercicio I y realizaste las tres primeras divisiones del ejercicio II, el resultado es **Regular**; y si tus respuestas correctas fueron menos de

2 planteamientos del ejercicio I y sólo realizaste las 2 primeras divisiones del ejercicio II, considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: teorema de Pitágoras, áreas de polígonos y ángulos.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Aprende más

Unidades de medición de ángulos

La trigonometría, cuyo término significa "medición de los triángulos", es la rama de las matemáticas que nos ayuda a comprender las relaciones que se presentan entre los ángulos y los lados de un triángulo. Sin embargo, y como verás a lo largo del bloque, ubicaremos al triángulo y algunas de las relaciones trigonométricas básicas en contextos diferentes, tales como en la medición de alturas, áreas y perímetros de casas, terrenos, canchas deportivas, en el diseño y construcción de muebles, ventanas, puertas, desagües, entre otros.

Analizaremos dos de los principales sistemas de medición de ángulos: la angular y la circular; es decir, aquellas que tienen que ver con **grados** y **radianes**. ¿Recuerdas cómo medimos los ángulos del primer bloque? ¿Qué características tiene la medición de ángulos? y ¿cuál es la unidad de medición de los ángulos que conoces? En realidad, hasta el momento contamos con el transportador como el instrumento que nos permite establecer la medida de un ángulo en grados. Analicemos a continuación las unidades de medida, así como la relación entre ellas.

Medida angular

Grado: unidad empleada para clasificar los ángulos en las figuras geométricas.

Sistema sexagesimal: sistema de numeración posicional que tiene como base aritmética el número 60.

Medición angular: clase de mediciones sobre un arco de circunferencia.

Para realizar cualquier medición debemos comparar el objeto a medir con un referente o patrón que sirve como medida. En el caso de los ángulos podemos optar por varias unidades de medición. En este caso particular emplearemos el **grado**. Éste es conocido como la **medida angular** o el **sistema de medición sexagesimal**, que se conoce con la siguiente simbología:

Un grado $(1^\circ) = \frac{}{360}$ de la circunferencia.

1° = 60’, se lee: un grado equivale a 60 minutos.
1’ = 60”, se lee: un minuto es igual a 60 segundos.

Para entender cómo se llega a convertir una medida de grados al sistema decimal, te presentamos unos ejemplos:

En un taller donde se elaboran piezas mecánicas para autos existen dos tipos de máquinas: la A y la B. La máquina A se emplea para realizar cortes a diferentes ángulos de piezas de acero, por lo que se requiere que la medida angular se realice en el sistema sexagesimal (° ’ ”), y la máquina B se emplea para realizar dobleces a diferentes ángulos de piezas de acero, por lo que se requiere que la medida angular se realice en grados en forma decimal.

Ejemplo 1: Se nos ha pedido realizar en la máquina A los siguientes cortes, por lo que será necesario expresar la medida angular en sistema sexagesimal:

a) Primera pieza, un corte a 30 grados. **Solución:**

El sistema sexagesimal nos permite escribir 30º de diferentes maneras: 30º0’0” o 30.0º; sin embargo, cuando se trata de medidas en grados exactos, se escribe 30º:
30°0’0” se coloca en la máquina A para el corte.

b) Segunda pieza, dos cortes: uno de 45°67’70” y el otro de 121°40’. **Solución:**

45° 67’ 70” = 45° 68’ 10” = 46° 8’ 10”, dado que en 70” hay 1’ 10” y en 68’ se tienen 1° 8’. Por lo tanto: 45° 68’ 10” o 46° 8’ 10” cualquiera de los dos valores se colocan en la máquina A para el corte.

121° 40’ = 120° 100’ = 120° 40’ 60”, podemos emplear las equivalencias en ambos sentidos. Por lo tanto: 120° 40’ 60” se coloca en la máquina A para el corte.

c) Tercera pieza, dos cortes: el primero de $\frac{1}{2}(50^\circ\ 48')$ y el segundo $\frac{1}{2}(32^\circ\ 21')$.

Solución:

$$\frac{1}{2}(50^\circ\ 48') = 25^\circ 24' = 25^\circ 23' 60''$$

25°23'60" se coloca en la máquina A para el corte.

$$\frac{1}{2}(32^\circ\ 21') = 16^\circ\ 10.5' = 16^\circ 10'\ 30''$$

16°10'30" se coloca en la máquina A para el corte.

Ejemplo 2: Se nos ha pedido realizar en la máquina B los siguientes dobleces, por lo que será necesario expresar la medida angular en grados en forma decimal:

a) La primera pieza se doblará en el extremo izquierdo a razón de 55º30'.

Solución:

Para escribir en forma decimal 55º30´debemos considerar primero que 30´equivale a 0.5º.

Esta equivalencia es resultado de la proporción $\frac{30'}{x} = \frac{60'}{1^\circ}$ *y tenemos* $x = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = 0.5$.

Por lo tanto, 55.5º se coloca en la máquina B para el doblez.

b) La segunda pieza se doblará por la mitad a razón de 12º20'30".

Solución:

El problema pide buscar la forma decimal de 20´30´´. Para ello resolvemos las siguientes proporciones.

$$\frac{60''}{1'} = \frac{30''}{x}; \quad 60''\cdot x = 30''\cdot 1'; \quad x = \frac{30''\cdot 1'}{60''}; x = 0.5'$$

$$\frac{60'}{1^\circ} = \frac{20.5'}{x}; \quad 60'\cdot x = 20.5'\cdot 1^\circ; \quad x = \frac{20.5'\cdot 1^\circ}{60'}; x = 0.3416^\circ$$

Por lo tanto, 12º20´30´´ =12.3416º se coloca en la máquina B para el doblez.

Medida circular

Un **radián (rad)** se define como la medida del ángulo central de un círculo, al cual le corresponde un arco cuya longitud es igual al radio del círculo.

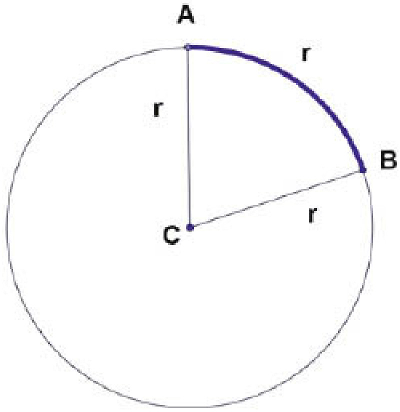


Figura 6.1.

Radián: unidad de medida del ángulo plano.

En la figura 6.1, el $\measuredangle ACB$ es un radián, debido a que sus lados AC y BC determinan un arco $\widehat{AB}$ que mide lo mismo que el radio de la circunferencia, es decir, $\widehat{AB} = r$.

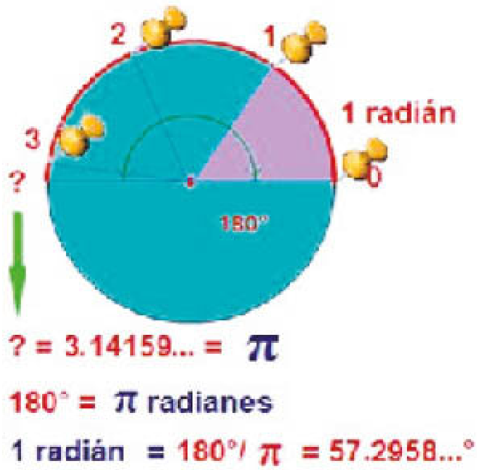


Figura 6.2.

En la figura 6.2, se muestran las equivalencias de los ángulos en la unidad de **radián**, que es la unidad matemática para la medición angular.

El ángulo en color lila tiene una medida de **un radián**. Sabemos que el diámetro de la circunferencia se puede colocar sobre el perímetro de ella de modo que se

Pi (π): razón del perímetro de una circunferencia al diámetro de la misma; es decir, representa las veces que el diámetro de la circunferencia cabe en su contorno o perímetro.

Revolución (rev): giro completo alrededor de la circunferencia.

cumple que $\frac{Perímetro}{diámetro} = \pi$; es decir, el diámetro de la circunferencia cabe en su perímetro π veces. Esto significa que si colocamos diámetros sobre el perímetro de la circunferencia podremos colocar 3 diámetros completos y faltará una curva de longitud = *0.14159265...*, como se muestra en la figura 6.2; que define el valor de la constante π. Dado que el diámetro mide lo que dos radios, entonces en el perímetro de la circunferencia caben 2π radianes.

De este modo podemos establecer una relación de equivalencia de las medidas angulares entre grados y radianes:

$$1\ rev = 360° = 2\pi\ rad;\ \frac{1}{2}\ rev = \frac{360°}{2} = \pi\ rad;\ \frac{1}{2}\ rev = 180° = \pi\ rad$$

A partir de lo anterior tenemos el siguiente razonamiento:

1. La longitud de la circunferencia o perímetro del círculo está dado por $2\pi r$, al que le corresponde un arco de 360° (recuerda que por definición un ángulo central es aquel que tiene como vértice el centro del círculo y sus lados son radios del mismo).
2. 2π radianes = 360°, por la definición de radián.
3. Así, $1\ radián = \frac{180°}{\pi} = 57°17'45''$.
4. Además $\pi radianes = 180°$, equivalencia que emplearemos de modo cotidiano en el estudio de la Trigonometría.

Veamos algunos ejemplos del uso de estas equivalencias.

Ejemplo 1: Hoy le enseñarón a Pedro en Geometría, que para calcular la longitud del arco (*s*) de una circunferencia se realiza el producto entre el ángulo expresado en radianes por el radio de la circunferencia. Fórmula: $s = \theta\ (r)$.

Pedro investigó en su libro de Física que el radio medio de la Tierra es de 6,371 km.

a) Determinar la longitud del arco de la Tierra para 45º.

Solución:

Convirtiendo de grados a radianes:

$$\frac{180°}{\pi}=\frac{45°}{x};180°\cdot x=45°\cdot\pi;\ x=\frac{45°\cdot\pi}{180°}=\frac{\pi}{4}\,rad$$

Luego:

$$s=\theta r=\left(\frac{\pi}{4}\right)(6,371\ km)$$

$$s=5,003.77\ km$$

Sabías que...

Cuando la medida de un ángulo está expresada en radianes no es necesario escribir la unidad 'rad'. El radián es la unidad por defecto de la medida angular en Matemáticas.

b) Determinar la longitud del arco de la Tierra para 30°.

Solución:

Convirtiendo de grados a radianes:

$$30°=30\cancel{°}\cdot\frac{\pi\ rad}{180\cancel{°}}=\frac{30\pi}{180}\ rad=\frac{\pi}{6}\ rad$$

Luego:

$$s=\theta r=\left(\frac{\pi}{6}\right)(6,371\ km)$$

$$s=3,335.85\ km$$

c) Determinar la longitud del arco de la tierra para 90°. **Solución:**

Convirtiendo de grados a radianes:

$$90°=90\cancel{°}\cdot\frac{\pi}{180\cancel{°}}=\frac{90\pi}{180}=\frac{\cancel{9}\,(\cancel{10})\pi}{\cancel{9}\,(2)\,(\cancel{10})}=\frac{\pi}{2}$$

Luego:

$$s=\theta r=\left(\frac{\pi}{2}\right)(6,371\ km)$$

$$s=10,007.54\ km$$

d) Determinar la longitud del arco de la tierra para 135°. **Solución:**

Convirtiendo de grados a radianes: en la misma forma por la equivalencia, tenemos que: rad =180°, 135° equivale a x número de radianes: $x = \frac{135°}{180°}\pi \text{ rad}$, *de donde* $x = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$. *Por lo tanto,*

$$s = \theta r = \left(\frac{3\pi}{4}\right)(6,371 \text{ km})$$
$$s = 15,011.31 \text{ km}$$

e) Determinar la longitud del arco de la tierra para 35º14´. **Solución:**

Para convertir de grados y minutos a radianes es necesario expresar 35º14´ en grados

$$\frac{60'}{1°} = \frac{14'}{x}; \quad x = \frac{14' \cdot 1°}{60'} = 0.23°$$

Es decir, 35º14´ = 35.23º. Empleando una vez más una proporción para convertir a radianes, se tiene

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{35.23°}{x}; \quad x = \frac{(35.23°)(\pi)}{180°} = 0.6149$$

Entonces 35º14´= 0.6149 radianes.

Luego:

$$s = \theta r = (0.6149)(6,371 \text{ km})$$
$$s = 3,917.53 \text{ km}$$

f) Calcular el ángulo en grados, para la longitud del arco de la tierra de s = 30,022.63 km. **Solución:**

De la fórmula s = θr despejamos θ = s / r
Sustituyendo valores: θ = 30,022.63 / 6,371 = 4.7124 rad
Por la equivalencia anterior π *radianes* $=$ *180°, de donde:*

$$\frac{4.7124}{\pi}(180°) = 270°$$

$$\theta = 270°$$

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Realiza en tu libreta las operaciones necesarias para resolver lo que se solicita en los ejercicios de 1 al 3. Finalmente, en una plenaria, presenta las respuestas a tu grupo.

1. Sean A = 30°, B = 54° 50'' y C = 76° 20' 30'', calcula:

a) 2A + B b) 3C – B c) 5A + 2B + C d) A-C+B

2. Representa en grados los siguientes ángulos:

a) $\frac{\pi}{2}$rad b) $\frac{3\pi}{2}$ *rad* c) $\frac{5\pi}{4}$rad

3. Expresa los siguientes ángulos en radianes:

a) 45º12´ b) 65º19´35´´ c) 345º59´60´´

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Cómo crees que se utilizaría la medida angular en las revoluciones de un motor de auto o de una licuadora? Explica breve y claramente.

....

....

Aprende más

Funciones trigonométricas

Es momento de revisar los elementos que nos permitan relacionar los ángulos y los lados de un triángulo. En Geometría establecimos algunas de las relaciones básicas, sin embargo, no hacían referencia a la obtención de la medida de los ángulos de un triángulo, a partir de las medidas de los lados (salvo en algunos casos muy particulares como el triángulo equilátero).

Recordarás que la única herramienta que permitía obtener la medida de algún lado en la sección de Geometría es el teorema de Pitágoras, que trabaja a partir de dos lados y no relaciona los ángulos del triángulo.

Las aplicaciones de las herramientas que vamos a desarrollar en la presente sesión son diversas. Lo mismo podemos calcular distancias, longitudes o medidas que ubicaciones, orientaciones o simplemente ángulos de un triángulo.

A lo largo de la historia se han desarrollado diversas teorías sobre la aplicación de las funciones trigonométricas y de cómo hacer para abordarlas con los estudiantes, de tal forma que el aprendizaje de las mismas resulte significativo.

Por ejemplo: cuando observas el ecualizador de tu estéreo al escuchar tu música favorita, cuando observas las olas del mar. Imagina que tienes hermanos pequeños y les quieres construir una resbaladilla, ¿cómo calcularías la altura y su longitud?, ¿qué separación tendría entre las escaleras y los soportes que la sujetan?

A continuación abordaremos las relaciones entre estos elementos.

Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Recuerda que un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos que son complementarios. Los lados perpendiculares se llaman catetos y el mayor de los lados se denomina hipotenusa. Lo puedes ver en la figura 6.3.

Tomando como referente el triángulo rectángulo ΔABC de la figura 6.3, se pueden establecer seis razones entre sus lados, siendo éstas:

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

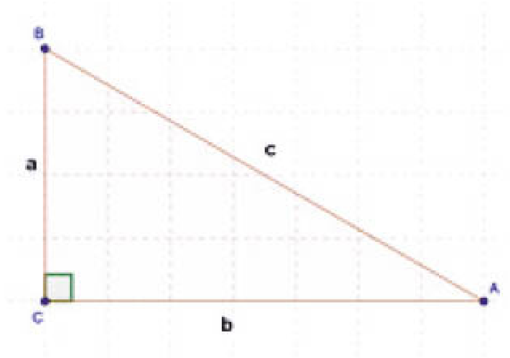


Figura 6.3.

Las razones establecidas dependen del valor del ángulo $\measuredangle A$ y no de las medidas de los lados del triángulo.

Las razones surgen de la relación entre dos lados de un triángulo rectángulo y un ángulo interior en una razón matemática. Para entender el comportamiento de estas funciones es necesario recordar algunos conceptos importantes:

1. Un triángulo rectángulo tiene dos lados perpendiculares entre sí: *a* y *b*, que forman un ángulo recto (cuya medida es de 90°). Estos lados se denominan ***catetos*** del triángulo.

2. El tercer lado: *c*, opuesto al ángulo recto, se denomina hipotenusa del triángulo y su medida es mayor que la de los catetos: $c > a, \quad c > b$.

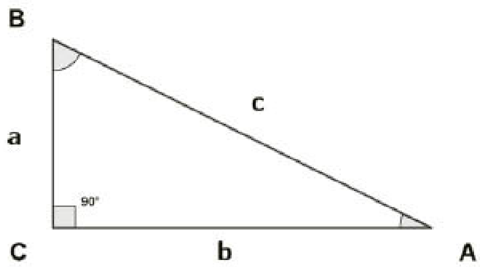
3. Los triángulos rectángulos tienen un ángulo interior de 90° y dos ángulos agudos complementarios (suman 90°): $\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$.

4. Para cualquiera de los ángulos agudos, un cateto es opuesto y el otro cateto es adyacente:
   Para $\measuredangle A$: el cateto a es opuesto y el cateto b es adyacente.
   Para $\measuredangle B$: el cateto b es opuesto y el cateto a es adyacente.

5. Los lados se relacionan mediante el teorema de Pitágoras, que enuncia que "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa":

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Esto lo puedes ver en la figura 6.4 (página siguiente).



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Figura 6.4.

Ahora, si tomamos el triángulo de la imagen y como base al ángulo α, como se muestra en la figura 6.5, tenemos las siguientes razones de dos lados:

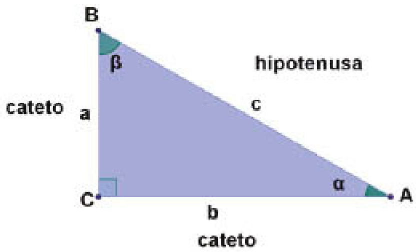


Figura 6.5.

Funciones naturales directas del ángulo α

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad cos\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente de } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$tan\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{cateto adyacente de } \alpha}$$

Funciones naturales inversas o recíprocas del ángulo α

$$csc\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } \alpha} \qquad sec\ \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } \alpha}$$

$$cot\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente de } \alpha}{\text{cateto opuesto de } \alpha}$$

Es así como las relaciones anteriores se llaman **razones trigonométricas recíprocas**, las cuales nos permitirán hacer el cálculo de las tres primeras funciones trigonométricas del seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan) denominadas **directas** y a partir de ellas determinar el valor de las otras tres. **Para el ángulo β también se pueden definir las mismas seis funciones trigonométricas.**

Al definir las razones trigonométricas, podemos observar que algunas guardan una relación con otras, siendo éstas: *senA con cscA* ; *cosA con secA* ; *tanA con cotA*.

La relación a la que hacemos referencia es la siguiente:

$$senA \cdot cscA = 1,\ cosA \cdot secA = 1,\ tanA \cdot cotA = 1$$

Lo anterior se debe a que las razones son inversos multiplicativos entre ellas, también llamados recíprocos.

Ejemplo 1: Un empleado de la Comisión Federal de Electricidad, coloca una escalera sobre la base de un poste de luz. En la imagen puedes observar el triángulo que se forma.

Si la longitud de la escalera es de 5 m, y la $\sec A = 2$, calcula las demás razones trigonométricas y la altura del punto B donde está apoyada la escalera sobre el poste.

Solución:

Si $\sec A = 2$, la razón recíproca es $\cos A = \frac{1}{2}$.

Además, podemos establecer que el triángulo rectángulo correspondiente $hip = 2$, y el cateto correspondiente es 1.

Aplicando el teorema de Pitágoras $2^2 = x^2 + 1^2$, $x^2 = 4 - 1 = \sqrt{3}$,

luego calculando las funciones restantes tenemos: senA $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$,

su recíproca es $\csc A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{1}$, y $\cot A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Continúa...

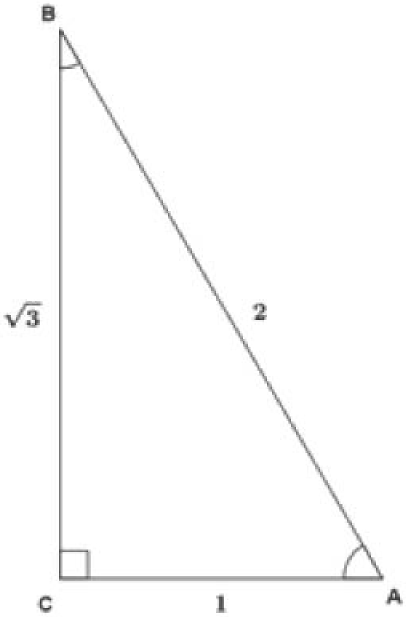


Figura 6.6.

Si despejamos de la función seno el cateto opuesto al ángulo, podemos calcular la altura:

$$sen\ A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Altura = longitud\ de\ la\ escalera\ x\ \ sen\ A$$

$$Altura = (5m)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4.33m$$

A partir de lo anterior, es importante notar que para el ángulo B, complementario al ángulo A que se tiene en la figura 6.7:

Cateto opuesto al ángulo A
es igual
Cateto adyacente del ángulo B

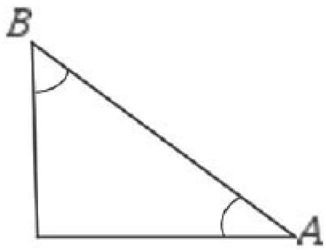


Figura 6.7.

Cateto adyacente al ángulo A
es igual
Cateto opuesto al ángulo B

De lo anterior se desprende que, siendo A y B complementarios:

$$sen\ A = cos\ B; \quad tan\ A = cot\ B; \quad sec\ A = csc\ B$$

A estas relaciones se les conoce como co-funciones de ángulos complementarios.

Las funciones trigonométricas que se aplican a los ángulos de un triángulo y sus cofunciones dan como resultado un número real.

Por ejemplo: ángulo 45º $\rightarrow$ función seno $\rightarrow$ número real $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejemplo 2: Determinar los elementos faltantes en el triángulo rectángulo de la figura 6.8.

Datos del $\triangle ABC$

$a = 5cm$

$\measuredangle A = 34^o$

$\measuredangle C = 90^o$

$\measuredangle B = ?$

$b = ?$

$c = ?$

Funciones trigonométricas del $\measuredangle A$ *=?*

Funciones trigonométricas del $\measuredangle B$ *=?*

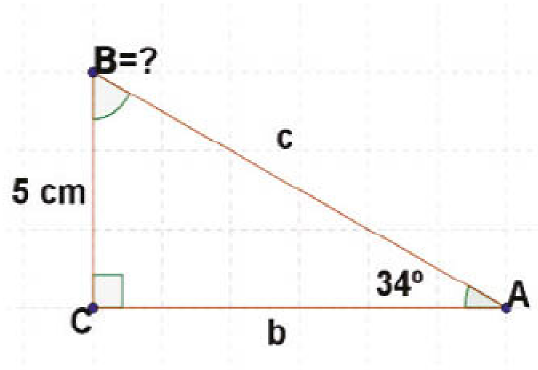


Figura 6.8.

Solución:

a) La suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es 180º, por lo que $\measuredangle A + \measuredangle B = 90^o$ *, por lo que es posible calcular el valor de* $\measuredangle B$ *con los datos que se conocen.*

$$\measuredangle B = 90^o - \measuredangle A$$
$$\measuredangle B = 90^o - 34^o$$
$$\measuredangle B = 56^o$$

b) Para calcular b, se puede utilizar la función tangente, debido a que se conoce el cateto opuesto del ángulo de 34º.

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\tan 34^o = \frac{5}{b}; \quad b \cdot \tan 34^o = 5; \quad b = \frac{5}{\tan 34^o} = \frac{5}{0.674} = 7.41 cm$$

c) Para calcular c, se puede utilizar la función seno, coseno y teorema de Pitágoras, debido a que ya se conoce el cateto opuesto y cateto adyacente del ángulo de 34º.

$$senA = \frac{a}{c}$$

$$sen34° = \frac{5}{c} \Rightarrow c \cdot sen34° = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{sen34°} = \frac{5}{0.559} = 8.94\ cm$$

Por el teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(5)^2 + (7.41)^2} = \sqrt{25 + 54.92} = \sqrt{79.91} = 8.94\ cm$$

d) Funciones trigonométricas del $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1.

Funciones trigonométricas $\measuredangle A$	Funciones trigonométricas $\measuredangle B$ o confunciones de $\measuredangle A$
$sen34° = \frac{5}{8.94}$	$sen56° = \frac{7.41}{8.94}$
$\cos 34° = \frac{7.41}{8.94}$	$\cos 56° = \frac{5}{8.94}$
$\tan 34° = \frac{5}{7.41}$	$\tan 56° = \frac{7.41}{5}$
$\cot 34° = \frac{7.41}{5}$	$\cot 56° = \frac{5}{7.41}$
$\sec 34° = \frac{8.94}{7.41}$	$\sec 56° = \frac{8.94}{5}$
$\csc 34° = \frac{8.94}{5}$	$\csc 56° = \frac{8.94}{7.41}$

Funciones trigonométricas de 30° y 60°

Considerando el triángulo equilatero de la figura 6.9, que dividimos a través de su altura en dos triángulos rectángulos ADC y DBC, tenemos el triángulo rectángulo ADC, y aplicando el teorema de Pitágoras podemos hallar su hipotenusa de la siguiente manera:

$$(2)^2=(1)^2+h^2 \rightarrow 4=1+h^2 \rightarrow 1+h^2=4 \rightarrow h^2=4-1=3 \rightarrow \boxed{h=\sqrt{3}}$$

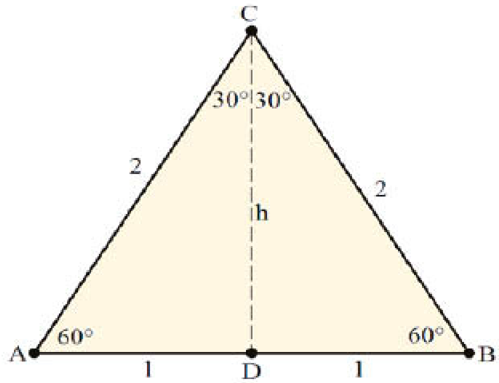


Figura 6.9.

A partir de este resultado y, utilizando el triángulo ADC, tenemos las siguientes funciones trigonométricas:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad csc\ 30° = \frac{2}{1}$$

$$sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad cot\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

$$tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad sec\ 60° = \frac{2}{1} \qquad cot\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Funciones trigonométricas de 45°

Si observamos el cuadrado de la figura 6.10, encontramos que está dividido por una de sus diagonales, formando los triángulos ADC y ABC.

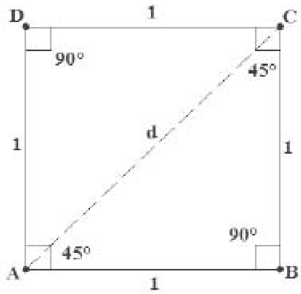


Figura 6.10.

Para el triángulo ABC, que es triángulo rectángulo, se cumple el teorema de Pitágoras, de modo que: $d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{d = \sqrt{2}}$

Con este resultado y usando el triángulo ABC, tenemos:

Ángulo / función	*sen 45°*	*sen 45°*	*tan 45°*	*csc 45°*	*sec 45°*	*cot 45°*
Valor correspondiente	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\frac{1}{1} = 1$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta. Registra el procedimiento con un orden lógico y reflexiona tus respuestas, después coméntalas con tus compañeros de clase.

1. Para iniciar, analicemos las relaciones que surgen entre los lados del siguiente triángulo, como se muestra en la figura 6.11. Como puedes ver se trata de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados miden cinco unidades.

a) ¿Qué ocurre con la razón entre los dos catetos?
b) ¿Cuál es el valor de la hipotenusa del triángulo?
c) ¿Cuál es el valor de la razón entre un cateto y la hipotenusa?

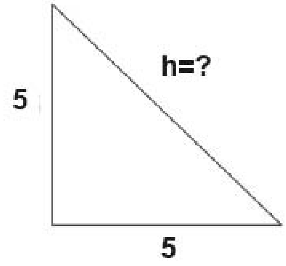


Figura 6.11.

2. Halla el elemento que se indica en cada caso con la ayuda de la calculadora.

   a) $cos\ 43°$

   b) $2sen70° + 3\cos 20° - \frac{3}{csc\,70°}$

   c) $tan\ 32°20''$

   d) $\frac{4\tan 35° - 3\cot 55°}{\cot 55°}$

   e) $cot\ 32°$

3. Determina el valor de las siguientes expresiones, sin la ayuda de tablas o calculadora, utilizando los valores de las funciones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

   a) $\frac{sen45° + \cos 45°}{sen^2 60}$ b) $\frac{sen30° + \cos 30°}{\cos 30°}$ c) $\frac{\tan 30° - \tan 60°}{1 + \tan 30° \cdot \tan 60°}$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

Para lograr una mejor comprensión de los ángulos múltiplos de 30º, 45º y 60º, se debe analizar el comportamiento de cada ángulo en cada uno de los cuadrantes de un plano cartesiano, este análisis se puede realizar con todas las funciones trigonométricas. Debes tener cuidado de que el triángulo sea rectángulo, y en el caso de situaciones reales, leer cuidadosamente y hacer una representación gráfica de la misma. Incluye en la gráfica los datos que resultan importantes para la solución. Observa la figura 6.12.

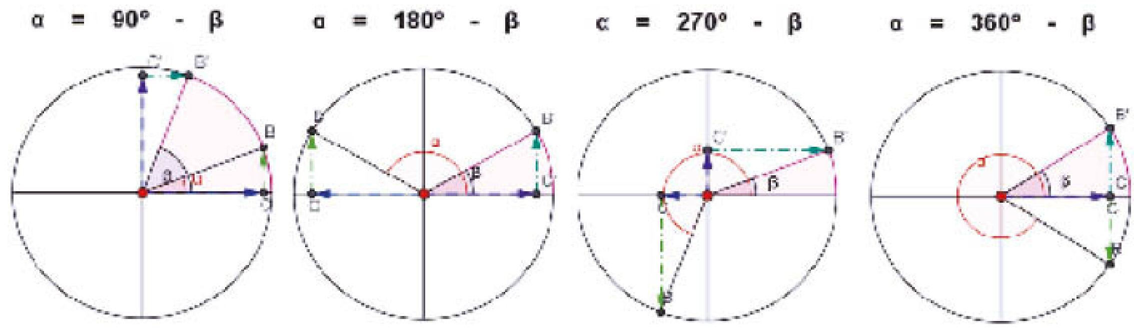


Figura 6.12.

Para determinar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos múltiplos de 30º, 45º y 60º, se utilizan los valores de los ángulos de referencia para cada uno de los cuadrantes.

Los valores de un múltiplo para el segundo cuadrante, siendo equivalentes a los valores del primer cuadrante obtenidos con la expresión $\alpha_r = 180° - \beta$, donde α_r se denomina **ángulo de referencia**. La expresión para el ángulo de referencia anterior es válida para el cuadrante II, exclusivamente. Para el cuadrante III el ángulo de referencia se calcula con $\alpha_r = 270° - \beta = 180° + \beta$, en el cuarto cuadrante es ángulo de referencia es $\alpha_r = 360° - \beta$

Ejemplo: Con apoyo de un triángulo equilátero calculamos las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°. Posteriormente, con un triángulos rectángulo isósceles calcularemos las funciones para un ángulo de 45°, como se muestran en la figura 6.13.

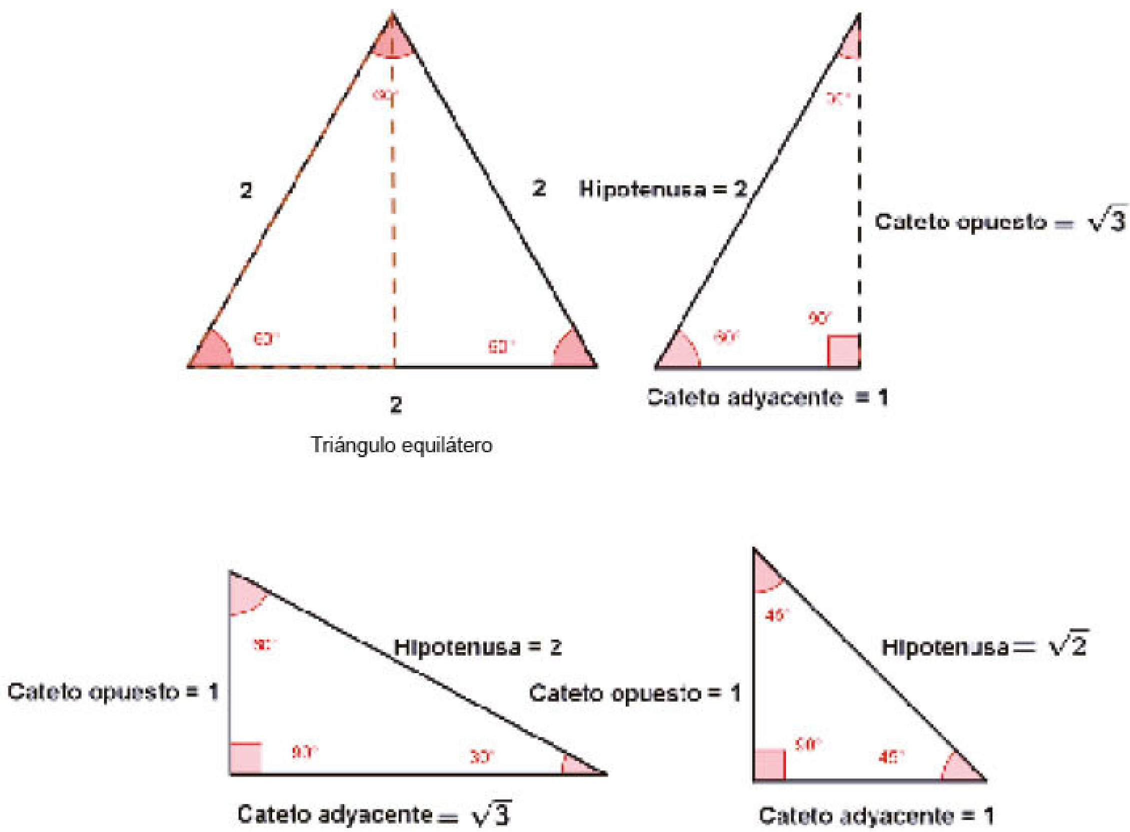


Figura 6.13.

Para el ángulo de 60°

$$sen\,60° = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

$$sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para el ángulo de 30°

$$sen\,30° = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

$$sen\,30° = \frac{1}{2}$$

Para el ángulo de 45°

$$sen\,45° = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

$$sen\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Racionalizando el denominador:

$$sen\ \ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Realiza en tu libreta los procedimientos necesarios para obtener lo que se te solicita en las siguientes tablas de ángulos de referencia para los cuadrantes I, II, III y IV.

El propósito de la actividad es que te familiarices con las funciones trigonométricas para cada ángulo múltiplo de 30º, 45º, 60º y 90°, tomando como base la solución de los valores de la función seno para cada cuadrante en cada una de las tablas. Determina los valores de las otras funciones.

1. Determina el valor de las funciones restantes para el cuadrante I:

Ángulo / función	0°	30°	45°	60°	90°
$sen\ \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\ \theta$					
$tan\ \theta$					
$cot\ \theta$					
$sec\ \theta$					
$csc\ \theta$					

2. Determina el valor de las funciones restantes para el cuadrante II:

θ	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$180° - \theta$	$60°$	$45°$	$30°$	$0°$
$sen\ \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				
$\cot\theta$				
$\sec\theta$				
$\csc\theta$				

3. Determina el valor de las funciones restantes para el cuadrante III, con base en las condiciones siguientes:

$$-1 < y < 0 \qquad 180° < \theta < 270° \qquad \theta_r = \theta - 180° \qquad -1 < sen\ \theta < 0$$

θ	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$
$\theta - 180°$ o $180° + \theta$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$sen\ \theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				
$\cot\theta$				
$\sec\theta$				
$\csc\theta$				

4. Determina el valor de las funciones restantes para el cuadrante IV, con base en las condiciones siguientes:

$-1 < y < 0$ $\quad 270° < \theta < 360°$ $\quad \theta_r = 360° - \theta$ $\quad -1 < \text{Sen}\ \theta < 0$

θ	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$360° - \theta$	$60°$	$45°$	$30°$	$0°$
$\text{sen}\ \theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				
$\cot\theta$				
$\sec\theta$				
$\csc\theta$				

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Cómo crees que las funciones trigonométricas puede utilizarse en la elaboración del mapa de un lugar del que se conocen algunas distancias y algunos ángulos? Explica breve y claramente. ....

....

....

Aprende más

Resolución de triángulos rectángulos y aplicaciones

Para la última parte del presente bloque aplicarás las funciones trigonométricas en la solución de problemas en los que se involucran triángulos rectángulos. Algunas de ellas son de carácter teórico, mientras que otras son de aplicación a entornos o contextos reales.

Vas a requerir de los elementos descritos en los temas anteriores, debido a que el propósito del bloque es que uses las funciones trigonométricas de ángulos agudos,en la solución de problemas.

En la primera parte resolveremos triángulos rectángulos, que no es otra cosa que determinar las medidas de sus lados y ángulos. Para ello podemos emplear herramientas como el teorema de Pitágoras, las propiedades expuestas en geometría para las diversas figuras y las propiedades de funciones trigonométricas, directas, recíprocas y sus **co-funciones**.

Las siguientes consideraciones a seguir, serán la guía para resolver triángulos rectángulos.

1. Los elementos que a continuación se describen se emplean al resolver triángulos rectángulos.

    a) Debes tener cuidado de que el triángulo sea rectángulo, de otro modo no puedes aplicar el teorema de Pitágoras.

    b) En el caso de situaciones reales, leer cuidadosamente y hacer una representación gráfica de la misma. Incluye en la gráfica los datos que resultan importantes para la solución.

    c) Toma en cuenta los teoremas geométricos aplicables a ángulos, triángulos y demás figuras geométricas.

    d) Recuerda que las funciones trigonométricas trabajan con ángulos y representan un valor real.

2. Como las funciones trigonométricas a emplear contienen tres elementos del triángulo rectángulo, serán necesarios dos datos (además del ángulo recto) para trabajar con ellas.

3. El valor numérico de una razón trigonométrica obtiene mediante una calculadora científica. El procedimiento, a grandes rasgos, es el siguiente:

Ejemplo 1: Determinar el valor de sen 48º47´.

Solución:

Las teclas a oprimir en una calculadora científica son:

4 8 °’’’ **4 7** °’’’ **sin**

En la pantalla aparecerá 0.7522 para 48º47´

En algunos modelos de calculadora el orden de las teclas es:

sin 4 8 °’’’ **4 7** °’’’ **=**

En la pantalla aparecerá 0.7522 para 48º47´

Ejemplo 2: Determinar el valor del ángulo β, del valor de la siguiente razón trigonométrica $\tan\beta = 4.1416$.

Solución:

4 . 1 4 1 6 shift tan shift °’’’ **=**

En la pantalla aparecerá el resultado 76º25´32´´

En algunos modelos de calculadora el orden de las teclas es:

shift tan 4 . 1 4 1 6 =

En la pantalla aparecerá 76º25´32´´

Los **triángulos rectángulos tienen cinco elementos principales: los dos ángulos agudos y sus tres lados**. De esta manera, es posible resolver el triángulo, si conocemos un lado y uno de sus ángulos, o bien, si conocemos la longitud de dos de sus lados.

Examinemos algunos problemas como ejemplos.

Ejemplo 1: Dado que los lados perpendiculares de un triángulo rectángulo miden 4 y 6, respectivamente, como se muestra en la figura 6.14, encuentra el valor de *x*.

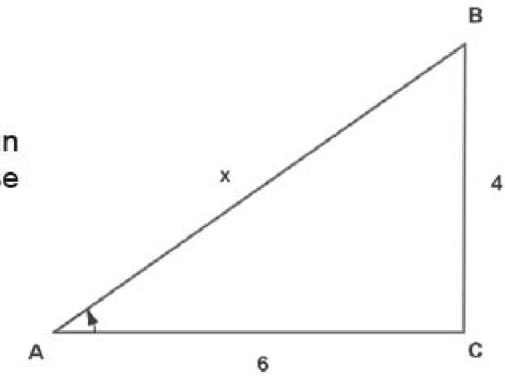


Figura 6.14.

Solución:

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 16 + 64, \quad x = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ahora para el ángulo A se tiene:

$$\tan A = \frac{4}{6} = 0.6666, \quad \text{luego} \quad A = \tan^{-1} 0.6666, \quad \angle A = 33.69^{\circ}$$

Para obtener el ángulo en grados, minutos y segundos.

A = 33.69°, para obtener el ángulo en grados, minutos y segundos tenemos: La parte entera son los grados, es decir 33°.

La parte decimal que es 0.69 se multiplica por 60, así 0.69 x 60 = 41.4, nos da los minutos, es decir, tenemos 41'. La parte decimal de 41.4, es decir, 0.4, también se multiplica por 60, así 0.4 x 60 = 24, nos da los segundos, es decir 24''.

Luego:

$$A = 33^{\circ}\,41'\,24''$$

Por complemento:

$$B = 90^{\circ} - A = 90^{\circ} - 33^{\circ}\,41'\,24'' = 56^{\circ}\,18'\,36''$$

Ejemplo 2: Dado el ángulo $A = 35°$ y $b = 7$ de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 14, encuentre los valores del cateto a y el de la hipotenusa c.

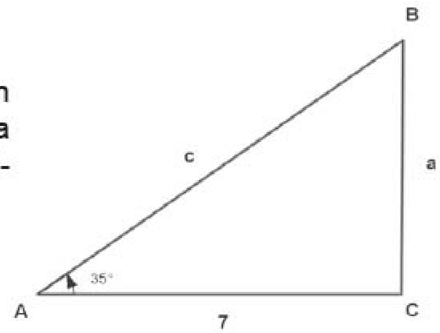


Figura 6.15.

Solución:

Trabajando sobre el ángulo A, tenemos que: $\cos A = \frac{7}{c}$, *empleamos coseno debido a que en la expresión tenemos los datos correspondientes, lo que permitirá hallar el valor de c, de la siguiente manera:*

$$\cos 35° = \frac{7}{c}, \text{ despejando } c = \frac{7}{\cos 35°} = 8.5454$$

Para hallar el valor de A tenemos: $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$, *sustituyendo:*

$$\operatorname{sen} 35° = \frac{a}{8.5454} \text{ despejando } a = (\operatorname{sen} 35°)(8.5454) = 4.9014$$

Ejemplo 3: Pipo sale de su casa muy temprano en dirección al este. Después de dar 15 pasos, gira en dirección norte; camina 20 pasos y se detiene a esperar el paso de los automóviles para cruzar la calle, como se muestra en la figura 6.16. En ese momento, ¿cuántos pasos lo separan de su casa y en qué dirección con respecto a ella se encuentra?

Como en la sugerencia b), a partir de la información podemos realizar la siguiente representación gráfica:

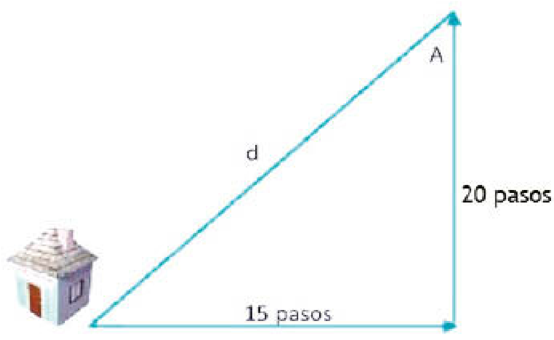


Figura 6.16.

Solución:

Podemos calcular la distancia usando el teorema de Pitágoras debido a que las direcciones de las trayectorias son perpendiculares y definen un triángulo rectángulo:

$d^2 = 225 + 400 \rightarrow d^2 = 625 \rightarrow d = \sqrt{625} = 25$. *Para la dirección obtenemos el ángulo*

A: $\tan A = \dfrac{15}{20} = 0.75 \rightarrow A = \tan^{-1}(0.75) = 36.86°$

Ejemplo 4: Determina el área de un octágono regular inscrito en una circunferencia de radio 15 cm, como se muestra en la figura 6.17.

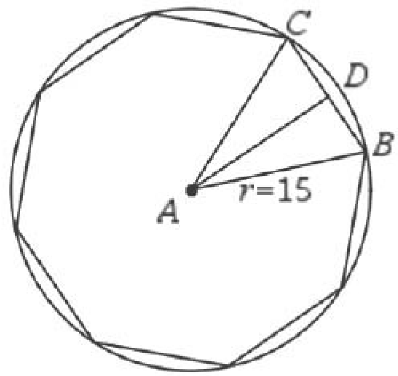


Figura 6.17.

Solución:

El ángulo central del octágono está dado por $\dfrac{360°}{8} = 45°$. *El triángulo ABC es isósceles, ya que los radios son congruentes. AD es bisectriz del ángulo A, de tal forma que se divide en dos partes de 22°30´. También se sabe que la bisectriz es mediatriz del lado BC. Si llamamos x a cada mitad del lado BC, denominamos k a la apotema del polígono y trabajamos en el triángulo ABD, tenemos que:*

$$sen 22°30' = \frac{x}{15} \rightarrow x = (15)(sen 22°30') = 5.7403$$

Luego el lado del octágono mide 5.7403 x 2 = 11.4806 cm. Además:

$$\cos 22°30' = \frac{k}{15} \rightarrow k = (15)(\cos 22°30') = 13.858$$

$$A = \frac{(perimetro)(apotema)}{2} = \frac{(8)(11.478)(13.857)}{2} = 636.20\ cm^2$$

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: Resuelve en tu libreta los siguientes ejercicios. Desarrolla procedimientos completos con un orden lógico que evidencie el seguimiento de las recomendaciones sobre el trabajo con triángulos rectángulos y las funciones trigonométricas. Para concluir, presenten y expliquen alguno de los ejercicios al grupo.

I. Realiza en tu libreta el procedimiento para desarrollar un modelo matemático del área de un triángulo equilátero (tres lados y ángulos iguales) como se muestra en la figura 6.18, empleando la medida de sus lados. Si sabemos que el área de cualquier triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura.

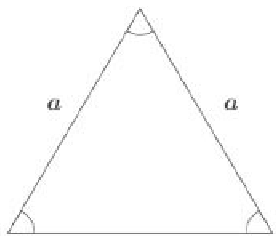


Figura 6.18

II.

1. Determina el área de un triángulo isósceles si se sabe que el ángulo de la cúspide mide 50° y cada lado igual mide 14 cm.
2. El ángulo de elevación de una persona que observa un ave en el cielo es de 75°. Si la distancia de la persona al ave es de 350 m. ¿A qué altura se encuentra el ave?
3. Un poste de alumbrado se mantiene vertical con la ayuda de un tensor, sujeto a 3 m del pie del poste. Si el ángulo del cable que lo sujeta forma un ángulo de 32°, con respecto al suelo, ¿cuál es la longitud del poste?
4. Los ángulos de depresión desde lo alto de una torre hacia dos objetos en el piso son de 25° y 37°, respectivamente. Si la altura de la torre es de 20 m, ¿qué distancia hay entre un objeto y otro?

5. La hipotenusa del triángulo mide 12 y uno de sus ángulos agudos 40°. Determina la medida de los catetos.

6. El valor de la tangente de uno de los ángulos agudos es .6, determina el valor de los ángulos agudos.

7. La hipotenusa mide 10 y la diferencia entre los ángulos agudos es 10°, determina los valores de los catetos.

8. Los catetos están en la razón 1:2 y la hipotenusa mide 16 cm. Determina los ángulos y los valores de los catetos.

9. La hipotenusa mide 20 y el mayor de los ángulos agudos supera al otro en 4°. Determina los ángulos y traza el triángulo.

10. Uno de los catetos es la mitad del otro. Determina los ángulos del triángulo.

11. Se tiene una pieza circular de madera, con lo que se desea construir un tablero de ajedrez. Si el diámetro de la pieza es de 1 m y los lados del tablero serán de 72 cm, ¿qué cantidad de madera se desechará para obtener el tablero?

12. Se requiere alcanzar un objeto que se encuentra en la parte alta de un armario. Si colocamos contra la pared una escalera de 3 m de longitud y la base de la misma queda a 1.5 m del pie del armario, ¿cuál es el valor del ángulo que forma la escalera con el suelo?

13. La cantidad de cuerda empleada en el momento del vuelo de una cometa es de 120 m. Si el ángulo de elevación de la cometa en ese momento es de 40°30’. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

14. Al momento del despegue, un avión se mantiene en la dirección 65°. Si después de cierto tiempo la altura del mismo es de 4500 m, ¿qué distancia ha recorrido desde su despegue?

15. El volumen de un cubo es de 64 cm^3. Determina la longitud de su diagonal.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aplica lo aprendido

Actividad 5

Producto de aprendizaje: mediciones de alturas

Instrucciones: En equipos de tres personas, designadas por el profesor, deberán realizar un proyecto de investigación sobre los diferentes modelos y métodos matemáticos y experimentales que se utilizan en las **mediciones de alturas**. Concluida la investigación, preséntenla a sus compañeros.

En esta ocasión el proyecto propuesto consiste en una investigación grupal acerca de "mediciones de alturas por distintos métodos". Desde luego que la actividad deberá generar algún método que puedan implementar para medir alturas, por ejemplo de una persona, de un árbol, de tu edificio escolar, un templo, edificio de gobierno o cualquier otro elemento en el que puedan comprobar la eficacia del método. Pueden consultar diversas fuentes, lo importante no es la parte documental, que desde luego deberán entregar como parte de sus evidencias de aprendizaje, sino la utilidad del método y la evidencia de que funciona, con algún error pequeño, pero que funcione. Sugerencia: usar criterios de semejanza y/o congruencia, funciones trigonométricas, etc.

Una vez registrada la información, seleccionen un método de medición de altura y llévenlo a la práctica midiendo la altura del salón de su escuela. Presenten el procedimiento y solución a través de diferentes esquemas gráficos que deberán incluir ejemplos que muestren la aplicación a situaciones cotidianas.

Tu trabajo deberás presentarlo con una carátula con tus datos (nombre, asignatura, semestre y fecha de entrega). En seguida presentarás la información obtenida y las medidas de aplicación. En esta sección puedes ilustrar tu trabajo con algunos gráficos. Posteriormente harás una reflexión donde escribas la importancia que tienen para ti, las mediciones de alturas.

Finalmente presentarás tu trabajo a tus compañeros en un tiempo mínimo de 7 minutos y un máximo de 10 minutos.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: mediciones de alturas

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Información	Presenta más de tres métodos de medición.			
	Tiene bibliografía.			
	Presenta esquemas gráficos.			
	Estrategia para llevarla a la práctica los métodos de medición.			
Presentación	Datos del estudiante, asignatura, semestre, fecha.			
	Creatividad en la mediciones de alturas por distintos métodos.			
	Entrega en tiempo y forma.			
	Documento limpio y bien estructurado.			
Reflexión personal	De forma precisa y coherente. Señala el procedimiento matemático para las mediciones de alturas por distintos métodos y describe cómo lograron aplicar el criterio de medición.			
Diseño de métodos	Descripción.			
	Aplicaciones.			
Total de puntos		11		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **7 a 10 puntos** es **Bien**, de **4 a 6** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 4** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto final problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de: nombre de la escuela, nombre del estudiante, nombre de la asignatura, nombre del bloque, título del poblemario, semestre, grupo, fecha e índice.			
	Las actividades se presentan con orden y limpieza. El planteamiento de la actividad está escrito con tinta. Proceso de solución con lápiz.			
Gráficos o esquemas	Están trazados correctamente con el juego geométrico.			
Procedimientos	Seguí las instrucciones sin problemas.			
	Mantiene secuencia lógica.			
	Presentan unidades de medida pertinentes.			
Solución	Resultados correctos del problema marcados con tinta.			
Actitud	En el desarrollo de mis ejercicios mostré puntualidad y orden en mi entrega.			
	Fui honesto al valorar mis ejercicios.			
	Mostré disposición para presentar mis ejercicios al grupo.			
	Escuché con atención y respeto a mis compañeros.			
Total de puntos		**11**		

Si en la lista de cotejo lograste los **11 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 11 puntos** es **Bien**, de **6 a 8** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?		
	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque VI

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas	
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.	
3. Elige y practica estilos de vida saludables.	Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
	Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	

Continúa...

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.	
	Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.	
	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.	Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque VII

Aplicas las funciones trigonométricas

Introducción

En este bloque nos ocuparemos de las funciones trigonométricas directas. Estas funciones se utilizan con frecuencia en las actividades relacionadas con la construcción, por ejemplo, en la ingeniería civil se usan para construir estructuras de edificios, puentes o carreteras, o también para calcular pendientes de cuencas; en la arquitectura las utilizan para medir los ángulos de las paredes y columnas; en la ingeniería mecánica, se utiliza para proyectar la fuerza, diseño y medición de piezas en series.

Recuerda que las funciones trigonométricas se definieron a partir de las razones entre los lados de un triángulo rectángulo y específicamente para los ángulos agudos. Cuando calculamos el valor del seno del ángulo de cero grados o radianes con la ayuda de la calculadora, obtenemos como resultado cero. Probablemente piensas que "todas las funciones trigonométricas del ángulo de cero grados serán iguales a cero, dado que el ángulo es nulo", pero no es así. ¿Qué ocurre con los ángulos de otras medidas? ¿Acaso no existirá el seno de un ángulo recto y de los obtusos, llanos, cóncavos y perigonales? Éstas y más preguntas que resultan fundamentales en tu formación como bachiller y como persona se responderán a lo largo del presente bloque.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.* • *Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información*

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida	• *Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento* • *Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Construyes e interpretas modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas de ángulos de cualquier medida en el plano cartesiano, empleando las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier medida en la resolución de problemas que derivan en situaciones relacionadas con las funciones trigonométricas.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	1. Funciones trigonométricas en el plano cartesiano. 2. Círculo unitario. 3. Gráfica de las funciones seno, coseno y tangente.	Comprensión de textos. Observación de objetos y gráficos. Resolución de problemas.
Procedimentales	Identifica e interpreta las funciones trigonométricas en el plano cartesiano. Reconoce las funciones trigonométricas en el círculo unitario. Aplica las funciones trigonométricas.	Realización de ejercicios y aplicación de los criterios de funciones trigonométricas en el plano cartesiano. Aplicación en situaciones reales del círculo unitario y gráficas de las funciones seno, coseno y tangente. Presentación del proceso para llegar a la solución de problemas.
Actitudinales	Autonomía para el trabajo, manteniendo el respeto, tolerancia y autenticidad.	Disposición para aprender de forma autónoma. Convivencia en su entorno mostrando respeto y tolerancia.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 10 horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices 4 horas para revisar los contenidos temáticos y 6 horas para llevar a cabo las actividades propuestas, el desarrollo de tu producto de aprendizaje y las evaluaciones propuestas.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Integrar un problemario
- Realizar la construcción *Jeopardy!*

Tu **problemario matemático** lo elaborarás en una libreta o cuaderno como evidencia, donde muestres los problemas, procedimientos (el planteamiento de la actividad a tinta y proceso de solución a lápiz), resultados marcados con tinta y trazos geométricos, estos deben mostrarse con orden y limpieza. Además debe incluir una carátula con tus datos (nombre, asignatura, bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha) y un índice.

Los productos serán evaluados con los instrumentos que se te presentan al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

A la salida de la escuela, se acerca a ti un turista y te pregunta cómo llegar a la iglesia principal de tu localidad. ¿Qué necesitas para formular una respuesta? ¿Hay la posibilidad de varias alternativas? En caso afirmativo, ¿cuál es la mejor? Elabora un croquis o mapa que muestre tu respuesta.

Escribe en las líneas siguientes las indicaciones que le darías, de manera breve y clara. En el recuadro haz el croquis de cómo llegar.

CROQUIS

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios, escribe la expresión correcta en el espacio correspondiente. Realiza en tu libreta o cuaderno los procedimientos completos que demuestren cómo obtuviste tus resultados.

1. La expresión algebraica para el enunciado “El doble de la diferencia de dos números” es: ....

Procedimiento: acciones u operaciones que se hacen para obtener un resultado.

Expresión algebraica: secuencia de caracteres cuyos símbolos pertenecen al lenguaje matemático y tiene una interpretación consistente.

2. $\frac{4}{5}-\frac{2}{\boxed{}}=\frac{2}{15}$

3. $(5x+2y)\left(\boxed{}\right)=25x^2-4y^2$

4. $x^2-\boxed{}\,x+15=(x-3)(x-5)$

5. La factorización completa de x^6-1 es: ....

6. Simplifica hasta su mínima expresión: $\frac{8x^3+28x^2 60x}{4x^4-26x^3+30x^2}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

7. Si al numerador (a) de una fracción le sumas 3 unidades y al denominador (b) le sumas 7 unidades se obtiene la fracción $\frac{1}{2}$. Calcula el valor de:

   $2a-b=\boxed{}$

8. Desde una embarcación se visualiza la parte más alta de un faro, con un ángulo de elevación de 60°. Si la embarcación se encuentra a 10 km de la base del faro, ¿qué altura tiene el faro?

Consideraciones necesarias para resolver el problema:

....

....

Respuesta: ....

9. ¿Qué ángulo agudo forman las manecillas de un reloj a las 3:20? ....

10. El perímetro de un rectángulo es 20 cm y su área es 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Al concluir verifica tus respuestas en el anexo. Si de la actividad anterior respondiste correctamente de **8 a 10 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, de **6 a 7** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: **operaciones algebraicas con ángulos, factorización y funciones trigonométricas.**

Aprende más

Funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Coordenadas cartesianas

Las **coordenadas cartesianas** se usan para definir un sistema de referencia respecto ya sea a un solo eje (línea recta), respecto a dos ejes (un plano) o respecto a tres ejes (el espacio), perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto llamado origen de coordenadas. En el plano, las coordenadas cartesianas se denominan abscisa y ordenada. La **abscisa** es la coordenada horizontal y se representa habitualmente por la letra x, mientras que la **ordenada** es la coordenada vertical y se representa por la letra y.

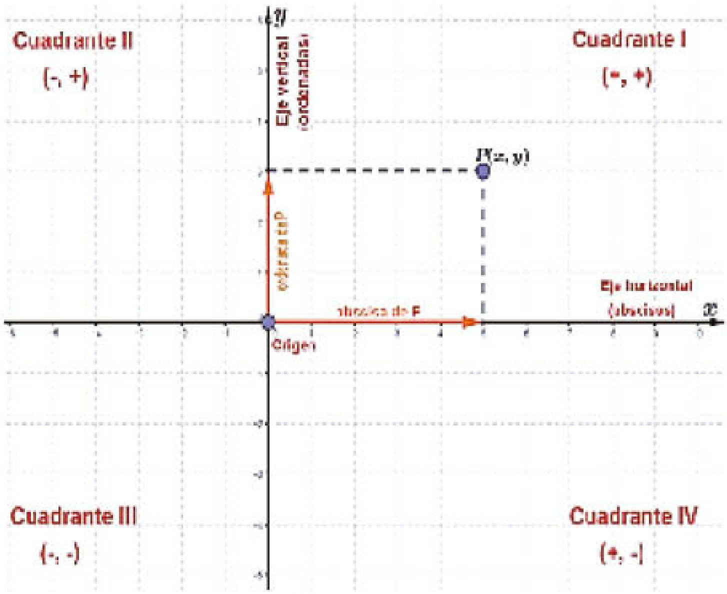


Figura 7.1.

Las coordenadas cartesianas reciben ese nombre en honor a **René Descartes** (1596-1650), filósofo y matemático francés. Como creador de la Geometría analítica, Descartes también comenzó tomando un punto de partida en esta disciplina. El sistema de referencia cartesiano, para poder representar la Geometría plana, que usa sólo dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en un punto denominado origen de coordenadas, es una figura fundamental en este curso. Los elementos del plano cartesiano se muestran en la figura 7.1.

La **abscisa** de un punto, generalmente conocida como “coordenada x”, es la distancia desde el origen, en la dirección del eje x (horizontal), hasta el punto, considerando que hacia la derecha es positiva y hacia la izquierda es negativa. La **ordenada** de un punto, conocida como “coordenada y”, es la distancia desde el origen, en la dirección del eje y (vertical), hasta el punto, considerando que arriba es positiva y hacia abajo es negativa.

Los cuadrantes son las regiones del plano que contienen puntos con iguales signos de ambas coordenadas. Así, el cuadrante I contiene todos los puntos de ambas coordenadas positivas; es decir, los puntos del cuadrante I se localizan hacia la derecha y arriba del origen, como los puntos A y B de la figura anterior. En el cuadrante II se localizan todos los puntos de abscisa negativa y ordenada positiva; es decir, puntos que están hacia la izquierda y arriba del origen. Los puntos del cuadrante III tienen ambas coordenadas negativas por lo que se localizan hacia la izquierda y abajo del origen. Finalmente, el cuadrante IV contiene puntos de abscisa positiva y ordenada negativa; es decir, puntos que están hacia la derecha y abajo del origen. Para localizar un punto en el plano cartesiano se asigna una letra mayúscula que lo identifique y, entre paréntesis, se escriben su abscisa y después su ordenada, separadas con una coma. De este modo, *A(2,3)* y *B(3,2)* representan dos puntos distintos del plano. Véase la figura 7.2.

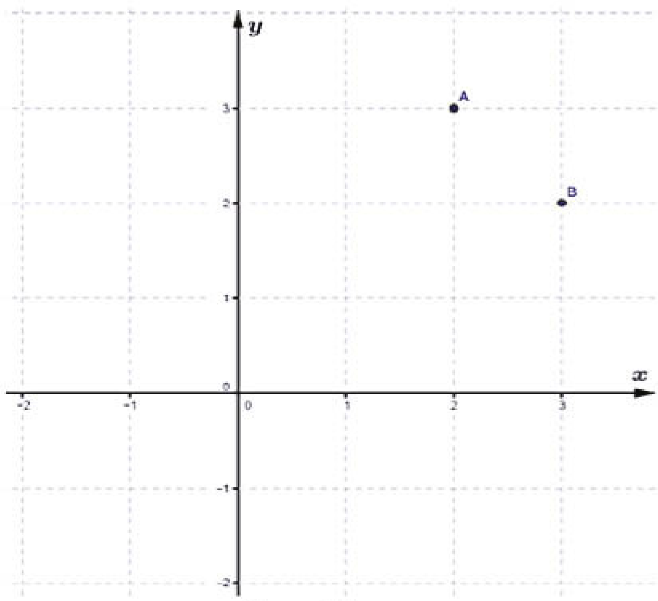


Figura 7.2.

Triángulos de referencia

Son triángulos que permiten relacionar puntos del plano con las relaciones trigonométricas de un ángulo, estudiadas anteriormente.

La disposición de los triángulos de referencia para los cuatro cuadrantes se muestra en la siguiente figura 7.3.

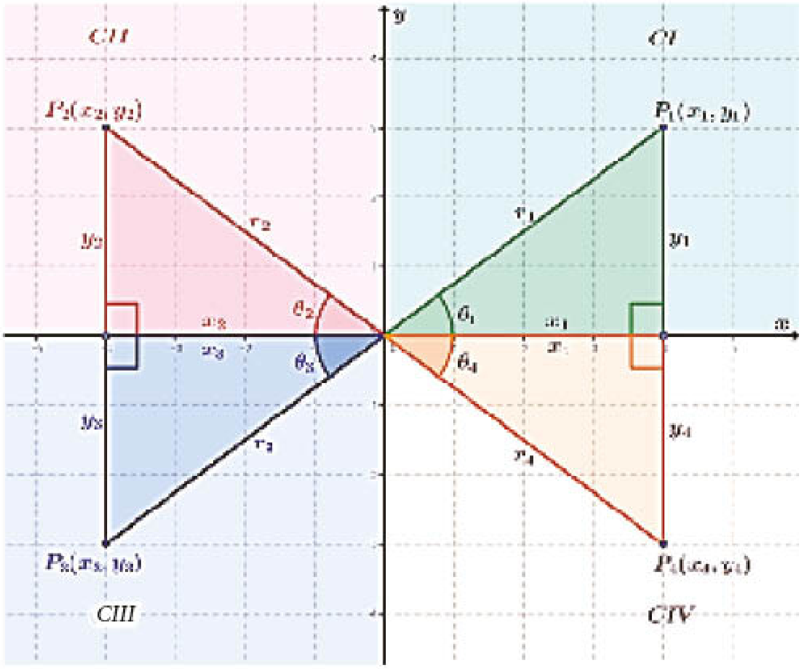


Figura 7.3.

Relaciones trigonométricas: medidas especiales de un triángulo rectángulo.

Cuadrante: dos rectas perpendiculares que dividen a un plano en cuatro partes.

En la figura anterior, los ángulos dentro de los triángulos (θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4) se denominan **ángulos de referencia**, ya que los ángulos del plano que se representan en cada cuadrante son ángulos en posición normal (su lado inicial es la semirrecta positiva del eje x y su lado terminal es la hipotenusa del triángulo de referencia).

Las figuras 7.4, 7.5 y 7.6 muestran los ángulos reales (θ) y su relación con los ángulos de referencia (θ_R).

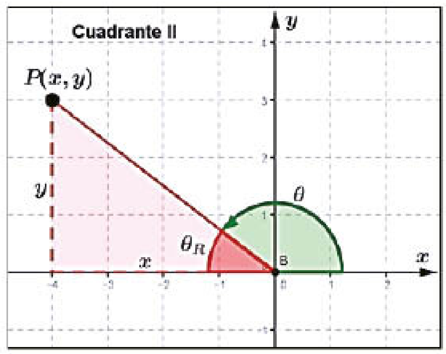


Figura 7.4.

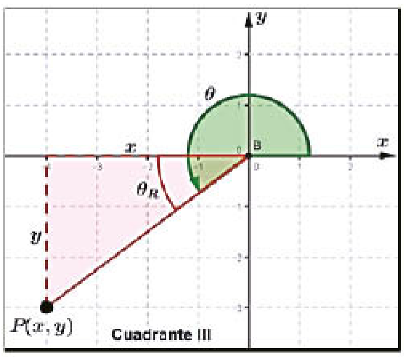


Figura 7.5.

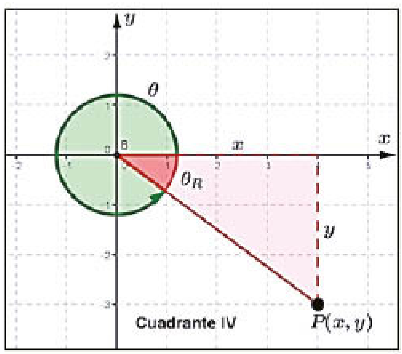


Figura 7.6.

Puedes observar que los ángulos, en los diferentes cuadrantes, tienen características comunes que resumimos en la tabla 1:

Tabla 1.

Cuadrante	Condición de sus ángulos	Definición angular
I	$0° < \theta < 90°$ (agudos)	$\theta = \theta_R$
II	$90° < \theta < 180°$ (obtusos)	$\theta = 180° - \theta_R$
III	$180° < \theta < 270°$	$\theta = 180° + \theta_R$
IV	$270° < \theta < 360°$	$\theta = 360° - \theta_R$

Funciones trigonométricas: funciones cuyos valores son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo.

Razón trigonométrica: cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos.

De este modo, podemos integrar los conocimientos desarrollados hasta ahora para obtener expresiones de las **funciones trigonométricas** de ángulos en el plano cartesiano:

Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = r^2$

Funciones trigonométricas:

$$sen\,\theta = \frac{y}{r} \quad cos\,\theta = \frac{x}{r} \quad tan\,\theta = \frac{y}{x} \quad csc\,\theta = \frac{r}{y}$$

$$sec\,\theta = \frac{r}{x} \quad cot\,\theta = \frac{x}{y}$$

Del mismo modo que para determinar las características de los ángulos en cada cuadrante, es posible concluir que los signos de las funciones dependen de la posición del punto que define a un ángulo en el plano cartesiano. La tabla 2 muestra el signo de la función trigonométrica de un ángulo en función de su cuadrante.

Tabla 2.

Cuadrante	*sen θ*	*cos θ*	*tan θ*	*csc θ*	*sec θ*	*cot θ*
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	+	-	-
III	-	-	+	-	-	+
IV	-	+	-	-	+	-

Los siguientes ejemplos ilustran la forma de presentar estas relaciones.

Ejemplos 1: Uno de los puntos de la línea terminal de un ángulo es P(3,2). Determina los valores (exactos y aproximados) de sus seis funciones trigonométricas.

Solución:

El punto dado y el ángulo real que representa pertenecen al cuadrante I.

Calculamos la hipotenusa: $r=\sqrt{(3)^2+(2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

Valores exactos: $sen\,\theta=\frac{y}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{13}}{3}$ *y* $\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

Valores aproximados: $sen\,\theta=0.55470$, $\cos\theta=0.83205$, $\tan\theta=0.66667$,
$\csc\theta=1.80278$, $\sec\theta=1.20185$ *y* $\cot\theta=1.5$.

2. Encuentra el valor del ángulo θ, cuyo lado terminal contiene al punto (2, 2).

Solución:

El punto dado y el ángulo real que representa pertenecen al cuadrante I.

Por lo tanto, podemos usar la función tangente de manera directa para calcular dicho ángulo.

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{2}{2}=1$, *por lo que* $\theta=\tan^{-1}(1)$, *que con una calculadora científica lleva a* $\theta=45°$.

3. Se sabe que el seno de un ángulo es positivo y la tangente es negativa, ¿en qué rango se encuentra el valor del ángulo?

Solución:

La función seno se define a partir de la coordenada y del punto en su lado terminal:

$sen\,\theta=\frac{y}{r}$ *y la función tangente se define a partir de ambas coordenadas:* $\tan\theta=\frac{y}{x}$, *por lo que podemos asegurar que* $y>0$ *y* $x<0$*; es decir, el punto tiene coordenadas* $P(-,+)$, *luego entonces es un punto de segundo cuadrante.*

Así, el ángulo es obtuso y se debe cumplir que $90°<\theta<180°$*; es decir, el ángulo en cuestión tiene una medida mayor de 90° pero menor de 180°.*

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta o cuaderno, realizando los procedimientos necesarios con una secuencia lógica y con limpieza. Registra y reflexiona tus respuestas para comentarlas con tus compañeros de clase con una actitud de respeto. Serás tolerante con las opiniones que recibas.

1. Si $sec\ A = -\frac{\sqrt{29}}{5}$ y $cot\ A = \frac{5}{2}$, determina los valores exactos de las funciones seno, coseno y tangente del ángulo A.
2. Si $tan\ \omega = -0.75$ y el ángulo ω es un ángulo de cuarto cuadrante, ¿cuál es el valor de las funciones seno y coseno del ángulo ω?
3. Determina el valor de la ordenada de un punto de la línea terminal de un ángulo, si se sabe que su abscisa es $-\sqrt{3}$ y el seno del ángulo es $\frac{1}{2}$.
4. ¿Es posible encontrar un ángulo x para el que se cumpla que $sen\ x \cdot csc\ x = -1$? Explica tu respuesta.
5. ¿Cuál es el error de afirmar que $cos\ \theta = 1.5$? Explica tu respuesta.
6. Demuestra que $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$.
7. Determina los valores exactos de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo α si sabemos qué $csc\ \alpha = -\sqrt{5}$ y $tan\ \alpha > 0$. Construye la gráfica del triángulo de referencia.
8. Encuentra la medida del ángulo para el cual $cot\ \theta = -\sqrt{3}$ y $csc\ \theta = 2$. Construye la gráfica.
9. Dos ángulos son coterminales si tienen el mismo lado terminal, pero diferente medida, tal es el caso de 60°, 420° y –300°. Si A y B son ángulos coterminales, ¿es verdad que $tan\ A = tan\ B$?
10. Determina los ángulos para los cuales la función coseno es $-\frac{3}{5}$. Traza la gráfica.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Crees que las personas que diseñan y hacen piezas de autos utilizan las funciones trigonométricas? ¿Por qué?

....

....

....

....

Aprende más

Círculo unitario

Definimos la circunferencia unitaria como el lugar geométrico resultante de un punto que se mueve en el plano de modo que su distancia al origen es siempre igual a la unidad. Es decir, dentro de ella se define un círculo, que se denomina círculo unitario.

Durante su movimiento, el punto define un ángulo por cada posición de su **trayectoria** y para cada una se puede construir un triángulo de referencia, como se muestra en la figura 7.7.

Trayectoria: movimiento en círculo uniforme cuya rapidez es constante.

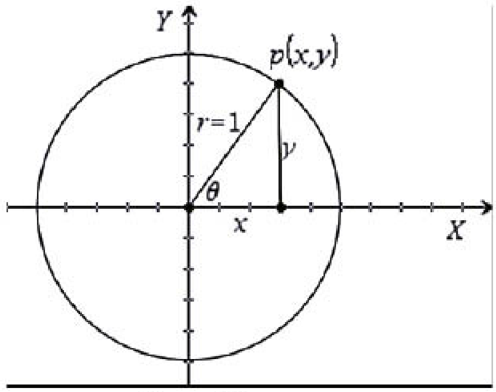


Figura 7.7.

Así, para cada punto de la trayectoria circular se tienen las siguientes relaciones:

Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 1$

Funciones trigonométricas:

$$sen\ \theta = y \qquad cos\ \theta = x \qquad tan\ \theta = \frac{y}{x} \qquad csc\ \theta = \frac{1}{y} \qquad sec\ \theta = \frac{1}{x} \qquad cot\ \theta = \frac{x}{y}$$

Los signos de las funciones trigonométricas en el círculo unitario se comportan igual que para los triángulos de referencia estudiados antes, como se muestra en la tabla 3:

Tabla 3.

Cuadrante	*Signos de las funciones trigonométricas*
I	Todos positivos.
II	Positivos seno y cosecante.
III	Positivos tangente y cotangente.
IV	Positivos coseno y secante.

Si el radio es diferente de la unidad, el círculo se denomina **círculo trigonométrico**. Básicamente las aplicaciones del círculo unitario (o trigonométrico) son las mismas que las aplicaciones del triángulo de referencia estudiadas anteriormente; sin embargo, utilizaremos el círculo unitario para demostrar algunas identidades que son ser herramientas poderosas para la aplicación de las funciones trigonométricas.

Identidades fundamentales

Identidades de recíprocos o inversos multiplicativos

Puedes darte cuenta de que en las definiciones de las funciones trigonométricas aparecen tres pares que implican razones recíprocas: seno y cosecante ($sen\ \theta = y$ y $csc\ \theta = \frac{1}{y}$), coseno y secante ($cos\ \theta = x$ y $sec\ \theta = \frac{1}{x}$) y tangente y cotangente ($tan\ \theta = \frac{y}{x}$ y $cot\ \theta = \frac{x}{y}$).

Una propiedad que tienen los inversos multiplicativos es que su producto da lugar al elemento neutro de la multiplicación, que es la unidad. Demostraremos que esto es verdad para las funciones de recíprocos.

Identidad 1. $sen\,\theta \cdot csc\,\theta = \cancel{y} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} = 1$; $\boxed{sen\,\theta \cdot csc\,\theta = 1}$

Identidad 2. $cos\,\theta \cdot sec\,\theta = \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = 1$; $\boxed{cos\,\theta \cdot sec\,\theta = 1}$

Identidad 3. $tan\,\theta \cdot cot\,\theta = \frac{\cancel{y}}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{y}} = 1$; $\boxed{tan\,\theta \cdot cot\,\theta = 1}$

Identidades de cociente

Identidad 4. Si dividimos seno entre coseno tenemos que:

$$\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{y}{x} = tan\,\theta\ ;\ \boxed{\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} = tan\,\theta}$$

Identidad 5. Si dividimos coseno entre seno tenemos que:

$$\frac{cos\,\theta}{sen\,\theta} = \frac{x}{y} = cot\,\theta\ ;\ \boxed{\frac{cos\,\theta}{sen\,\theta} = cot\,\theta}$$

Identidades cuadráticas o pitagóricas

Identidad 6. En el círculo unitario, por la aplicación del teorema de Pitágoras, se tiene que $x^2 + y^2 = 1$, que es lo mismo que $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$; $\boxed{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$

Identidad 7. Partiendo de la expresión $x^2 + y^2 = 1$:

$$x^2 + y^2 = \frac{x^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$1 + (tan\,\theta)^2 = (sec\,\theta)^2\ ;\ \boxed{tan^2\theta + 1 = sec^2\theta}$$

Identidad 8. Partiendo de la expresión $x^2 + y^2 = 1$:

$$x^2+y^2=y^2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2+1=\left(\frac{1}{y}\right)^2$$

$$(\cot\theta)^2+1=(\csc\theta)^2;\ \boxed{\cot^2\theta+1=\csc^2\theta}$$

A partir de estas identidades fundamentales se pueden comprobar otras identidades o simplificar expresiones trigonométricas.

Para facilitar el proceso, una recomendación útil es que cambies las expresiones de modo que sólo aparezcan las funciones seno y coseno, así será más fácil la simplificación. Una vez que hayas practicado lo suficiente podrás abreviar pasos y buscar otras estrategias. Los siguientes ejemplos muestran esto.

Ejemplo 1: Simplifica la expresión $\tan u\cdot\csc^2 u-\cot u\cdot\sec^2 u$.

Solución:

$$\tan u\cdot\csc^2 u-\cot u\cdot\sec^2 u=\frac{\cancel{\text{sen}\, u}}{\cos u}\cdot\frac{1}{\text{sen}^{\cancel{2}} u}-\frac{\cancel{\cos u}}{\text{sen}\, u}\cdot\frac{1}{\cos^{\cancel{2}} u}$$

$$=\frac{1}{\text{sen}\, u\cos u}-\frac{1}{\text{sen}\, u\cos u}=0$$

Ejemplo 2: Simplifica la expresión $\dfrac{\text{sen}^3 y+\cos^3 y}{\text{sen}\, y+\cos y}$.

Solución:

Aplicando la fórmula de factorización para la suma de cubos:

$$\frac{\text{sen}^3 y+\cos^3 y}{\text{sen}\, y+\cos y}=\frac{\cancel{(\text{sen}\, y+\cos y)}\left(\text{sen}^2 y-\text{sen}\, y\cdot\cos y+\cos^2 y\right)}{\cancel{\text{sen}\, y+\cos y}}$$

Agrupando para tener una identidad pitagórica:

$$\frac{\text{sen}^3 y+\cos^3 y}{\text{sen}\, y+\cos y}=\underbrace{\text{sen}^2 y+\cos^2 y}_{\text{Identidad 6}}-\text{sen}\, y\cdot\cos y$$

$$\frac{\text{sen}^3 y+\cos^3 y}{\text{sen}\, y+\cos y}=1-\text{sen}\, y\cdot\cos y$$

Ejemplo 3: Verifica la identidad $cot^2 u \cdot sen\ u + sen\ u = csc\ u$.

Solución:

$$cot^2 u \cdot sen\ u + sen\ u = csc\ u$$

$$\frac{cos^2 u}{sen^{\cancel{2}} u} \cdot \cancel{sen\ u} + sen\ u = csc\ u$$

$$\frac{cos^2 u}{sen\ u} + \frac{sen\ u}{1} = csc\ u$$

$$\frac{cos^2 u + sen^2 u}{sen\ u} = csc\ u$$

$$\frac{1}{sen\ u} = csc\ u$$

$$csc\ u = csc\ u$$

Ejemplo 4: Verifica la identidad $\frac{1}{1-\cos\beta} + \frac{1}{1+\cos\beta} = 2csc^2\beta$ **.**

Solución:

$$\frac{1}{1-\cos\beta} + \frac{1}{1+\cos\beta} = 2csc^2\beta$$

Sumando fracciones:

$$\frac{1 + \cancel{\cos\beta} + 1 - \cancel{\cos\beta}}{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)} = 2csc^2\beta$$

Simplificando y obteniendo el producto de binomios conjugados en el denominador:

$$\frac{2}{1-\cos^2\beta} = 2csc^2\beta$$

De la identidad 6 tenemos que $sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$ *por lo que:*

$$\frac{2}{sen^2\beta} = 2csc^2\beta$$

$$2\left(\frac{1}{sen\ \beta}\right)^2 = 2csc^2\beta$$

$$2(csc\ \beta)^2 = 2csc^2\beta$$

$$2csc^2\beta = 2csc^2\beta$$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Resuelve de forma individual los siguientes ejercicios en tu libreta o cuaderno, realizando los procedimientos con secuencia lógica y con limpieza. Reflexiona tus respuestas para que las comentes con tus compañeros. Recuerda que una actitud de respeto al recibir opiniones y escuhar favorece el aprendizaje.

1. Simplifica la expresión $\frac{sen\ y}{csc\ y}+\frac{cos\ y}{sec\ y}$
2. Simplifica la expresión $\frac{tan\ x+cot\ x}{sec\ x}$
3. Simplifica la expresión $cscA\left(1-cos^2A\right)$
4. Si $sen\ \theta-cos\ \theta=\sqrt{\frac{3}{4}}$, calcula el valor numérico de $sen\ \theta\cdot cos\ \theta$
5. Si $tan\ u-cot\ u=2$, calcula el valor numérico de tan^2u+cot^2u
6. Si $tan\ r=2sen\ r$ calcula el valor numérico de $sen\ r\cdot tan\ r$
7. Verifica la identidad $tan\ A+cot\ A=sec\ A\cdot csc\ A$
8. Verifica la identidad $cos^2u-sen^2u=1-2sen^2u$
9. Verifica la identidad $\frac{csc\ \theta}{sen\ \theta}+\frac{sec\ \theta}{cos\ \theta}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$
10. Verifica la identidad $\frac{sen^3u}{tan\ u-sen\ u}=cos\ u\cdot\left(1+cos\ u\right)$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Gráficas de las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente

La figura 7.8 muestra el círculo unitario, en ella puedes observar que los ángulos localizados en los ejes están determinados por los puntos A, B, C y D.

Las funciones trigonométricas establecen una relación entre el ángulo asociado con un punto del círculo unitario y dos lados del triángulo de referencia para dicho ángulo. Esto significa que el valor de la función trigonométrica depende del ángulo y, asimismo, del punto que lo define.

Es posible representar gráficamente esta relación gracias a las definiciones estudiadas del círculo unitario.

A continuación se describen los procedimientos para graficar las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

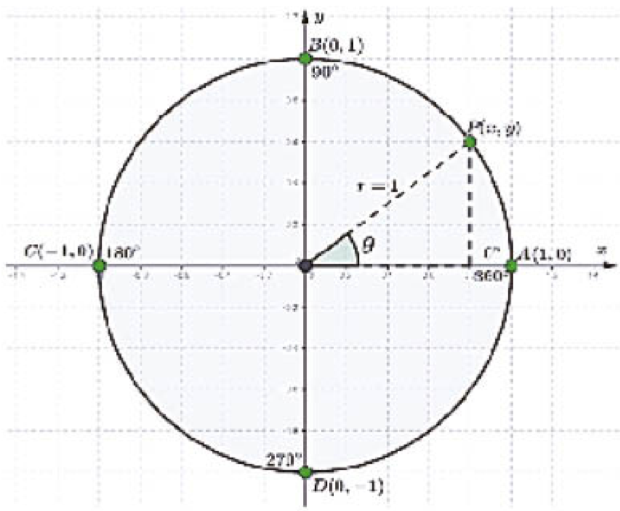


Figura 7.8.

Gráfica de la función seno

Sabemos que $sen\,\theta = y$ en el círculo unitario. Esto es particularmente útil porque podemos conocer los valores exactos para los ángulos correspondientes a los ejes cartesianos, como se muestra en la tabla 4.

Ahora bien, si definimos una nueva relación en la que la variable *y* toma el valor producido por la función seno para un ángulo *x*, entonces tenemos la relación $y = sen\,x$.

Tabla 4.

Punto	Ángulo θ		$sen\,\theta$
	Grados	Rad	
A	0°	0	0
B	90°	$\frac{\pi}{2}$	1
C	180°	π	0
D	270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1
A	360°	2π	0

La variable   toma valores dependiendo de los que sean asignados al ángulo   (expresado en radianes porque es el sistema angular para los procedimientos matemáticos) de modo que, como se muestra en el círculo unitario, varían ascendentemente desde cero (para 0°) hasta 1 (para 90°); después decrecen desde 1 hasta cero (para 180°) y siguen decreciendo hasta –1 (para 270°); finalmente, crecen desde –1 hasta cero (para 360°). Esto se resume en la tabla 5:

Tabla 5.

x	$y = sen\ x$	Comportamiento
0	0	Creciente para 0 a $\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	Decreciente para $\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{3\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	Creciente para $\frac{3\pi}{2}$ hasta 2π

Los datos anteriores, representados en el plano cartesiano, llevan a la siguiente gráfica de la figura 7.9:

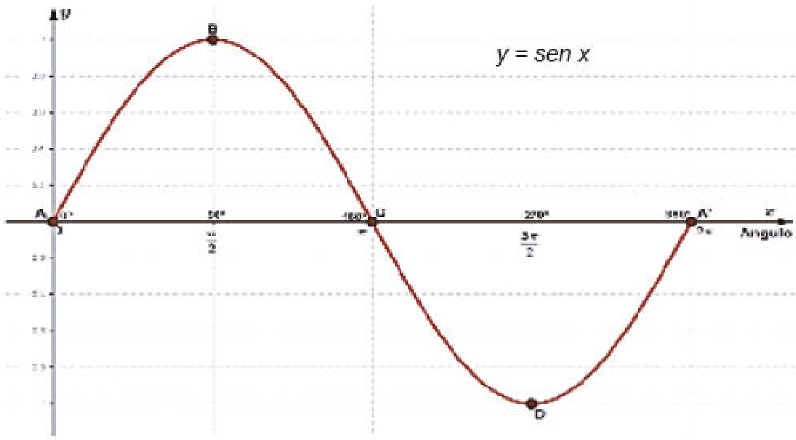


Figura 7.9.

Valor absoluto: valor numérico sin tener en cuenta su signo, sea positivo o negativo.

Esta gráfica muestra que la función $y = sen\ x$ tiene una altura máxima de 1 y una altura mínima de –1. El **valor absoluto** de esta altura máxima (o mínima) se denomina **amplitud**. La amplitud (A) de la función seno es 1. Esto se puede expresar de la siguiente manera: $-1 \leq sen\ x \leq 1$, que significa que no existe ángulo alguno cuya función seno devuelva un valor absoluto mayor que 1. Si hubiéramos empleado ángulos mayores de 360° (o negativos) el comportamiento gráfico repetiría la onda en intervalos de 2π (o -2π); por esto se dice que las funciones trigonométricas son **periódicas**.

La onda roja que define a la función seno recibe el nombre de **senoide** y el largo de esta onda se llama **periodo** (T). Para la función seno $T = 2\pi$ y su amplitud (A) es igual a 1. Una forma de representación gráfica común consiste en mostrar la gráfica de *y* = *sen x* junto con el círculo unitario, como en la figura 7.10.

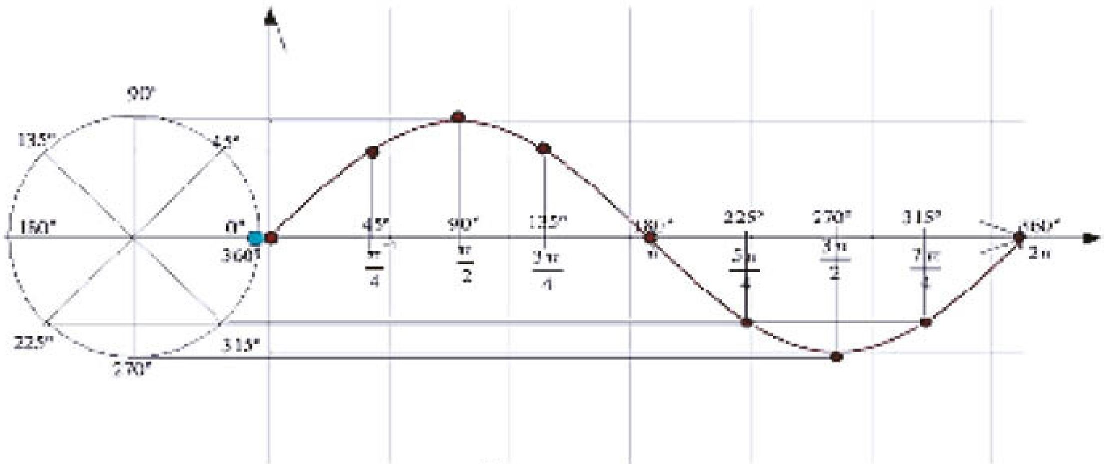


Figura 7.10.

Gráfica de la función coseno

Partimos de la definición de coseno en el círculo unitario:
De la figura 7.11 (página 280) se tiene que:

Tabla 6.

Punto	Ángulo θ		$\cos\theta$
	Grados	Rad	
A	0°	0	1
B	90°	$\frac{\pi}{2}$	0
C	180°	π	-1
D	270°	$\frac{3\pi}{2}$	0
A	360°	2π	1

Se desea graficar la relación $y = cos\ x$ y haremos un procedimiento semejante al de la graficación de la función seno. La función coseno produce valores que disminuyen desde 1 (para 0°) hasta 0 (para 90°); siguen disminuyendo hasta –1 (para 180°); empiezan a crecer, pasando por cero (en 270°) hasta 1 (en 360°). Esto se resume en la tabla 7:

Tabla 7.

x	$y = cos\ x$	Comportamiento
0	1	Dreciente para 0 hasta π
$\frac{\pi}{2}$	0	
π	-1	
$\frac{3\pi}{2}$	0	Creciente para x hasta π
2π	1	

Esto, representado en el plano cartesiano, lleva a la siguiente gráfica de la figura 7.11:

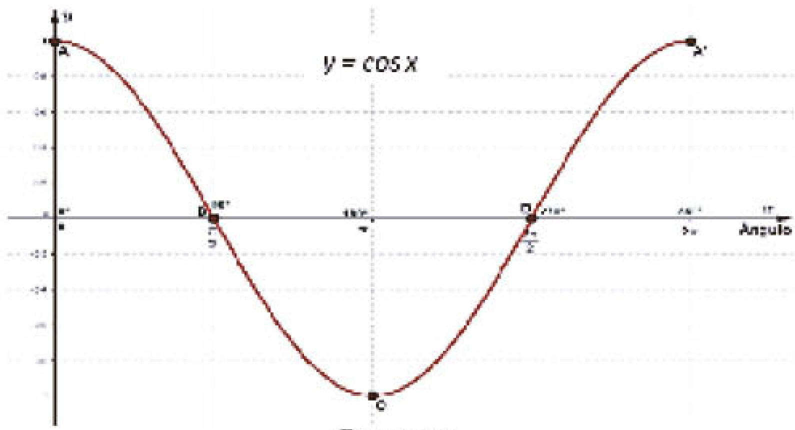


Figura 7.11.

Como se explicó en la función seno, vemos que los valores de la función coseno varían desde –1 hasta 1, para ángulos desde 0 (0°) hasta 2π (360°). Esto es:

$$-1 \leq cos\ x \leq 1 \text{ para } 0 \leq x \leq 2\pi .$$

Para la función coseno, la curva que periódicamente se repite (en color rojo en la figura 11 se denomina **cosenoide.** Además, para coseno:

Amplitud: $A = 1$
Periodo: $T = 2\pi$

De igual forma que para seno, la función coseno no puede ser tal que el valor devuelto por ella, en valor absoluto, sea mayor que 1. La representación gráfica que incluye al círculo unitario se presenta en la figura 7.12.

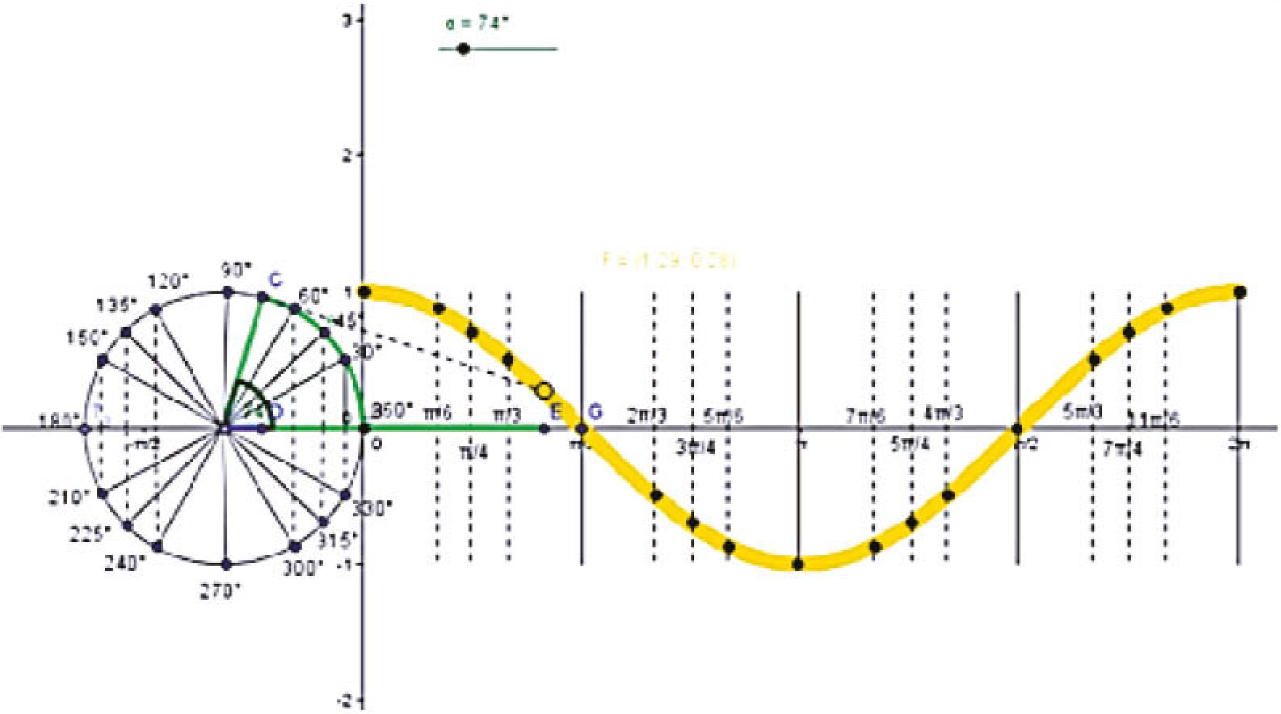


Figura 7.12.

Gráfica de la función tangente

Partimos de la definición de tangente en el círculo unitario: $tan\ \theta = \dfrac{y}{x}$

De la figura 7.13 se tiene que:

Tabla No. 8

Punto	Ángulo θ		$tan\ \theta$	Comentarios
	Grados	Rad		
A	0°	0	$\frac{0}{1} = 0$	
B	90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{0} = \pm\infty$	Problema de división entre cero
C	180°	π	$\frac{0}{-1} = 0$	
D	270°	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-1}{0} = \pm\infty$	Problema de división entre cero
A	360°	2π	$\frac{0}{1} = 0$	

Se desea graficar la relación $y = \tan x$ y haremos un procedimiento semejante al de la graficación de las funciones seno y coseno. La función tangente presenta el problema de división entre cero porque cuando el ángulo x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ (90°) o $\frac{3\pi}{2}$ (270°), la abscisa del punto de definición en el círculo unitario, que se usa como denominador en la definición de la función tangente, se aproxima a cero La división entre cero produce un valor muy grande que no se puede representar numéricamente por lo que se emplea el símbolo ∞ (infinito). Además, para la función tangente tenemos que:

- En el cuadrante I, donde $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, los valores de $\tan x$ son positivos y van creciendo; por lo que cabe esperar que en $x = \frac{\pi}{2}$ la función sea $+\infty$.
- En el cuadrante II, donde $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$, los valores de $\tan x$ son negativos pero crecen desde $-\infty$ (para $x = \frac{\pi}{2}$) en este intervalo hasta cero.
- En el cuadrante III, donde $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$, los valores de $\tan x$ son positivos y continúan creciendo desde 0 hasta $+\infty$ (para $x = \frac{3\pi}{2}$) en este intervalo.
- En el cuadrante IV, donde $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$, los valores de $\tan x$ son negativos y crecen desde $-\infty$ (para $x = \frac{3\pi}{2}$) en este intervalo hasta cero.

Esto se resume en la tabla 9.

Tabla 9.

x	$y = \tan x$	Comportamiento
0	0	Valores positivos, crecientes para 0 hasta $\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\pm\infty$	Valores negativos, crecientes para $\frac{\pi}{2}$ hasta π
π	0	Valores positivos, crecientes para π hasta $\frac{3\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\pm\infty$	Valores negativos, crecientes para $\frac{3\pi}{2}$ hasta 2π
2π	1	

Dado que en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{3\pi}{2}$ no se puede graficar, se debe dibujar una línea vertical punteada en esos valores. Estas líneas punteadas se denominan **asíntotas** y serán tema de estudios posteriores.

La representación gráfica de $y = tan\ x$ se muestra en la figura 7.13.

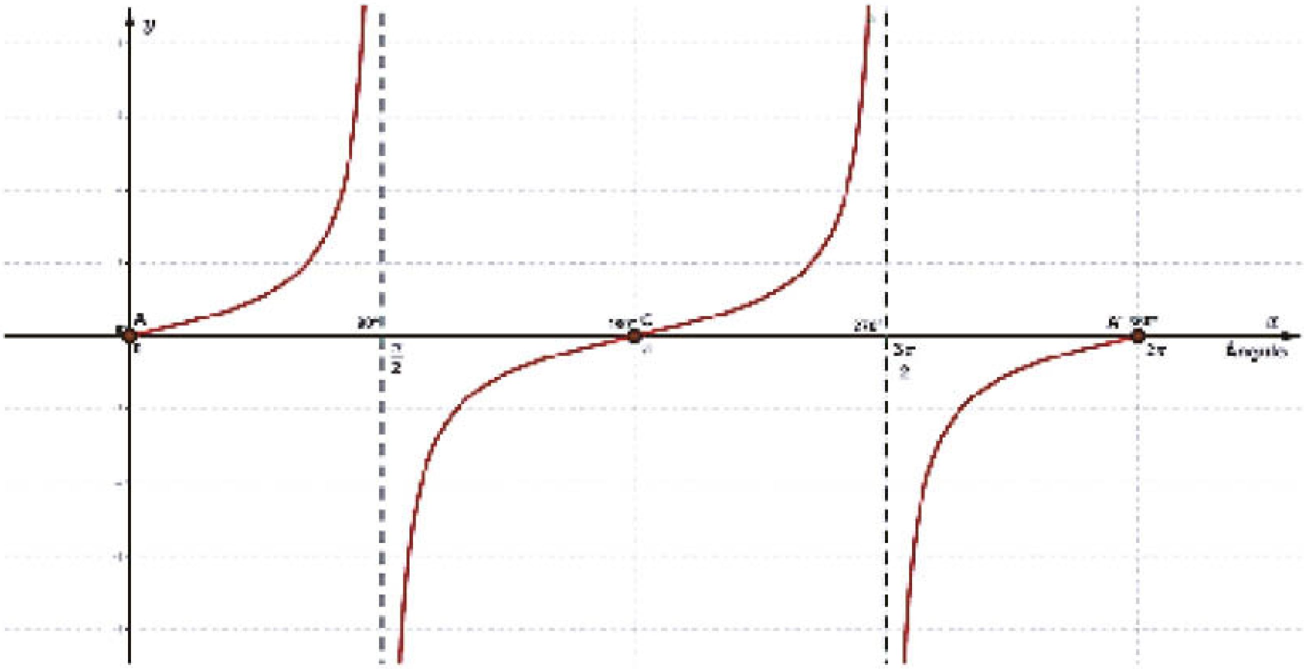


Figura 7.13.

La función tangente produce valores reales; esto es, para cualquier ángulo (excepto en múltiplos de $\frac{\pi}{2}$) la función tangente da como resultado un valor entre $-\infty$ y $+\infty$.

La función tangente no tiene amplitud y su periodo es $T = 2\pi$.

La representación gráfica que incluye al círculo unitario se presenta en la siguiente figura 7.14 (página siguiente).

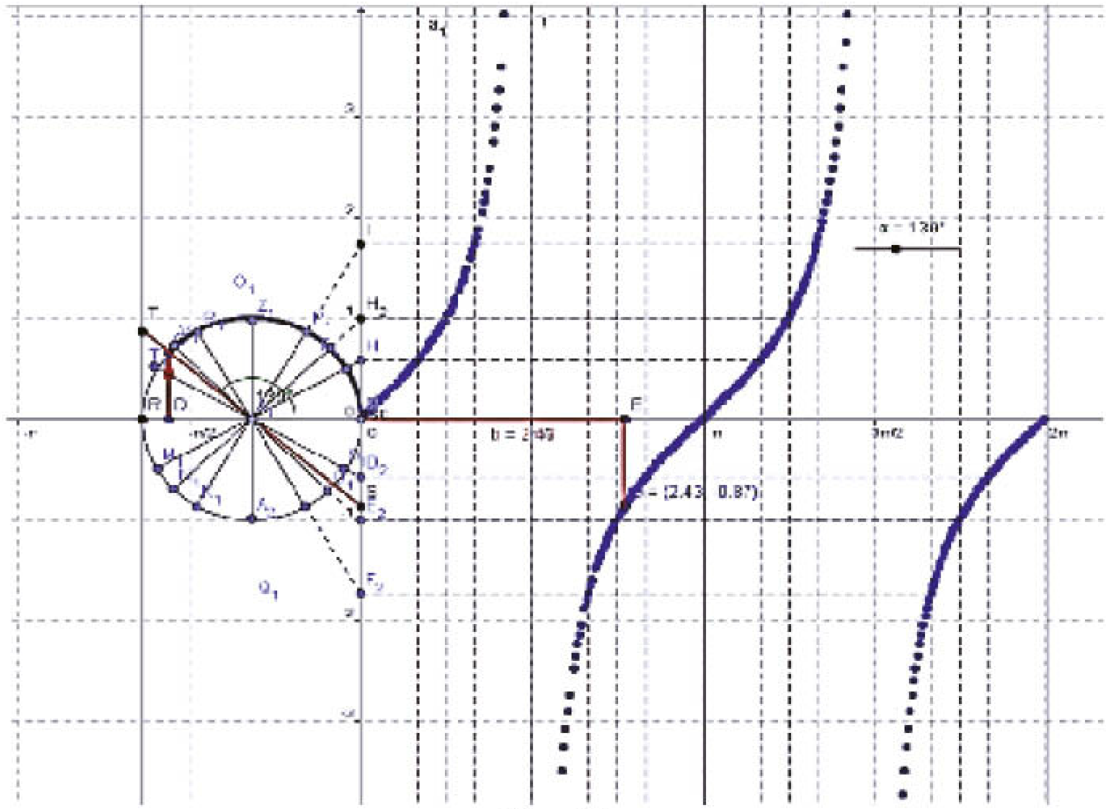


Figura 14

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Resuelve de forma individual los ejercicios del 1 al 5 en tu libreta o cuaderno, realizando los procedimientos necesarios con una secuencia lógica y con limpieza. Reflexiona tus respuestas para comentarlas con tus compañeros de clase con una actitud de respeto. Así mismo, escucharás y serás tolerante a las opiniones que recibas.

1. Encuentra el valor de la función coseno para cada ángulo y grafica los valores obtenidos en el recuadro de la figura 7.15.

x	$y = 2 \cdot \cos x$
-2π	
$\frac{-3\pi}{2}$	
$\frac{-\pi}{2}$	
$\frac{\pi}{2}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	

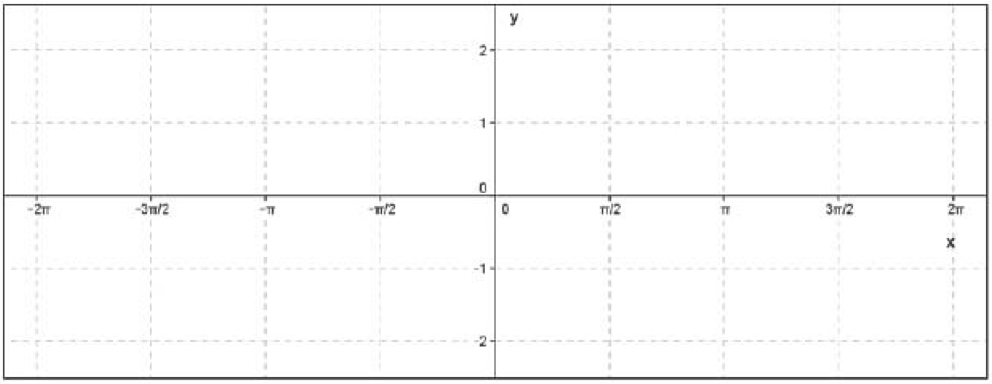


Figura 7.15.

2. La función coseno tiene valores menores que –1. ¿Verdadero o Falso? (   )

3. $tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) < 0$ ¿Verdadero o Falso? (   )

4. Entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π la función seno es creciente. ¿Verdadero o Falso? (   )

5. ¿Qué es una asíntota? R: ....

....

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Sabías que las funciones circulares se utilizan para estudiar vectores que representan fenómenos físicos como la velocidad y la fuerza? Explica brevemente cómo a través de las funciones trigonométricas se representan este tipo de fenómenos físicos. ....

....

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Producto de aprendizaje: juego *Jeopardy!*

En esta ocasión y, a manera de que los elementos analizados hasta este punto acerca de razones y funciones trigonométricas puedan ser evaluados, te presentamos el siguiente proyecto.

¿Conoces o has escuchado de *Jeopardy*? Quizá has visto programas de televisión que tienen que ver con concursos en los que la dinámica gira alrededor de personas o equipos que compiten por contestar correctamente diversas preguntas en el menor tiempo.

Jeopardy: concurso de televisión estadounidense creado por Merv Griffin. El concurso cuenta con preguntas que pueden ser de diversos temas.

Con el juego de *Jeopardy!* aplicaremos las funciones trigonométricas. El grupo deberá conformar diversos equipos para que se distribuyan las siguientes tareas.

Para iniciar, el grupo deberá conformar diversos equipos para realizar las siguientes tareas.

1. **El armado de las preguntas**. Todas deberán ser enunciados en los que se evalúen razones y funciones trigonométricas. Pueden organizar las preguntas por categorías y por grado de dificultad. Por ejemplo, una categoría pudiera ser “Plano cartesiano”, posiblemente otra sea “Círculo unitario” y así como éstas. Elaboren de 10 a 15 preguntas que les parezcan significativas, éstas deben ser escritas de forma diferente. Definan, del mismo modo, el grado de dificultad de las preguntas de cada categoría, pueden establecer de 4 a 5 niveles de dificultad.

2. **El armado de la presentación**. Otro requisito del proyecto es que elaboren un tablero en la pared donde se anoten los puntos que vaya adquiriendo cada equipo.

3. **La ejecución del concurso**. Unos compañeros fungirán como participantes. Se debe nombrar un moderador (de entre los estudiantes), quien dará lectura a las preguntas. El participante que levante la mano más rápido contestará. Si la respuesta es incorrecta, se le dará la opción de contestar al participante que levantó la mano en segundo lugar. Y, si se contesta correctamente, el participante podrá cambiar de tema para seguir participando.

4. **La promoción del evento**. Resulta interesante que a este tipo de actividades acudan estudiantes de otros planteles, otros docentes, directivos y, de ser posible, padres de familia. Siempre es importante darnos cuenta de nuestras habilidades en general y no sólo en el área de matemáticas, que es la motivadora de la presente actividad.

Pues bien, espero sea divertido y, sobre todo, pongan en juego las habilidades adquiridas en cuanto a Trigonometría se refiere. ¡Manos a la obra!

Escenario de *Jeopardy!*

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: juego *Jeopardy!*

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Información	Presentan temas sobre razones y funciones trigonométricas.			
	Elaboran preguntas por catego-rías .			
	Distinguen grados de dificultad de 4 a 5 niveles.			
	Muestran creatividad en el diseño de *Jeopardy!*			
	Tablero en forma de ruleta de manera creativa.			
	10 preguntas mínimo.			
Diseño de juego	Diferente estilo de redactar las preguntas.			
	Medidas precisas de los materia-les del concurso (preguntas).			
Actitud	Realizó el trabajo colaborativa-mente			
	Mostró respeto y tolerancia al desarrollar el trabajo			
Total de puntos		10		

Si en las listas de cotejo lograste los **10 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **8 a 9 puntos** es **Bien**, de **6 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto final problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de: nombre de la escuela, nombre del estudiante, nombre de la asignatura, nombre del bloque, título del problemario, semestre, grupo, fecha.			
	Actividades: orden y limpieza. El planteamiento de la actividad a tinta. Proceso de solución con lápiz.			
	Reflexiones sobre las actividades.			
	Presenta índice.			
Gráficos	Representados en planos cartesianos.			
Procedimientos	Mantiene secuencia lógica.			
	Presentan unidades de medida pertinentes.			
Solución	Resultados correctos del problema marcados con tinta.			
Actitud	Mostré disposición para presentar mis ejercicios al grupo.			
	Escuché con atención y respeto a mis compañeros.			
Total de puntos		10		

Si en las listas de cotejo lograste los **10 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **8 a 9 puntos** es **Bien**, de **6 a 7** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque VII

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
	Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento	
	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	

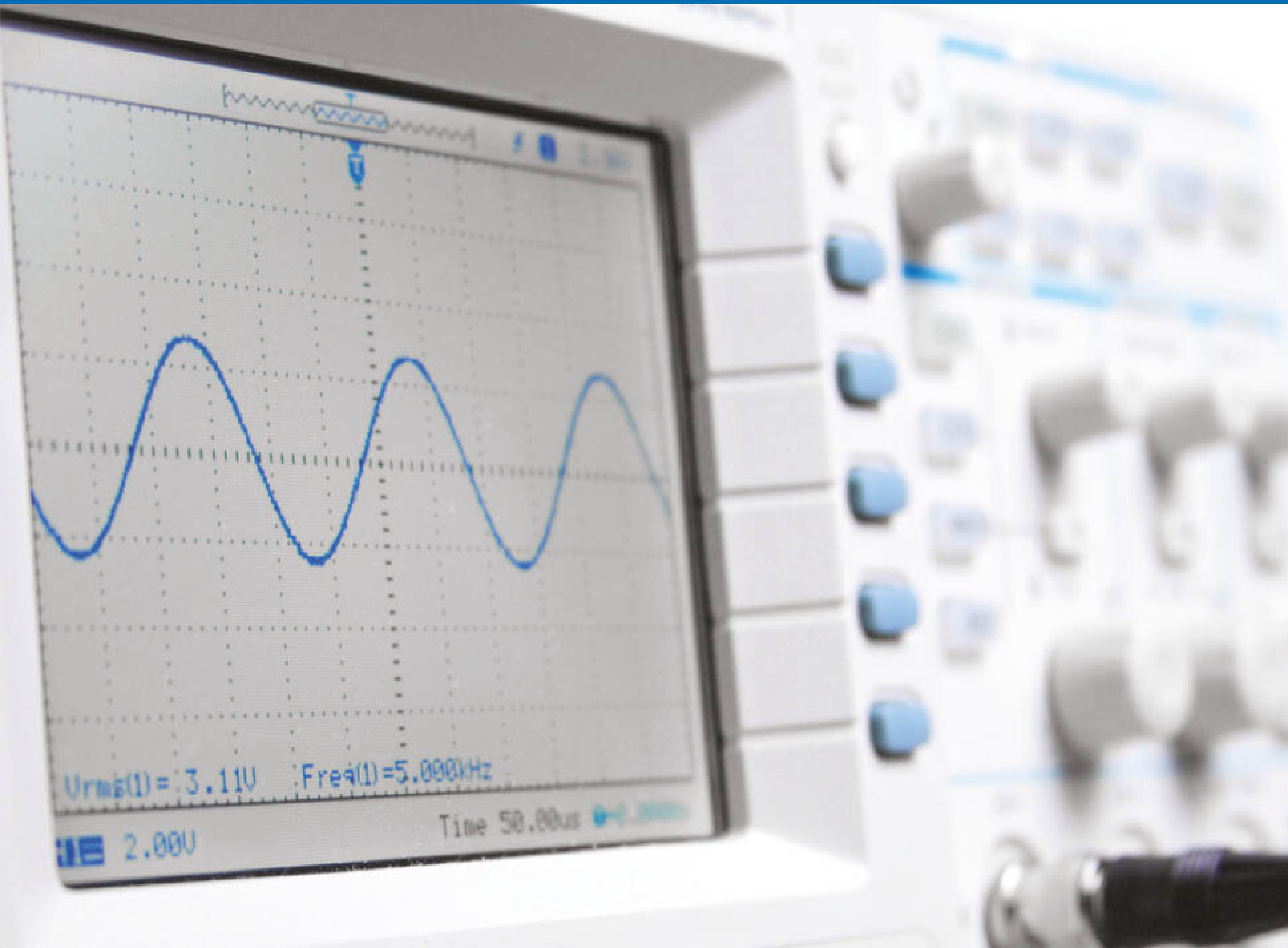
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque VIII

Aplicas las leyes de los senos y cosenos



Introducción

En ocasiones necesitamos resolver situaciones donde se ven relacionados tres puntos que se encuentran a diferentes distancias y direcciones. Si uniéramos estos puntos, formarían un triángulo oblicuángulo, es decir, un triángulo sin ángulo recto. Por ejemplo, al arrastrar un tronco por medio de dos tractores, como se muestra en la figura 8.1. Para resolver este tipo de triángulos estudiaremos la Ley de Senos y Cosenos, así podremos determinar las distancias o longitudes de las cuerdas mostradas y la separación entre los dos puntos de amarre en los tractores.

Las leyes de los senos y cosenos también se aplican en el área de la Física, Ingeniería y Medicina, entre otras. Por ejemplo, cuando buscamos analizar la fuerza que se aplicará a un dispositivo que se inserta en la rodilla y que funcionará bajo diferentes fuerzas por el movimiento. Esto provocará que el sentido de la fuerza cambie y sea necesario calcular cómo se distribuirá esta fuerza en diferentes direcciones o ejes, como se muestra en la figura 8.2.

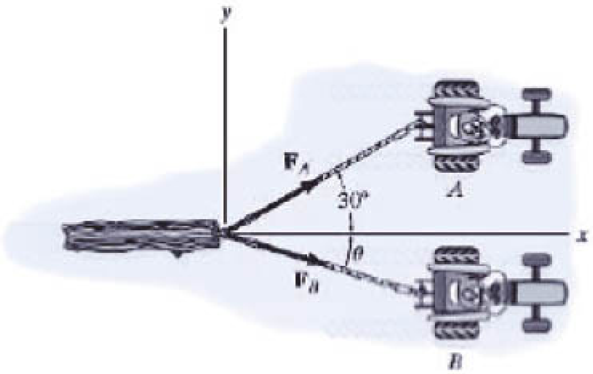


Figura 8.1.

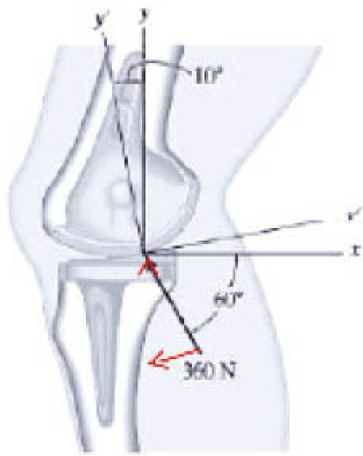


Figura 8.2.

En este bloque exploraremos las relaciones que se establecen entre los ángulos y las medidas de los lados de triángulos oblicuángulos.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	• *Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.*

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	• *Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.* • *Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.* • *Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.* • *Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.* • *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*

Continúa...

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*

Competencias disciplinares
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Construyes e interpretas modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos a partir de la aplicación de la ley de los senos y de los cosenos a la resolución de problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	• Ley de senos • Ley de cosenos	Comprensión de textos. Observación de objetos y gráficos. Resolución de problemas.

Procedimentales	1. Aplicación de los criterios de la ley de senos y cosenos para resolver triángulos oblicuángulos 2. Resolución de ejercicios para aplicar la ley de senos y cosenos 3. Argumentación del uso de los criterios de la ley de senos y cosenos	Realización de ejercicios y aplicación de la ley de senos y cosenos. Presentación del proceso para llegar a la solución.
Actitudinales	Autonomía para el trabajo, manteniendo el respeto, tolerancia y autenticidad	Disposición para aprender de forma autónoma. Convivencia en su entorno mostrando respeto y tolerancia.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 8 horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices 4 horas para revisar los contenidos temáticos y 4 horas para llevar a cabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu proyecto final.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Resolución de ejercicios de manera individual y grupal para integrar un problemario.
- Construcción de una **maqueta**

Tu **problemario matemático** lo elaborarás en una libreta o cuaderno como evidencia, donde muestres los problemas, procedimientos (el planteamiento de la actividad a tinta y proceso de solución a lápiz), resultados marcados con tinta y trazos geométricos, estos deben mostrarse con orden y limpieza. Además debe incluir una carátula con tus datos (nombre, asignatura, bloque, título del problemario, semestre, grupo y fecha) y un índice.

Maqueta: reproducción física "a escala", en tamaño reducido, de algo real o ficticio. También pueden existir modelos de tamaño grande de algún objeto pequeño.

Los productos serán evaluados con los instrumentos que se te presentan al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

Ante fenómenos de la naturaleza, como una tormenta eléctrica y la velocidad del viento, los pilotos de aviones se ven en la necesidad de cambiar su ruta, por lo que es necesario realizar ajustes en los instrumentos del avión, y éstos se calculan trazando un triángulo obtuso, como se muestra en la figura 8.3.

Dimensión: medida topológica, como la longitud, área y volumen.

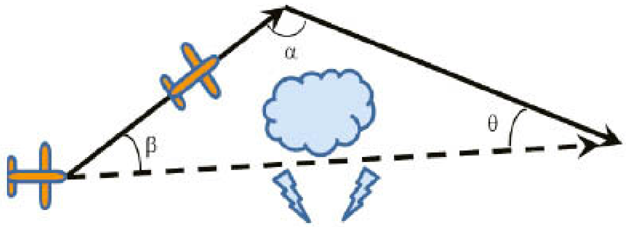


Figura 8.3.

Al no tener el triángulo un ángulo recto o un ángulo de 90°, no podemos aplicar el teorema de Pitágoras, ni las funciones trigonométricas de forma directa. ¿Por qué crees que no se utiliza? y ¿Cómo crees tú que encontraríamos la dimensión de los lados y ángulos en los triángulos no rectángulos? Escribe tus respuestas en las líneas de manera breve y clara.

....

....

¿Con qué conocimientos cuentas?

Para dar inicio a este bloque, trabajaremos con un cuestionario que tiene por objetivo explorar de manera específica los conocimientos que dominas, antes de empezar a estudiar la ley de senos y ley de cosenos.

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios realizando en tu libreta o cuaderno los procedimientos completos que demuestren las evidencias de procesos de solución.

1. Un ángulo de 55.35º se expresa en forma sexagesimal como:

2. Calcula el área de un octágono que tiene 5 cm de lado y 3 cm de apotema.

3. Calcula el seno de 45º 21' 35".

4. Resuelve el triángulo rectángulo que tiene como dimensión de sus catetos 5.8 cm y 6.4 cm.

5. Determina el valor de x para que se cumpla la proporción 5:x::45:28.

6. ¿Cuáles son los principios de congruencia de triángulos?

7. ¿Qué área es mayor, la de un círculo de radio 4 cm o la de un icoságono (polígono de 20 lados) de apotema 4 cm?

8. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 56 cm de longitud y el cateto opuesto al ángulo B es de 23 cm ¿Cuánto mide el coseno del ángulo B?

Al concluir, verifica tus respuestas en el anexo. Si de la actividad anterior respondiste correctamente a **8 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, de **6 a 7** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: **concepto de ángulo, área de polígonos, semejanza y congruencia de triángulos, funciones trigonométricas.**

Aprende más

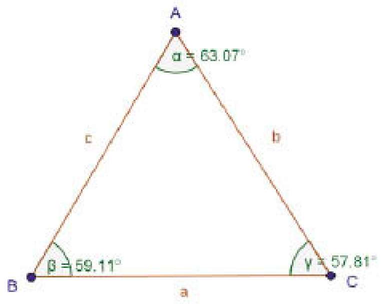
Para medir una distancia o la altura de un objeto, como por ejemplo, medir la altura de un árbol a partir del ancho de la carretera y con dos ángulos de elevación conocidos, como se muestra en la figura 8.4, es necesario recurrir a las leyes de senos y cosenos.

Figura 8.4.

Otra de las aplicaciones de estas dos leyes es en la construcción, específicamente en la **topografía**, cuando se está midiendo el perímetro de un terreno de forma irregular, el ancho de un río, la altura de una barranca y no es posible la medición de forma directa. En estos casos podemos emplear triángulos oblicuángulos para hallar la medida de forma indirecta.

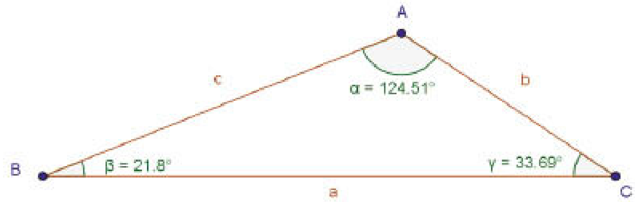
Topografía: conjunto de principios y procedimientos que tienen por objeto la representación gráfica de la superficie de la Tierra, con sus formas y detalles, tanto naturales como artificiales.

Un triángulo es oblicuángulo cuando no tiene un ángulo recto; si tiene tres ángulos agudos, se denomina triángulo oblicuángulo acutángulo, como se muestra en la figura 8.5a, pero si tiene un ángulo obtuso, entonces se trata de un triángulo obtusángulo, como se muestra en la figura 8.5b.



Triángulo oblicuángulo acutángulo

Figura 8.5a.



Triángulo oblicuángulo obstusángulo

Figura 8.5b.

Ley de senos

La ley de senos es una relación de tres igualdades que siempre se cumplen entre los lados y ángulos de un triángulo oblicuángulo cualquiera. Esta ley es la razón entre la longitud de cada lado y el seno del ángulo opuesto a él.

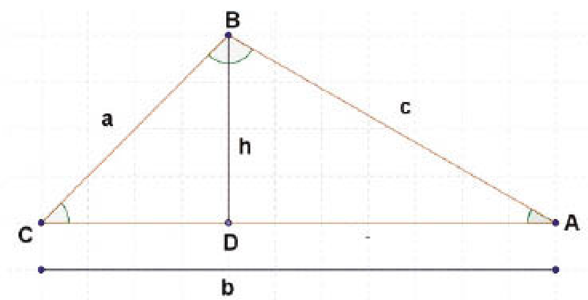


Figura 8.6.

En la figura 8.6, tenemos un triángulo oblicuángulo. Si lo dividimos con el segmento de recta BD entonces obtenemos dos triángulos rectángulos; en ellos sí podemos aplicar las funciones trigonométricas estudiadas en el bloque anterior:

$$sen\ A = \frac{h}{c} \text{ y } sen\ C = \frac{h}{a}$$

Despejando en ambas ecuaciones “h”, tendríamos que:

$$h = c\,sen\,A \text{ y } h = a\,sen\ C$$

Igualando valores de “h”, tendremos que:

$$c\,sen\ A \quad a\,sen\ C$$

Expresado de otra forma tendremos que:

$$\frac{senA}{a}=\frac{senC}{c} \text{ o } \frac{a}{senA}=\frac{c}{senC}$$

Por lo que podremos afirmar que:

$$\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}=\frac{senC}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}$$

A esta identidad se le conoce como como la ley de senos.

De esta ley se pueden establecer tres principios:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{senA}{a}=\dfrac{senB}{b} \\ \dfrac{senA}{a}=\dfrac{senC}{c} \\ \dfrac{senB}{b}=\dfrac{senC}{c} \end{array}}$$

Con esta ley podemos conocer la dimensión de los ángulos y lados de un triángulo oblicuángulo, y para realizar este tipo de cálculo necesitamos conocer:

a) Dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos lados.

b) Dos ángulos y el lado que los une.

Ejemplos:

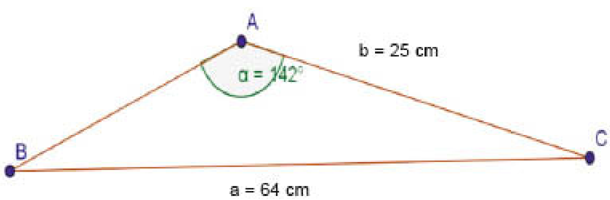


Figura 8.7.

Cuando conocemos la longitud de dos lados y la amplitud del ángulo opuesto a uno de ellos, calcular la magnitud de los ángulos y lados del triángulo de la figura 8.7 que se desconocen.

Solución:

Si se aplica la ley de senos, tendremos: $\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}$

Sustituyendo: $\frac{sen142^{\circ}}{64}=\frac{senB}{25}$

Por lo tanto: $senB=\frac{(25)(sen142^{\circ})}{64}$

Sustituyendo el $sen142^{o}=\ 0.61567$

Tendremos: $senB=\frac{(25)(0.61567)}{64}=0.24049$

Por lo tanto: $\measuredangle B=sen^{-1}(0.24049)$

Entonces: $\measuredangle B=13.9155^{o}$

Transformando a sistema sexagesimal tenemos:

$$\measuredangle B=13^{o}\ \ 57'\ 18''$$

Como ya conocemos dos ángulos , $\measuredangle A=142^{o}$ *y* $\measuredangle B=13^{o}\ \ 57'\ 18''$ *, podemos calcular el valor del* $\measuredangle C$ *, de la siguiente manera:*

Si $\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180^{o}$ *entonces,* $\measuredangle C=180^{o}-\measuredangle A-\measuredangle B$

Sustituyendo: $\measuredangle C=\ 180^{o}\ \ -142^{o}-13^{o}\,57'18''=24^{o}\,2'42''$

Ahora, al utilizar el valor de (C) con la ley de senos tenemos:

$$\frac{senB}{b}=\frac{senC}{c}$$

Despejando:

$$\frac{0.24049}{25}=\frac{sen24^{\circ}2'42''}{c}$$

$$c=\frac{(0.40745)(25)}{0.24049}$$

$$c=42.3562\ cm$$

Respuestas:

$\measuredangle A=142^{o}$, $\measuredangle B=13^{o}\,57'18''$, $\measuredangle C=24^{o}\,2'42''$, lado $a=64$ cm, $b=25$ cm, $c=42.3562$ cm

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Calcula las dimensiones de los lados y ángulos de los triángulos oblicuángulos que se presentan en la figuras 8.8, 8.9, 8.10, y 8.11, aplicando la ley de senos.

En tu libreta o cuaderno realiza el procedimiento con orden lógico y limpieza, para llegar a cada solución. En plenaria presentarás alguno de los ejercicios que designe el profesor. Recuerda ser tolerante y respetuoso para escuchar a tus compañeros.

a)

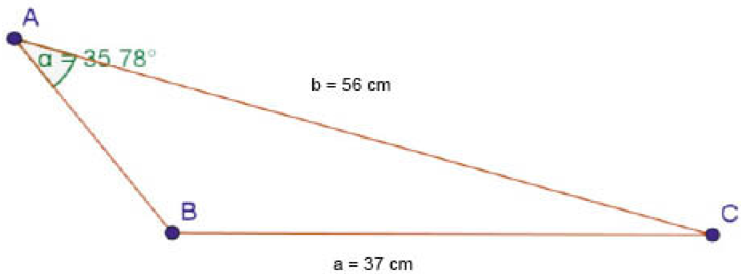


Figura 8.8.

b)

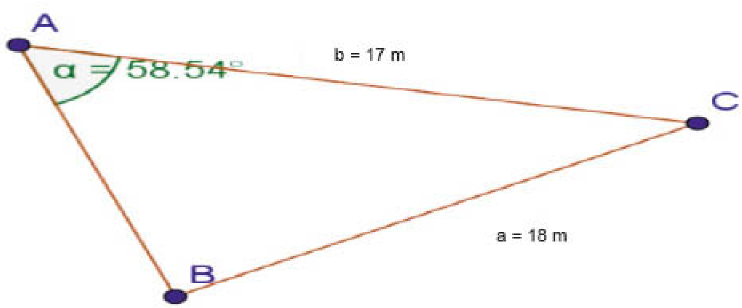


Figura 8.9.

c)

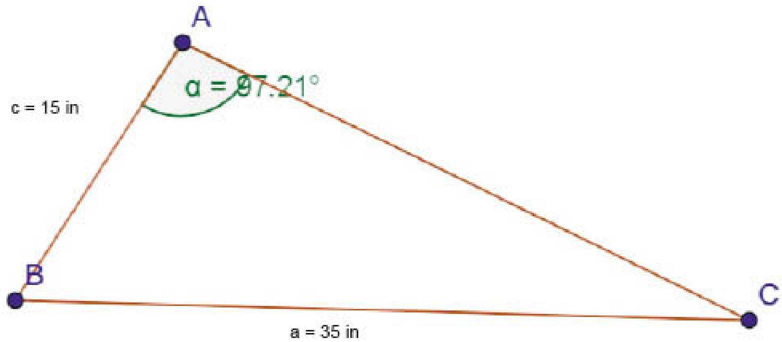


Figura 8.10.

d)

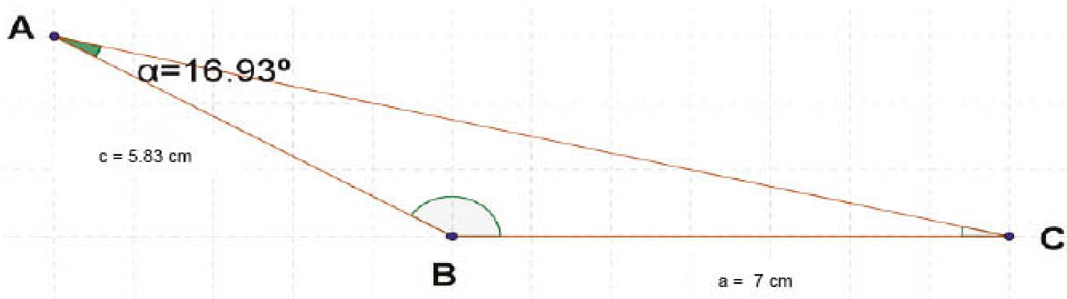


Figura 8.11.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Aprende más

Cuando conocemos el valor de dos ángulos y la longitud del lado que los une, se realiza el siguiente procedimiento.

Ejemplo 1: Calcular las dimensiones de los lados y ángulos del triángulo oblicuángulo obtusángulo que se muestra en la figura 8.12:

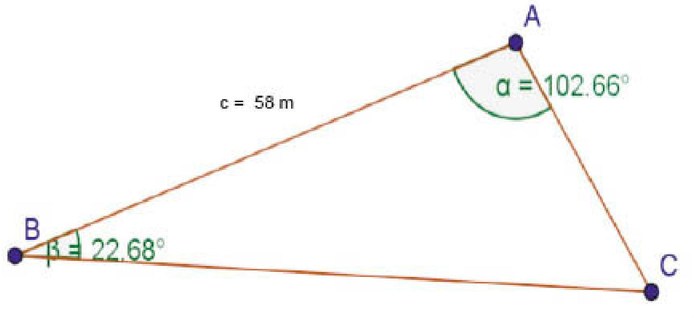


Figura 8.12.

Solución:

Conocemos al $\measuredangle B = 22.68°$, *al* $\measuredangle A = 102.66°$ *y la dimensión del lado c = 58 cm. No conocemos* $\measuredangle C$ *del triángulo oblicuángulo* ABC, *ni a los lados a y c. Como conocemos los ángulos A y B, podemos conocer el ángulo C, aplicando:*

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$

Despejando: $\measuredangle C = 180° - \measuredangle A - \measuredangle B$

Sustituyendo: $\measuredangle C = 180° - 102.66° - 22.69°$

Ahora tenemos que: $\measuredangle C = 54.65°$

Aplicando la ley de senos, tenemos:

$$\frac{senA}{a} = \frac{senC}{c}$$

Sustituyendo, tendremos que:

$$\frac{sen54.65^{\circ}}{58} = \frac{sen102.66^{\circ}}{a}$$

Despejando:

$$a = \frac{(58)(sen102.66^{\circ})}{sen54.65^{\circ}}$$

Realizando la operación, tenemos:

$$a = \frac{(58)(0.97569)}{0.816533}$$

$$a = 69.305\ cm$$

Continúa...

Ahora calcularemos la longitud del lado b

Aplicando:

$$\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}$$

Sustituyendo:

$$\frac{sen102.66^{\circ}}{69.305}=\frac{sen22.68^{\circ}}{b}$$

Despejando:

$$b=\frac{(69.305)(sen22.68^{\circ})}{sen102.66^{\circ}}$$

Realizando la operación tenemos:

$$b=\frac{(69.305)(0.385584)}{0.97569}$$

$$b=27.389\ cm$$

Resultado:

$$\measuredangle C=54{,}65^{o},\ lado\ b=27.389\ cm\ y\ lado\ a=69.305\,cm$$

Ejemplo 2: Un avión vuela una distancia de 150 km de la ciudad A a la ciudad B. Luego cambia su rumbo 50° y se dirige a la ciudad C; luego cambia de rumbo y gira 70° para regresar a la ciudad A.

¿Qué distancia hay entre las ciudades A y C?. Esto lo puedes ver representado en la figura 8.13.

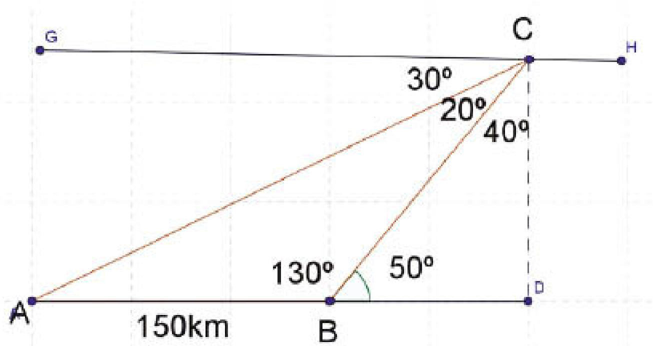


Figura 8.13.

Solución:

Conocemos: lado c = 150 km, ángulo suplementario del ángulo B, $\measuredangle B' = 50°$, por lo tanto el $\measuredangle B = 130°$, el ángulo complementario del $\measuredangle C = 70°$, por lo que $\measuredangle C' = 20°$.

Aplicando la ley de senos para conocer el lado b que representa la distancia entre las ciudades A y C:

$$\text{Ley de senos: } \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

$$\text{Sustituyendo: } \frac{b}{sen(130°)} = \frac{150}{sen(20°)}$$

$$\text{Despejando: } b = \frac{150\,(sen(130°))}{sen(20°)}$$

$$\text{Realizando la operación tenemos: } b = \frac{150\,(0.766)}{0.342} = 335.97\ km$$

Resultado: las ciudades A y C están a 335.97 km de distancia.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: De forma individual, resuelve los siguientes problemas en la libreta o cuaderno, traza la figura correspondiente de acuerdo con los datos que se te presentan en cada uno. Realiza el procedimiento con orden lógico y limpieza. Finalmente presentarás y explicarás a tus compañeros cómo obtuviste la solución de alguno de los problemas.

Falda: parte inferior de la ladera de una montaña.

Problemas:

1. Un topógrafo se encuentra en la cima de un cerro que identificaremos como el vértice A de un triángulo oblicuángulo. Con ayuda de un **teodolito** mide la distancia de un lado de las **faldas** de un cerro entre los puntos B

y C, la cual es de 398 m. Después mide la distancia lateral del punto C al punto D la cual tiene un valor de 66 m y el ángulo $\measuredangle ACD$ = 33º 25' 32" de elevación hasta A.

a) Calcular la altura del cerro, de acuerdo con la información dada y tomando como base la figura 8.14.

b) Calcular la distancia de la carretera que se construirá sobre el lado $\overline{AB}$.

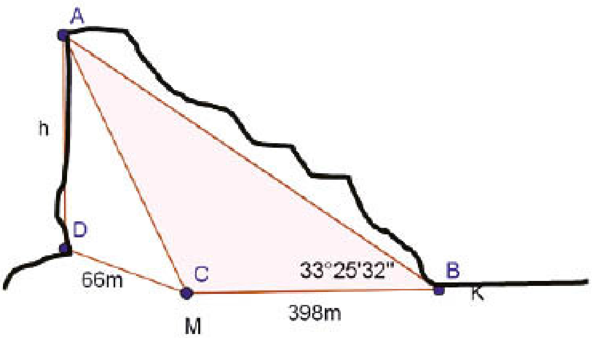


Figura 8.14.


Teodolito electrónico.

Sabías que...

El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico que se utiliza para obtener ángulos verticales y horizontales.

2. Un avión despega del aeropuerto de la ciudad de México (punto A) con una dirección de 43.39º, según la computadora de mando, y llega a una altura de 10,000 **pies**, en la que se mantiene durante 500 **millas**. Después debe descender con una inclinación de 42.58º y tomar dirección para aterrizar en el aeropuerto de la ciudad de Monterrey (punto D). ¿Cuál es la distancia entre los dos aeropuertos? Para iniciar el procedimiento observa la figura 8.15.

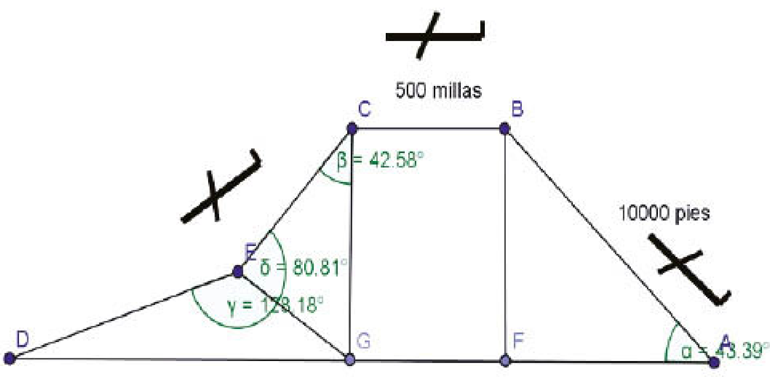


Figura 8.15.

Pie: unidad de medida que equivale a 30.48 cm. Posee 12 pulgadas.

Milla terrestre: unidad de medida que equivale a 1609 metros.

3. Calcular los diferentes lados y ángulos de cada triángulo oblicuángulo de la figura 8.16.

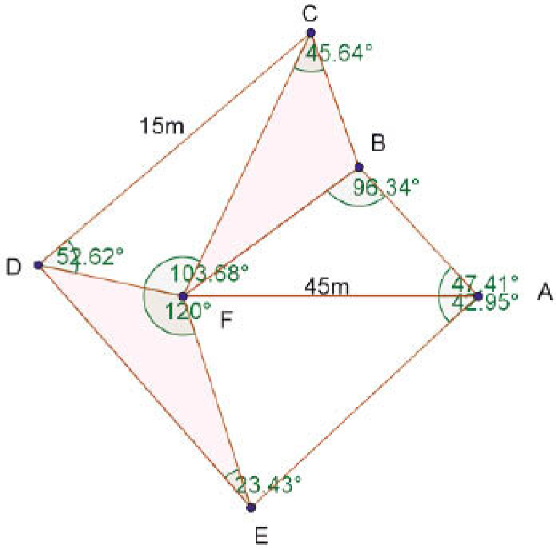


Figura 8.16.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si observas las casas o edificios de tu comunidad o colonia, ¿las construcciones llegan a formar triángulos oblicuángulos? ¿Por qué? Explica breve y claramente.

....

....

....

....

....

Aprende más

Ley de cosenos

La ley de cosenos se puede considerar como una extensión del teorema de Pitágoras y se aplica a todos los triángulos.

Esta ley consiste en: el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos dos lados multiplicado por el coseno del ángulo que se forma.

En seguida, presentamos un ejercicio en donde se aplica la ley del coseno en un triángulo oblicuángulo cualquiera, para demostrar de dónde se obtiene esta ley y cuáles son sus características. Como se muestra en la figura 8.17:

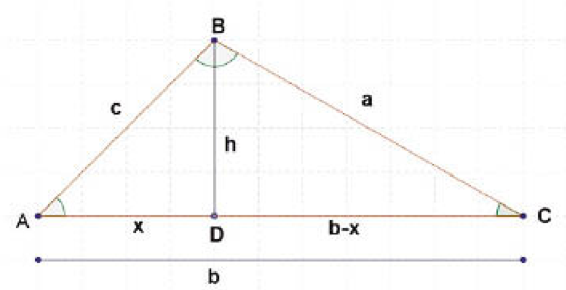


Figura 8.17.

Considerando el teorema de Pitágoras, afirmamos que:

$$c^2 = h^2 + x^2$$

También que: $a^2 = h^2 + (b-x)^2$

Desarrollando las operaciones, tendremos:

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

Sustituyendo el valor de h^2, tendremos:

$$a^2 = b^2 - 2bx + h^2 + x^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

Ahora, en el $\triangle OPQ$, observa que: $cosA = \frac{x}{c}$, donde $x = c\,cosA$

Y sustituyendo x en:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cosA$$

Entonces podemos afirmar que si

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cosA$$

Entonces, también:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,C$$

Resumiendo lo anterior, la **ley de cosenos** es:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,C$$

Aunque también de estas expresiones podemos conocer los ángulos, si despejamos en cada una de ellas el ángulo deseado, quedan así:

Despejando el ángulo A tendremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cosA$$
$$a^2 + 2bc\,cosA = b^2 + c^2$$
$$2bc\,cosA = b^2 + c^2 - a^2$$
$$bc\,cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$
$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$A = cos^{-1}\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Si lo hacemos igual para los ángulos *B* y *C*, tendremos:

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$
$$C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Resumiendo. Tenemos que:

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$
$$B = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$
$$C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Es decir, que por la **ley de cosenos** también podemos obtener la longitud de los lados de un triángulo y la dimensión de los ángulos.

Los únicos **requisitos** que tenemos para utilizar la ley de cosenos son:

a) Conocer la magnitud de los tres lados (LLL).

b) Conocer un ángulo y la longitud de los lados que lo forman (ALL).

Ejemplos:

1. Calcular el lado (a) y los ángulos B y C que faltan del triángulo oblicuángulo ABC, de la figura 8.18.

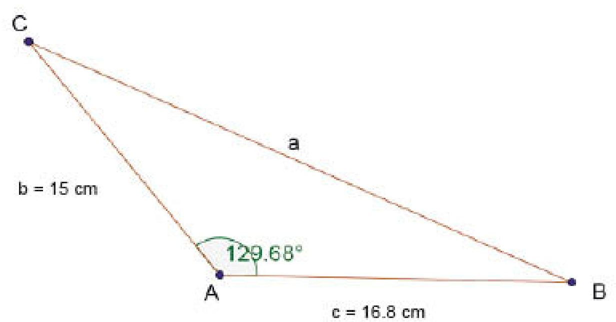


Figura 8.18.

Solución:

Como conocemos los lados b y c, y el ángulo formado por ellos, podemos calcular el lado a:

$$Si: \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Sustituyendo valores: $a^2 = 15^2 + 16.8^2 - 2(15)(16.8)\cos 129.68^\circ$

Realizando operaciones:

$$a^2 = 225 + 282.24 - 504(-0.6385)$$
$$a^2 = 829.044$$
$$a = \sqrt{829.044}$$
$$a = 28.79 \text{ cm}$$

Como verás ahora, con los datos que adquirimos es más fácil utilizar la ley de senos, porque ya conocemos los lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, entonces:

$$\frac{senA}{a} = \frac{senC}{c}$$

Sustituyendo y despejando, tendremos:

$$\frac{sen129.68^\circ}{28.79 \text{ cm}} = \frac{senC}{16.8 \text{ cm}}$$
$$senC = \frac{(16.8 \text{ cm})(sen129.68^\circ)}{28.79 \text{ cm}}$$
$$senC = \frac{(16.8 \text{ cm})(0.769622)}{28.79 \text{ cm}}$$
$$senC = 0.4491024$$
$$C = \sin^{-1}(0.4491024)$$
$$C = 26.686^\circ$$

Como ya conocemos dos ángulos, que son el ángulo A y el ángulo C, aplicamos el principio sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo que dice: la suma de los ángulos internos de un triángulo suma 180º.

Por lo tanto, si $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ$, *despejando* $\measuredangle B$, *tendremos que:*

Sustituyendo valores: $\measuredangle B = 180^\circ - \measuredangle A - \measuredangle C$, $\measuredangle B = 180^\circ - 129.68^\circ - 26.686^\circ$

$\measuredangle B = 23.634^\circ$

Veamos otro ejemplo:

Doña Martha tiene un terreno donde planea construir su casa y hacer una huerta en la parte trasera, pero no sabe qué superficie tiene el terreno, ni para la casa ni para la huerta, por lo que tenemos que ayudarla. El terreno es como la figura 8.19 que puedes ver a continuación, con las dimensiones que aparecen. ¿Cuánto tiene de superficie?

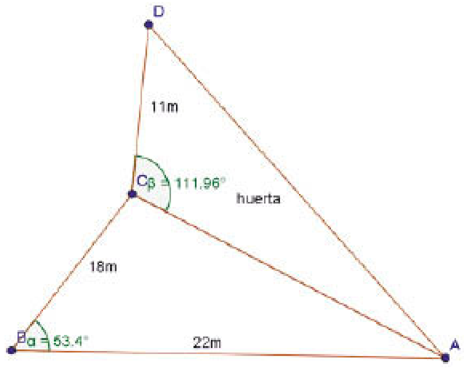


Figura 8.19.

Solución:

Para poder calcular el área de la huerta nos faltan datos, ¿ya viste?, pero para el terreno de su casa, sí podemos calcular los lados aplicando la ley de cosenos, porque tenemos la dimensión de dos lados y el ángulo que forman entre ellos. De tal manera que para conocer el lado AC:

$$\overline{(CA)}^2 = (\overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{BC})^2 - 2(\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{BC})\cos B$$

Como los lados: $\overrightarrow{AB} = 22\ m\ ; \overrightarrow{BC} = 18\ m$ *y el ángulo* $\alpha = 53.4°$

Sustituyendo valores y realizando operaciones, tendremos:

$$(\overrightarrow{CA})^2 = (22\ m)^2 + (18\ m)^2 - 2(22\ m)(18\ m)\cos 53.4°$$
$$(\overrightarrow{CA})^2 = \left(484\ m^2 + 324\ m^2\right) - (792)(0.596225)$$
$$(\overrightarrow{CA})^2 = 808\ m^2 - 412.21\ m^2$$
$$(\overrightarrow{CA})^2 = 395.79\ m^2$$
$$\overrightarrow{CA} = \sqrt{395.79\ m^2}$$
$$\overrightarrow{CA} = 19.8945\ m$$

Continúa...

Ahora, como ya conocemos el lado CA, podemos calcular el lado DA, aplicando la misma ley de cosenos:

$$Si\ CD = 11\ m,\ CA = 19.8945\ m\ y\ el\ ángulo\ \beta = 116.96^{o}.$$

Aplicamos que:

$$(\overrightarrow{DA})^2 = (\overrightarrow{CD})^2 + (\overrightarrow{AC})^2 - 2(\overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AC})\cos\beta$$

Sustituimos y realizamos operaciones:

$$(\overrightarrow{DA})^2 = (11\ m)^2 + (19.8945\ m)^2 - 2(11\ m)(19.8945\ m)\cos 116.96^{\circ}$$
$$(\overrightarrow{DA})^2 = 121\ m^2 + 395.79\ m^2 - (437.679)(-0.45337)$$
$$(\overrightarrow{DA})^2 = 516.79 + 198.43$$
$$(\overrightarrow{DA})^2 = 715.22\ m^2$$
$$\overrightarrow{DA} = \sqrt{715.22\ m^2}$$
$$\overrightarrow{DA} = 22.74\ m$$

Ahora ya tenemos las dimensiones de los lados de la figura, tanto del triángulo de la casa como del triángulo de la huerta, por lo que calcularemos el área de cada una. Para lograrlo, vamos a trazar la altura del terreno de la casa y calculamos su dimensión, aplicando la solución de triángulos rectángulos, como el que se muestra en la figura 8.20.

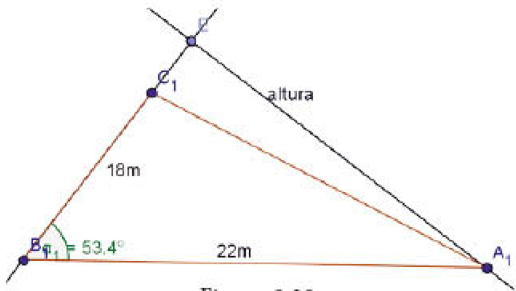


Figura 8.20.

Aplicamos que: $$sen\, 53.4^{\circ} = \frac{h}{22\ m}$$

Despejando h, tendremos:

$$h = (22\ m)(sen 53.4^{o})$$
$$h = (22\ m)(0.802817)$$
$$h = 17.66\ m$$

Ahora, como ya conocemos la altura del triángulo ABC, podemos calcular el área del mismo, aplicando la fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Continúa...

Sustituimos valores y resolveremos:

$$A=\frac{(18\ m)(17.66\ m)}{2}$$
$$A=\frac{317.88\ m^2}{2}$$
$$A=158.94\ m^2$$

Ahora vamos a hacer lo mismo con el triángulo DCA. Trazamos la altura del triángulo de la figura 8.21, y queda así:

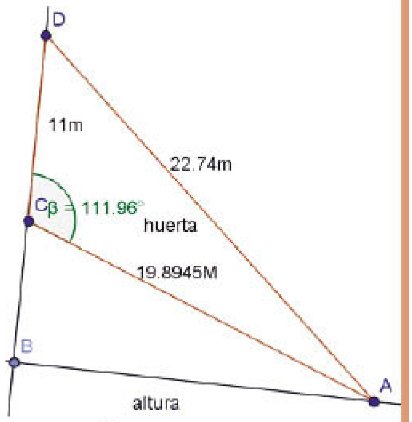


Figura 8.21.

Por la ley de senos nos conviene calcular el ángulo D, para que, aplicando la solución de triángulos rectángulos, calculemos la altura y después el área.
¡Bueno! Vamos a calcular el ángulo D, por la proporción:

$$\frac{sen\beta}{\overrightarrow{DA}}=\frac{senD}{\overrightarrow{CA}}$$

Entonces, como $\beta=111.96°$, *el lado* $DA=22.74\ m$ *y el lado* $CA=19.8945\ m$

Si, $\frac{sen\beta}{\overrightarrow{DA}}=\frac{senD}{\overrightarrow{CA}}$ *sustituimos valores y resolvemos:*

$$\frac{sen111.96°}{22.74\ m}=\frac{senD}{19.8945\ m}$$
$$senD=\frac{(19.8945\ m)(sen111.96°)}{22.74\ m}$$
$$senD=\frac{(19.8945\ m)(0.927445)}{22.74\ m}$$
$$senD=\frac{18.451\ m}{22.74\ m}$$
$$senD=0.811392$$
$$D=sin^{-1}(0.811392)$$
$$D=54.23^{\circ}$$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Observa la figura 8.22 y las figuras 8.23, 8.24, 8.25, 8.26, 8.27, 8.28 y 8.29 de los ejercicios siguientes. Reflexiona sobre cómo realizarás cada uno de los procedimiento y haz tus anotaciones en tu libreta o cuaderno. Al concluir, compara los resultados con los de tus compañeros. Muestra una actitud de tolerancia y respeto al escuchar las opiniones de los demás.

Ejercicios:

Figura 8.22.

1. Juan tiene que atravesar este río y no sabe por dónde hacerlo. Sus únicas opciones son cruzar de A a C o de B a C, porque es la parte menos honda del río. La única información que tiene es que de A a B hay 50 metros de distancia, el ángulo que pudo medir con su transportador portátil fue del ángulo A que midió 60º y del ángulo B que midió 80º. Ayúdalo a determinar qué distancia es menor si de A a C o de B a C.

2. Las diagonales de un paralelogramo miden 30 y 40 cm, respectivamente; si se intersecan en un ángulo de 30º, calcula la medida de los lados paralelos.

3. Calcula el perímetro de un terreno de forma triangular si uno de sus lados mide 65 m, otro mide 35% más que éste y entre los dos hay un ángulo de 56.28º. ¿Cuánto mide el tercer lado?

4. El piloto de un avión observa en el **radar** que el aeropuerto en el que tiene que aterrizar se encuentra a 16º. En un momento determinado observa el radar y sigue volando en la misma dirección durante 400 km; después vuelve a observar el radar y ve ahora que está a 26º. ¿Qué distancia le separa del aeropuerto? (Ver la figura 8.23).

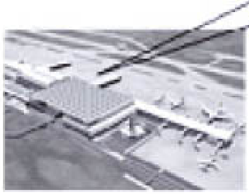



Figura 8.23.

Radar: sistema que usa ondas electromagnéticas para medir distancias, altitudes, direcciones y velocidades de objetos estáticos o móviles como aeronaves, barcos, vehículos motorizados, formaciones meteorológicas.

5. Observa las figuras 8.24, 8.25, 8.26, 8.27, 8.28 y 8.29 enseguida calcula las dimensiones de los siguientes triángulos y sus áreas correspondientes.

a)

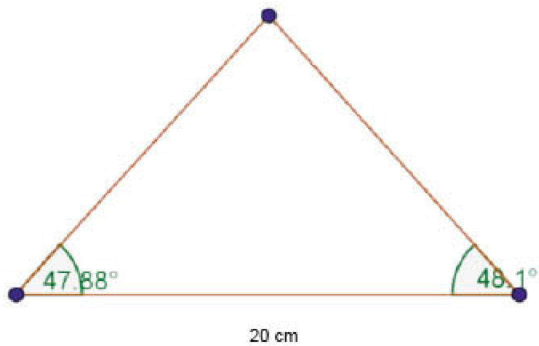


Figura 8.24.

b)

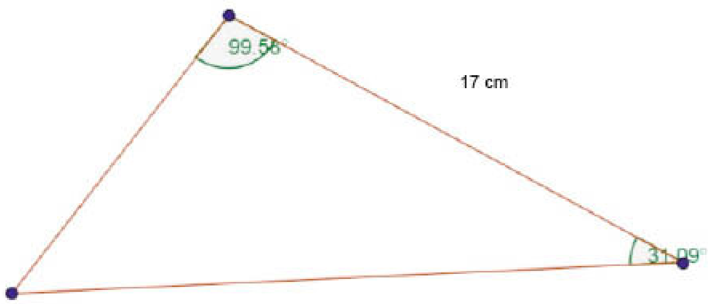


Figura 8.25.

c)

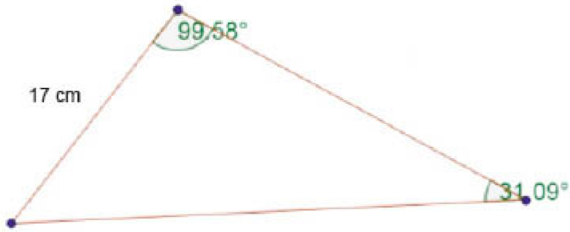


Figura 8.26.

d)

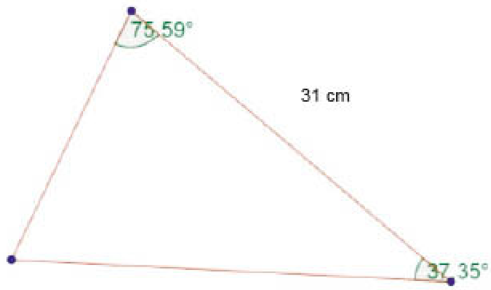


Figura 8.27.

e)

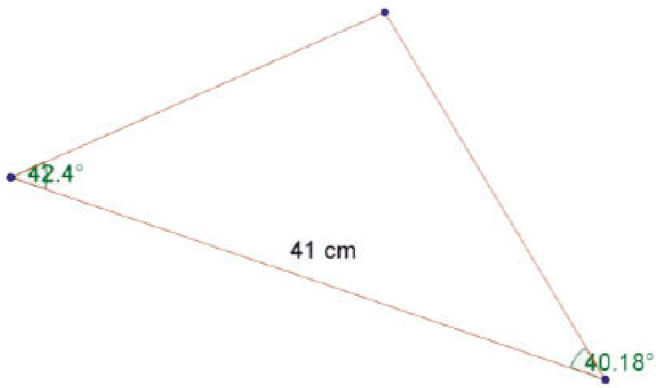


Figura 8.28.

f)

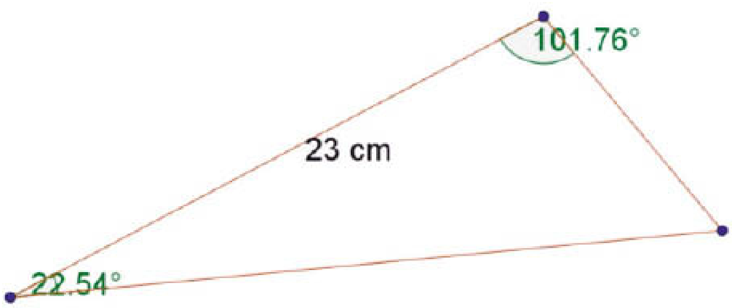


Figura 8.29.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Es posible explicar situaciones de nuestro entorno utilizando los triángulos oblicuángulos? Explica breve y claramente.

Explica una situación de la vida real en la que consideres útil el uso de los triángulos oblicuángulos.

Aprende más

Solución de triángulos oblicuángulos mediante la ley de cosenos cuando se conocen los tres lados

Ahora aplicaremos la solución de triángulos oblicuángulos, considerando la ley de cosenos, pero cuando la información que tenemos es la magnitud de los tres lados del triángulo.

Para ello trabajaremos con las fórmulas de la **ley de los cosenos** que mencionamos a continuación:

$$A = cos^{-1}(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})$$

$$B = cos^{-1}(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac})$$

$$C = cos^{-1}(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab})$$

Desde luego que si observamos bien, para aplicar estas fórmulas tenemos que conocer la dimensión de cada uno de los lados del triángulo.

Ejemplo 1: Apliquemos las fórmulas en el triángulo de la figura 8.30.

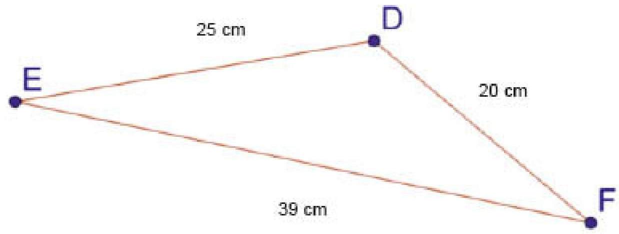


Figura 8.30

Solución:

Como conocemos la dimensión de los tres lados, aplicando la ley de cosenos podemos conocer la magnitud de cualquiera de los ángulos internos, aplicando:

$$A = cos^{-1}(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})$$

$$B = cos^{-1}(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac})$$

$$C = cos^{-1}(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab})$$

Continúa...

Comenzaremos por el ángulo F.

Sustituimos valores y realizamos operaciones:

$$
\begin{aligned}
\cos F &= \frac{20^2 + 39^2 - 25^2}{2 \cdot 20 \cdot 39} \\
\cos F &= \frac{400 + 1521 - 625}{1560} \\
\cos F &= 0.83077 \\
\measuredangle F &= \cos^{-1}(0.83077) \\
\measuredangle F &= 33.822^{\circ}
\end{aligned}
$$

Ahora calcularemos el ángulo D.

Sustituimos valores y realizamos operaciones:

$$
\begin{aligned}
D &= \cos^{-1} \frac{25^2 + 20^2 - 39^2}{2 \cdot 25 \cdot 20} \\
D &= \cos^{-1} \frac{225 + 400 - 1521}{1000} \\
D &= \cos^{-1} \frac{-496}{1000} \\
D &= \cos^{-1}(-0.496) \\
D &= 119.736^{\circ}
\end{aligned}
$$

Por último calculamos el ángulo E.

Sustituimos valores y realizamos operaciones:

$$
\begin{aligned}
\cos E &= \frac{39^2 + 25^2 - 20^2}{2 \cdot 39 \cdot 25} \\
\cos E &= \frac{1521 + 625 - 400}{1950} \\
\cos E &= \frac{1746}{1950} \\
\cos E &= 0.89538 \\
E &= \cos^{-1}(0.89538) \\
E &= 26.442^{\circ}
\end{aligned}
$$

Aplicando el principio de los ángulos internos de un triángulo, pudimos comprobar que: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle c = 180°$. Por lo tanto: $\measuredangle E + \measuredangle D + \measuredangle F = 180°$.

Sustituimos: *26.442° + 119.736° + 33.822 = 180°*

Ejemplo 2: Carlos acaba de heredar de su abuelo un terreno, pero no sabe cuántos metros cuadrados tiene de superficie, solo sabe las dimensiones del terreno. Quiere saber para qué le alcanza, si para construir una casa o un establo. El terreno tiene la forma de la figura 8.31.

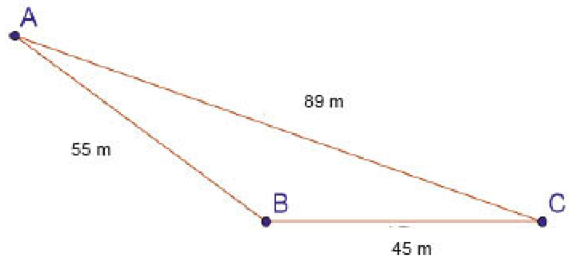


Figura 8.31.

Solución:

Para determinar el área, una alternativa es conocer al menos un ángulo y después calcular la altura del triángulo; con las propiedades del triángulo rectángulo y la fórmula para el área del mismo, darle la respuesta. ¿Qué te parece si calculamos el ángulo "C"?

Como conocemos la dimensión de los lados vamos a aplicar la fórmula:

$$\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Sustituimos valores, porque $a = 45\ m,\ b = 89\ m\ y\ c = 55\ m.$

Ahora, trazamos la altura del triángulo que se muestra en la figura 28 y calculamos su longitud, aplicando las propiedades del triángulo rectángulo.

$$\measuredangle C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$
$$\measuredangle C = \cos^{-1}\frac{(45\ m)^2 + (89\ m)^2 - (55\ m)^2}{2 \cdot 45\ m \cdot 89\ m}$$
$$\measuredangle C = \cos^{-1}\frac{2025\ m^2 + 7921\ m^2 - 3025\ m^2}{8010\ m^2}$$
$$\measuredangle C = \cos^{-1}\frac{6921\ m^2}{8010\ m^2}$$
$$\measuredangle C = \cos^{-1} 0.864$$
$$\measuredangle C = 30.2261714°$$

Continúa...

Ahora, trazamos la altura del triángulo que se muestra en la figura 8.32 y calculamos su longitud, aplicando las propiedades del triángulo rectángulo.

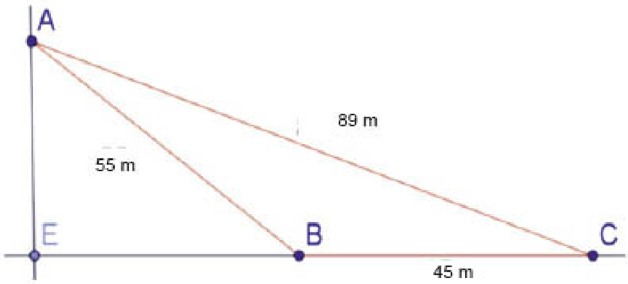


Figura 8.32.

Aplicando la función:

$$senC = \frac{c}{b}$$

Porque c es el cateto opuesto del ángulo C y b es la hipotenusa, sustituimos valores y resolvemos:

$$senC = \frac{h}{b}, despejando$$
$$h = b \cdot senC$$
$$h = (89\ m)(sen30.2261714°)$$
$$h = (89\ m)(0.503415)$$
$$h = 44.8\ m$$

Ahora, aplicando la fórmula para calcular el área del triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Donde: b = 45 m y h = 44.8 m

Sustituimos y realizamos operaciones:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A = \frac{(45\ m)(44.8\ m)}{2}$$
$$A = \frac{2016\ m^2}{2}$$
$$A = 1008\ m^2$$

***Resultado:** Carlos tiene un terreno de 1008 m^2 de superficie.*

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Instrucciones: Observa las figuras 8.33, 8.34 y 8.35 y determina el valor de los ángulos interiores del triángulo oblicuángulo y el área. Realiza los procedimientos con orden y limpieza, que demuestren las evidencias de procesos de solución. Esta actividad la trabajarás de forma individual y en tu libreta o cuaderno.

a)

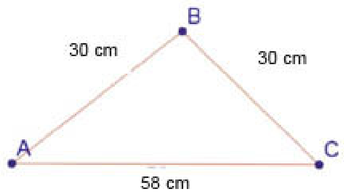


Figura 8.33.

b)

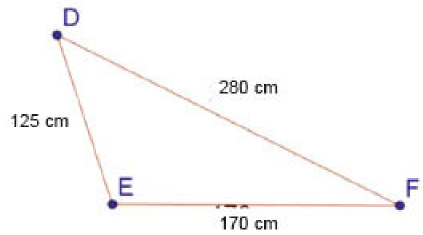


Figura 8.34.

c)

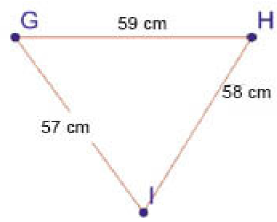


Figura 31

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Los procedimientos y operaciones para llegar a la solución de estos ejercicios formarán parte de tu problemario.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

En un choque de autos, en ocasiones se puede apreciar que debido al impacto que se da entre ellos se desplazan a una distancia alejada al punto donde se suscitó el choque, generando una separación entre ellos. ¿Cómo podrías explicar la aplicación de las leyes del seno y coseno para obtener la distancia resultante entre los dos vehículos al final del choque? Explica breve y claramente. ....

....

....

Actividad 5

Producto de aprendizaje: construcción de una maqueta: determinación de la distancia entre dos barcos por el vigía del faro

Instrucciones: Los faros marítimos son puntos estratégicos en las costas de los océanos y mares. Tienen la tarea de prevenir accidentes con los barcos, por una parte para que no choquen contra los arrecifes y, por otra para, que no choquen entre ellos por las noches.

En equipos de tres estudiantes construyan una maqueta en donde representen un faro (punto de observación del vigía), el mar, así como la posición relativa de dos barcos. Demuestren cómo el vigía puede determinar la distancia entre los barcos aplicando la ley de senos o cosenos. Determinen la distancia a cada uno de ellos y el ángulo de separación entre los barcos desde el faro. Finalmente, escriban en media hoja una reflexión con sus propias palabras sobre la importancia de usar la ley de los senos o cosenos en el contexto laboral. Cuiden que sus ideas sean coherentes y escriban sin errores ortográficos. Incluyan sus nombres, asignatura y fecha de entrega. Organicen en el salón de clases una exposición de las maquetas explicando su procedimiento.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje construcción de una maqueta

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Información	Representación gráfica de la posición relativa de los barcos.			
	Muestra el dato de las distancias entre los barcos.			
	Procedimientos de la aplicación de la ley de senos o cosenos.			
	Determina el ángulo de la separación entre los barcos desde el faro.			
Presentación	Datos del estudiante, asignatura, semestre, fecha.			
	Creatividad en la construcción de la maqueta.			
	Construcción de las piezas sin error.			
Reflexión personal	De forma precisa y coherente.			
Diseño de las piezas	Trazos bien alineados de las figuras.			
	Medias de las figuras proporcionales.			
Actitud	En la construcción de la maqueta mostró respeto y tolerancia al recibir opiniones.			
Total de puntos		12		

Si en la lista de cotejo lograste **12 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 11 puntos** es **Bien**, **8 a 6 puntos** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto final problemario

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Presenta carátula con los datos de nombre de la escuela, nombre del estudiante, nombre de la asignatura, nombre del bloque, título del problemario, semestre, grupo, fecha.			
	Ejercicios de las 4 actividades con orden y limpieza.			
	El planteamiento de la actividad con tinta. Proceso de solución con lápiz.			
	Presenta índice.			
Procedimientos	Mantiene secuencia lógica.			
	Unidades de medida pertinentes.			
Solución	Resultados correctos del problema marcados con tinta.			
Actitud	En el desarrollo de los ejercicios mostró autonomía para aprender.			
	En la convivencia con sus compañeros mostró respeto y tolerancia, en la clase.			
Total de puntos		9		

Si en la lista de cotejo lograste **9 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **8 puntos** es **Bien**, de **6 a 7 puntos** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de **6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque VIII

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.	
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	
	Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.	
	Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.	
	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida	Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque IX

Aplicas la Estadística elemental

Introducción

Después de analizar herramientas que se obtienen con el estudio de las propiedades de los polígonos y de los ángulos en los triángulos, pasemos a considerar otra rama de las Matemáticas que es de utilidad en diferentes campos de la tecnología, la política, la medicina, la ingeniería entre otros.

Nos referimos al estudio de la **Estadística,** que es un método científico que va más allá de la mera descripción, porque nos permite deducir leyes y tendencias de fenómenos. Conforme avancemos en el bloque, observarás la gran variedad de aplicaciones de este método y te darás cuenta de que la Estadística no es solamente la acumulación de hechos, datos y cifras; sino que ofrece importantes herramientas para la toma de decisiones en nuestra vida cotidiana.

La estadística es la asignatura del programa que favorece el desarrollo de múltiples competencias que te impulsarán a ser cooperativo, tolerante y solidario en la recolección de datos; así como también te permite ser analítico, informado y responsable en el manejo de los mismos de tal manera que desarrolles un juicio crítico mediante la realización de estimaciones para la toma de decisiones; la participación y colaboración en la solución a problemas de tu entorno, fomentando relaciones interpersonales y favoreciendo tu formación. Este conocimiento permite continuidad a los temas abordados en los cursos anteriores de álgebra, geometría y trigonometría; y la base para asignaturas como Ecología y Biología.

Los temas que se desarrollarán en este bloque serán sobre la estadística descriptiva y se relacionan con todas las asignaturas del Bachillerato por ser una herramienta que nos permite indagar datos en distintas áreas del conocimiento.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	• *Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* • *Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.*

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.	• *Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.*

Competencias disciplinares
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. • Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. • Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. • Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. • Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. • Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia. • Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Construyes e interpretas modelos que representen fenómenos o experimentos de manera estadística, aplicando las medidas de tendencia central y de dispersión en datos agrupados y no agrupados de una población y muestra de algún aspecto de tu entorno.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	1. Población 2. Muestra 3. Medidas de tendencia central: para datos no agrupados y agrupados. 4. Medidas de dispersión: para datos no agrupados y agrupados.	Búsqueda de conceptos en textos. Descripción de características sobre las medidas de tendencia y dispersión.

Procedimentales	Identifica el significado de población y muestra. Reconoce medidas de tendencia central y de dispersión Aplica las medidas de tendencia central y de dispersión.	Realización de estadísticas siguiendo un modelo. Elaboración de gráficas a partir de un modelo. Elaboración de un proyecto contextualizado.
Actitudinales	Autonomía para el trabajo, manteniendo el respeto, tolerancia y autenticidad	Disposición para aprender de forma autónoma. Convivencia en su entorno mostrando respeto y tolerancia.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 8 horas para el desarrollo de este bloque, lo más recomendable es que utilices 4 horas para revisar los contenidos temáticos y 4 horas para llevar a cabo las actividades que se presentan y las evaluaciones propuestas.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Portafolio de evidencias
- Estudio estadístico descriptivo

El **portafolio de evidencias** es un conjunto de pruebas recolectadas a lo largo del período a evaluar. Lo puedes hacer en una libreta o en un cuaderno que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones las cuales te permitan llegar a soluciones de los problemas presentados en las actividades de este bloque. Los trabajos deben mostrar orden y limpieza. Además debe incluir una portada con tus datos (nombre de la escuela, título “Portafolio de evidencias”, nombre del estudiante y fecha de entrega) y un índice.

Estos productos serán evaluados con los instrumentos mostrados al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

Para dar inicio al estudio de la estadística, lee con atención el siguiente párrafo del artículo "Redes sociales de internet y adolescentes" y posteriormente responde a las siguientes preguntas.

*Las **redes sociales** permiten al usuario generar un perfil con sus datos, y para ello ofrece un formulario animando a completar el mayor número de datos posibles: nombre, edad, sexo, foto, aficiones y gustos, formación académica, profesión e incluso orientación sexual, de modo que toda ésta información se hace pública. Al menos el 40% de los usuarios de redes sociales tiene abierto el acceso a su perfil a todo el que pase por ellas, sin restricción alguna de privacidad. Entre los menores de 18 años, este porcentaje se eleva al 77%, según un estudio reciente de la AEPD y el Instituto de Tecnologías de la Comunicación.*

1. ¿De qué tema trata el párrafo?

....

2. ¿Qué procedimiento crees que se haya realizado para obtener estos datos?

....

....

3. ¿Cómo representan las cantidades de la población que se está estudiando?

....

....

Redes sociales: servicios prestados a través de Internet que permiten a los usuarios generar un perfil público, en el que plasman datos personales e información de uno mismo.

¿Con qué conocimientos cuentas?

Para abordar los temas de este bloque es necesario que recuperes tus conocimientos previos.

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: De forma individual resuelve los siguientes ejercicios, anotando en tu libreta los procedimientos con orden y limpieza.

1. Un agricultor vendió 5.7 toneladas de maíz y otras toneladas de cebada, obteniendo por las toneladas de maíz \$2300.00, por la cebada el obtuvo \$4200. Sabiendo que por una tonelada de cebada le pagarían \$1400.00 ¿Cuánto le pagaron por la tonelada de maíz? ¿Cuántas toneladas vendió de cebada?

2. Calcular el valor de "x" en esta ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$

3. Calcula los siguientes porcentajes de semillas:

   93% de 50 kg frijol vendido equivale a ....

   25% de 70 kg de cebada a vender equivale a ....

4. Iván y Samantha necesitan determinar las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 1 = 4x^2 - 3$. Ayúdales.

Al concluir verifica tus respuestas en el anexo. Si de la actividad anterior respondiste correctamente de **4 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, **3** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 3** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: **operaciones aritméticas, ecuaciones y relaciones entre dos cantidades.**

Aprende más

Población y muestra

En los bloques anteriores has adquirido conocimientos sobre Geometría, que te ayudarán para abordar otra área de las Matemáticas que también implica hacer mediciones, pero ahora de poblaciones, y toda la información que se obtenga se estudia a partir de métodos estadísticos.

Población

Una **población**, estadísticamente hablando, es el conjunto de todos los elementos para los cuales se desea conocer algo. Una población pueden ser todos los árboles de un bosque, todos los estudiantes de una escuela, todos los sobres de café producidos durante un día por una empacadora, todos los electores que tienen derecho a participar en la elección de gobernantes en un estado, etcétera. Existen **dos tipos de población:** la **finita** y la **infinita**.

Población finita: conjunto compuesto por una cantidad limitada de elementos.

Población infinita: característica de los sujetos de la población que puede tomar cualquiera de los valores de un conjunto y que se evalúa por medio de una muestra.

Un ejemplo de **población finita** es el de tu grupo, pues el número de alumnos en él se define por medio de un entero, por ejemplo 30. O bien, el número de caballos de un rancho, como se muestra en la figura 9.1.

Figura 9.1.

Una **población infinita**, por ejemplo, es el número de bacterias que existen en todos los seres vivos. Resulta imposible contar todas las bacterias por la gran diversidad de lugares donde se albergan. Tan sólo en tu boca se alojan más de mil millones de bacterias.

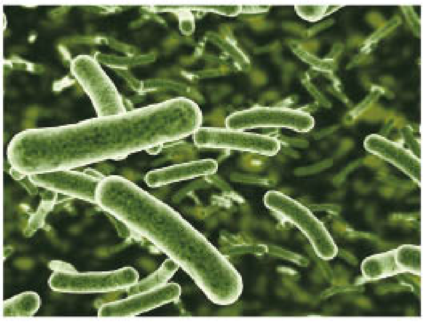


Figura 9.2.

Muestra

Para que una muestra sea representativa de la población es necesario que sus elementos sean seleccionados **aleatoriamente**; es decir, al **azar**, sin escoger en especial a unos o a otros.

Envasadora: lugar donde aplican el método de envasado para conservar alimentos o alguna otra sustancia.

Por medio del muestreo, por ejemplo, es posible calificar la calidad de la producción en una **envasadora** de café, conocer el nivel de habilidades matemáticas de los jóvenes de México en evaluaciones internacionales, estimar la preferencia de los electores por un candidato a un puesto de gobierno, saber la respuesta del mercado a un nuevo producto, etc. En las **muestras** de población se definen **variables** a estudiar, como por ejemplo, en una muestra de un grupo de personas, la variable puede ser el sexo (hombres-mujeres) o también la edad cronológica; también el lugar donde nacieron. En una muestra de animales mamíferos, una variable a estudiar puede ser la edad y, tres posibles valores de ella: cachorros, adultos y viejos.

Muestra: subgrupo de la población.

Variable: característica de los sujetos de la población que puede tomar cualquiera de los valores de un conjunto y que se evalúa por medio de una muestra.

Por lo tanto, llamamos **variable** a la medición de la o las características que varían de sujeto a sujeto. Cada sujeto tiene un valor para cada variable. Si hacemos una definición de variables incorrecta o medimos mal, todo nuestro estudio estadístico estará mal. Los métodos estadísticos que usamos dependen del tipo de variable.

Las **variables cuantitativas** se identifican porque se puede expresar su valor a través de números. Ejemplos de este tipo de variable son: la edad, estatura, calificaciones, etc.

Ejemplo:

Población	Característica a estudiar o variable cuantitativa	Valores posibles
Edificios educativos de zonas urbanas de México	Tamaño (en metros cuadrados construidos)	600 metros cuadrados 200 metros cuadrados 10,000 metros cuadrados
Caballos de la región sur de México	Masa	de 300 a 350 kg de 351 a 400 kg de 401 a 450 kg

Para las **variables cualitativas**, la escala de valores es nominal y son categorías. En los estudios estadísticos de las variables se busca, en primer término, describir los datos y después se realizan análisis estadísticos para relacionar las variables. Es decir, se aplica una estadística descriptiva para cada una de las variables de estudio.

Ejemplo:

Población	Característica a estudiar o variable cualitativa	Valores posibles
Personas	Carácter	Alegres Enojados Tristes
Estudiantes de bachillerato	Rendimiento escolar	Alto Medio Bajo

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Reflexiona sobre cuáles pueden ser las variables (dos cuantitativas y dos cualitativas) de la población que se indica en la tabla, y regístralas en las columnas. Al terminar, preséntalas a tus compañeros de clase. Recuerda mostrar respeto y tolerancia al escuchar las opiniones de los demás.

1. Complementa la tabla.

Población	Característica o variable a estudiar	Variables posibles
Personas mexicanas		

2. De las variables que colocaste en la tabla anterior, clasifícalas en la siguiente tabla.

Variables cuantitativas	Variables cualitativas

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Concepto de Estadística

Cuando en nuestro estudio nos interesa describir situaciones, fenómenos, contextos y eventos, definimos variables cuantitativas y buscaremos detallar cómo se manifiestan, es decir, estaremos realizando estudios descriptivos porque se tratará de especificar propiedades, características y rasgos importantes de la población o grupo de estudio. Este tipo de estudios pertenece al área de la **Estadística**.

Estadística: conjunto de procedimientos que sirven para organizar y resumir datos, hacer inferencias a partir de ellos y transmitir los resultados de forma clara, concisa y significativa.

Estadística descriptiva

La **Estadística descriptiva** tiene como finalidad principal la de describir apropiadamente las diversas características de los elementos de una población y/o muestra, a partir de observaciones o registros, que permitan tomar medidas que ayuden a mejorar dicha población. De este modo, si observamos el desempeño académico de los alumnos de un grupo, es posible saber qué actividades propician que dicho desempeño mejore. Asimismo, un adecuado registro de las lluvias en una región del país puede ayudar en un adecuado pronóstico del tiempo que, a su vez, ayude a programar adecuadamente las épocas de siembra y cosecha o a invertir eficientemente recursos del estado para ayudar a los campesinos.

Figura 9.3.

Estadística descriptiva: conjunto de procedimientos que sirven para colectar, organizar y representar datos con el fin de describir apropiadamente sus características.

Una vez que se selecciona la población o la muestra a medir iniciamos con nuestras etapas para realizar un estudio descriptivo.

ETAPA 1

Recolectar datos. Requiere que elabores un plan del procedimiento que te permita reunir datos con un determinado propósito. Tienes que buscar en fuentes bibliográficas un fundamento teórico; posteriormente elaboras un instrumento, que pueden ser cuestionarios, encuestas, guiones de entrevista, pruebas estandarizadas, copia de archivos, investigación en departamentos estadísticos, etc.

ETAPA 2

Ordenamiento de información. Una vez que se aplica el instrumento, se procede a organizar la información obtenida. Para ello, se elabora una tabla de distribución, en la que se escriben los resultados de cada una de las variables medidas en el instrumento. En seguida se cuenta el número de veces en que aparece una determinada respuesta y se registra en tabla de **frecuencia.**

Frecuencia: cantidad de veces que se repite un determinado valor de la variable.

Ejemplo:

Muestra: número de días en que ha llovido en el mes de julio.

Tabla de respuestas	
Encuestados	**Número de días**
1	3
2	2
3	3
4	1

Tabla de frecuencias	
Número de días	**Frecuencia**
1	1
2	1
3	2

La **ETAPA 3** se refiere al tema de medidas de tendencia central que se explica en la siguiente página.

Aprende más

Medidas de tendencia central

En esta **ETAPA 3** se realiza la observación de parámetros descriptivos y se calculan medidas de tendencia central y dispersión.

Hay tres tipos de medidas de tendencia central, que son: la **media**, la **mediana** y la **moda**.

Media: promedio aritmético de una distribución. Esta medida es más utilizada.

Mediana: valor que divide la distribución por la mitad.

Moda: categoría o puntuación que se presenta con mayor frecuencia.

Ejemplo: Tenemos una población de 2066 personas que llegan a la ciudad del Distrito Federal para buscar trabajo, y queremos saber cuál es su tierra de origen para reconocer de qué estado llegan más personas a trabajar al DF. La **variable** de este estudio es: **lugar de origen.**

Paso 1. Recolección de datos. Para ello se aplicará un cuestionario en donde se les hará la pregunta: ¿En dónde nacieron?

Paso 2. Ordenamiento y clasificación de la información obtenida. Al haber aplicado el instrumento, se continúa con el registro de las respuestas y posteriormente se llegan a ordenar y clasificar. Continuando con el ejemplo del estudio de la variable "lugar de origen", este segundo paso consiste en realizar un registro de las respuestas obtenidas. Esto consiste en haber anotado cada respuesta que dio un encuestado a la pregunta ¿en dónde nacieron? De tal forma que se presentó la frecuencia de la respuesta como se indica en la siguiente tabla.

La variable es: **lugar de origen**	
Estados	**Frecuencias (número de respuesta)**
Guerrero	432
San Luis Potosí	176
Puebla	85
Nayarit	365
Guanajuato	784
Veracruz	112
Durango	112
TOTAL	**2066 personas**

Paso 3. Obtención de parámetros descriptivos. Para obtener el resultado de la **moda**, observa las cantidades de la tabla de frecuencias y selecciona la de mayor frecuencia. De este estudio estadístico la **moda** es: 784 personas

Para calcular la **mediana** se selecciona la frecuencia que se ubica en el punto medio de la distribución de frecuencias después de ordenarlas de manera ascendente o descendente. De acuerdo al número de datos si es par o impar, se calcula de la siguiente manera:

Impar: $\frac{N+1}{2}$ **N** es la cantidad de cifras de la distribución de frecuencias.

Par: $\frac{X_{\frac{N}{2}} + X_{\frac{N}{2}+1}}{2}$

$X_{\frac{N}{2}}$ es el valorque se toma de la posición de dividir *N / 2.*

$X_{\frac{N}{2}+1}$ es el valorque se toma de la posición de dividir (*N / 2)* + *1.*

En nuestra tabla tenemos 7 datos, los cuales ordenamos de forma ascendente: 784, 432, 365, 176, 112, 112, 85. Por tener un número impar de datos, se calcula de la forma siguiente:

$$\frac{7+1}{2} = 4$$

La **mediana** es: 176 personas

La **media** de nuestra distribución de frecuencias es: 295.14

La media se simboliza como $\bar{X}$ y es la suma de todos los valores divida entre el número de casos. Entonces para nuestro estudio será:

$$432 + 176 + 85 + 365 + 784 + 112 + 112 = 2066$$
$$2066 / 7 = 295.14$$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Resuelve el problema siguiente, realizando en tu libreta los procedimientos con orden y limpieza. Al finalizar, presenta tus resultados con tus compañeros mostrando respeto y tolerancia para escuchar las opiniones de ellos.

Problema. Un grupo de alumnos de bachillerato aplicó una encuesta a 30 familias de una comunidad sobre la duración de paquetes de leche en polvo. La información que obtuvieron fue la siguiente

- 7 familias dijeron que les duraban 23 días
- 8 dijeron 30 días
- 5 dijeron 37 días
- 2 dijeron 51 días
- 3 dijeron 58 días, y
- Una familia dijo que le duró 62 o más días.

1. ¿Cómo ordenarías esta información en una tabla de distribución?

2. Con los datos ordenados en la tabla que hayas elaborado, aplica las medidas de tendencia central y responde: ¿cuánto duran en promedio los paquetes?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad
¿De qué te das cuenta?

Si tuvieras que hacer un estudio descriptivo con una muestra de población infantil de tu comunidad, ¿por qué hay que definir variables? Y ¿Por qué se tienen que utilizar medidas de tendencia central? Explica breve y claramente.

....

....

....

....

Aprende más

Medidas de dispersión (variación)

A las **medidas de dispersión** también se llama **medidas de variabilidad**, porque nos señalan la variabilidad de una distribución y están indicadas por medio de un número. Este tipo de medidas nos muestran la información de la muestra o serie de datos, indicándonos sobre la magnitud del alejamiento de la distribución de datos en relación a un valor central. Estas medidas son: **rango**, **desviación típica** y **varianza**.

Rango: diferencia entre el máximo y mínimo valor de una serie de datos y nos da una vaga referencia a la posible dispersión que se puede tener de los datos.

Desviación típica: número que nos dice cuán alejados están los datos del valor o posición previamente obtenidos.

Varianza: medida de los valores alrededor de la media.

El **rango** lo podemos entender como la amplitud existente entre una serie de datos, es decir, mide cuán lejos está el valor más pequeño y el valor más grande de la muestra o población. La fórmula que se utiliza es:

Dato más grande o el mayor - Dato más pequeño o menor

$$(X_2 - X_1)$$

La **desviación estándar o típica** es la medida de dispersión de mayor utilidad práctica, se representa normalmente por el símbolo σ (sigma) y nos da una idea de la variación de los datos respecto a la media.

La fórmula de desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}}{N}}$$

Con el ejemplo que mencionamos anteriormente, analizaremos la dispersión o variabilidad de los datos obtenidos en la tabla de distribución de frecuencias.

La variable es: **lugar de origen**	
Estados de México	**Frecuencias (número de respuesta)**
Guerrero	432
San Luis Potosí	176
Puebla	85
Nayarit	365
Guanajuato	784
Veracruz	112
Durango	112
TOTAL	**2066 personas**

Para aplicar las medidas de dispersión se utilizarán resultados de las medidas de tendencia central, como se muestra en seguida:

Rango de personas foráneas que llegan al DF:

$$(X_2 - X_1)$$
$$784 - 85 = 699$$

El **rango** de personas foráneas que llegan al DF es de 699 personas de otros estados.

Desviación estándar o típica (σ)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N}}$$

$\sum \rightarrow$ suma

$X \rightarrow$ personas foráneas

$N \rightarrow$ número de datos

$$\sigma = \frac{\sqrt{(432)^2 + (176)^2 + (85)^2 + (365)^2 + (784)^2 + (112)^2 + (112)^2 - (media)^2}}{7}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{997794 - 87107.61}{7}} = \sqrt{130098.05}$$

$$\sigma = 360.69$$

Tenemos que en promedio llegan al DF 295.14 personas de 7 estados a trabajar pero existe una desviación típica y pueden llegar hasta 360.69 personas foráneas a trabajar.

La **varianza** es la medida de dispersión que nos permite identificar la diferencia promedio que existe entre cada uno de los valores respecto a su punto central. Se representa por el símbolo σ^2 (sigma cuadrada).

Varianza

$$\sigma = \frac{(432)^2 + (176)^2 + (85)^2 + (365)^2 + (784)^2 + (112)^2 + (112)^2 - (media)^2}{7}$$

$$\sigma^2 = \frac{997794 - 87107.61}{7}$$

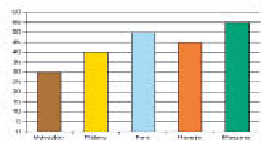
$$\sigma^2 = 130098.05$$

Puede variar el promedio de las personas que llegan a trabajar al DF, es decir, pueden llegar al DF 369.69 personas.

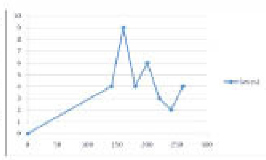
ETAPA 4

Representación gráfica de los datos. Es frecuente usar representaciones visuales complementarias para presentar los resultados de los análisis de la información de los estudios estadísticos, para ello existen diferentes tipos de gráficas:

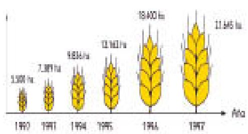
Diagramas de barras. Muestran los valores de las frecuencias absolutas sobre un sistema de ejes cartesianos.



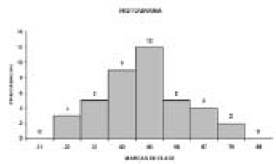
Polígonos de frecuencias. Formados por líneas poligonales abiertas sobre un sistema de ejes cartesianos.



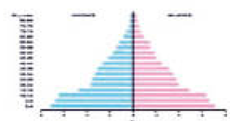
Pictogramas. Son representaciones visuales figurativas. En realidad son diagramas de barras en los que las barras se sustituyen con dibujos alusivos a la variable.



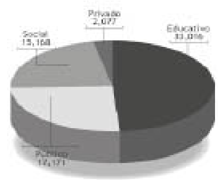
Histogramas. Formas especiales de diagramas de barras para distribuciones cuantitativas continuas.



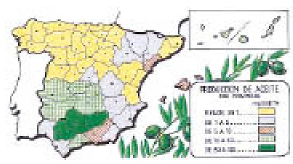
Pirámides de población. Para clasificaciones de grupos de población por sexo y edad.



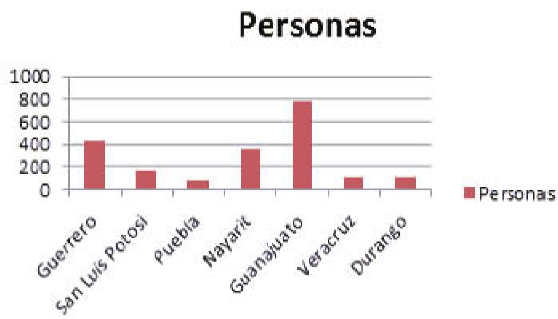
Gráficos de sectores. Circulares o de tarta, dividen un círculo en porciones proporcionales según el valor de las frecuencias relativas.



Cartogramas. Expresiones gráficas a modo de mapa.



Ejemplo:



Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Con los resultados de las medidas de tendencia central de la actividad 2, aplica las medidas de dispersión. Al finalizar, comenta tus resultados con tus compañeros mostrando respeto y tolerancia al escucharlos.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad
¿De qué te das cuenta?

Si realizan un estudio descriptivo con los estudiantes de tu escuela, ¿por qué crees que sea útil aplicar las medidas de dispersión?

....

....

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Producto de aprendizaje: estudio estadístico descriptivo

Instrucciones:

1. Para trabajar en este proyecto debes formar un equipo de tres integrantes y hacer las tareas de forma colaborativa.

2. Realiza un estudio estadístico descriptivo sobre un tema relacionado con los estudiantes de tu escuela, es decir, selecciona el tema.

3. Saca una muestra de tu población total de estudiantes de tu colegio.

4. Define las características o variables de tu población a estudiar.

5. Elabora un instrumento en donde preguntes sobre tu tema y de acuerdo con las variables que definas, registra la información.

6. Ordena y clasifica tu información en una tabla de distribución de frecuencias.

7. Aplica las medidas de tendencia central: moda, mediana y media.

8. Utiliza las medidas de dispersión: rango, desviación típica y varianza.

9. Selecciona el gráfico para representar tu información.

10. Elaborarán un reporte que contenga los registros y resultados de las medidas efectuadas, cuidando la ortografía. En la primera hoja coloca tus datos, como tu nombre, nombre de la asignatura, semestre y fecha de entrega.

11. Redacta una conclusión de su estudio descriptivo.

12. En la realización de la actividad mostrarás una actitud de respeto y tolerancia, al compartir tus ideas y al escuchar los argumentos de tus compañeros. Recuerda que las opiniones de los demás permiten mejorar nuestros trabajos.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: estudio estadístico descriptivo

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Datos del estudiante, asignatura, semestre, fecha de entrega.			
	Limpieza y orden.			
	Ortografía correcta.			
Contenido	Selecciona el tema.			
	Presenta una muestra de la población.			
	Define características y variables.			
	Elabora y aplica instrumento para la recolección de datos.			
	Elabora una tabla de distribución de frecuencias.			
	Presenta procedimientos de las medidas de tendencia central.			
	Presenta procedimientos de las medidas de dispersión.			
	Elabora gráficas para presentar resultados.			
	Elabora un reporte con los registros y resultados de las medidas aplicadas y sin errores ortográficos.			
	Presenta una conclusión de su estudio descriptivo.			
Reflexión personal	Expresa con claridad y dominio el trabajo realizado.			
Actitud	Trabaja colaborativamente y de forma autónoma.			
	Muestra respeto, autenticidad y tolerancia.			
Total de puntos		16		

Si en la lista de cotejo lograste los **16 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **13 a 16 puntos** es Bien, **7 a 12 puntos** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 7** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el producto final portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada con el nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	Entrega la libreta o el cuaderno donde realizó los ejercicios.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden en los procedimientos.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	Ejercicios de la actividad 1.			
	Ejercicios de la actividad 2 sin error.			
	2 reflexiones sobre las actividades.			
	Actividad 4. Producto de aprendizaje.			
Actitud	Realizó sus trabajos de forma colaborativa.			
Total de puntos		10		

Si en la lista de cotejo lograste **10 puntos** considera tu resultado como **Excelente** y si lograste **9 a 10 puntos** es **Bien**, **6 a 8 puntos** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de **6** considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque IX

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	

Continúa...

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.	Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Bloque X

Aplicas la Probabilidad clásica

Introducción

En tu vida diaria, existen situaciones o eventos que llamamos casuales o de suerte; por ejemplo, ganar un volado, la rifa de la escuela, un premio de la lotería, ser elegido entre todos tus compañeros, entre otros. Estos eventos los podemos analizar numéricamente para calcular su posibilidad de ocurrencia. En este bloque estudiaremos conceptos básicos de probabilidad, tales como experimento aleatorio, espacio muestral, evento, y otros que nos permitirán comprender la importancia de la frecuencia u ocurrencia de un evento para hacer predicciones con cierto grado de confianza.

¿Qué competencias desarrollarás?

Competencias genéricas	Atributos
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	• *Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• *Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.* • *Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* • *Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.* • *Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.* • *Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.*
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• *Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.* • *Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.*

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• *Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.* • *Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.*
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• *Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.* • *Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.* • *Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.*
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• *Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.* • *Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.*
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables	• *Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.*

Competencias disciplinares

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

¿Con qué propósito?

Aplicas modelos matemáticos en la determinación de los eventos que se repiten de manera casual, para predecir su ocurrencia con base en estudios probabilísticos formales para comprender por qué se presentan dichos eventos.

¿Qué aprenderás y cómo?

Contenidos curriculares	Descripción	Metodología
Conceptuales	Probabilidad clásica.	Comprensión de textos Observación de datos y gráficos. Análisis de datos y su representación gráfica.
Procedimentales	Distinción entre eventos deterministas y aleatorios. Utiliza las leyes aditiva y multiplicativa de las probabilidades.	Investigación documental y de campo. Aplicación de una encuesta Representar gráficamente datos.
Actitudinales	Amabilidad, disposición, responsabilidad en trabajo colaborativo.	Disposición para aprender de forma autónoma. Respeto y escucha a las opiniones y/o argumentos de otras personas. Seguimiento e interpretación de instrucciones.

¿Qué tiempo vas a emplear?

Considera 8 horas para el desarrollo de este bloque. Lo más recomendable es que utilices 4 horas para revisar los contenidos temáticos y 4 horas para llevar a cabo las actividades propuestas y el desarrollo de tu producto final.

Productos

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Evaluación diagnóstica
- Portafolio de evidencias
- Estudio estadístico

El **portafolio de evidencias** es un conjunto de pruebas recolectadas a lo largo del período a evaluar. Lo puedes hacer en una libreta o en un cuaderno que utilices para realizar las gráficas, procedimientos y operaciones las cuales te permitan llegar a soluciones de los problemas presentados en las actividades de este bloque. Los trabajos deben mostrar orden y limpieza. Además debe incluir una portada con tus datos (nombre de la escuela, título "Portafolio de evidencias", nombre del estudiante y fecha de entrega) y un índice.

Estos productos serán evaluados con los instrumentos mostrados al final del bloque.

Para iniciar, reflexiona

Ya hemos analizado en los bloques anteriores conceptos y procesos matemáticos desde un enfoque determinista, considerando a la Matemática como una ciencia exacta. En este bloque utilizaremos el enfoque no determinista, pensaremos en la diversidad de resultados que se obtienen al realizar un experimento.

Como ejemplo, a una muestra de alumnos de un salón del bachillerato se le pidió que señalara si tienen computadora en su casa. El resultado fue que de los 50 alumnos entrevistados, solamente 20 de ellos tienen computadora. Con estos datos será posible saber si un estudiante nuevo que se inscribe al grupo, tendrá computadora. Menciona tres detalles que ayudarían a determinar la respuesta al cuestionamiento anterior:

¿Con qué conocimientos cuentas?

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Lee, detenidamente las indicaciones de los planteamientos que se muestran enseguida y contesta lo que se te pide en los espacios asignados y/o en tu libreta.

1. La sociedad de padres de familia de la escuela Mártires de la Reforma, está interesada en adquirir diez computadoras. El Sr. Juan, presidente de la sociedad de padres de familia, le ha pedido a doña Juanita, quien es la tesorera, que investigue y realice una comparativa en el precio sobre las diferentes marcas y sus ventas en el mercado. Doña Juanita ya cuenta con la información y se la presenta al Sr. Juan por marca y ventas anuales, como se muestra en la tabla 1:

Ayuda a la sociedad de padres de familia. ¿Cuáles recomendarías como las mejores opciones de compra? ¿Por qué?

Tabla 1.

Marca	Ventas anuales
HP	5400
ACER	4320
APPLE	5500
TOSHIBA	5300
LANIX	4090

2. Utilizando el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas, demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $sen^2A + cos^2A = 1$

3. Dado el conjunto A = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} y el conjunto B = {3, 4, 6, 8}, realiza las siguientes operaciones:

   a) AUB={ b) A∩B={
   c) A-B ={ d) B-A={

4. Se desea construir una ruleta circular. Si el radio del círculo es de 20 cm y se requieren 104 espacios iguales para colocar los diferentes resultados posibles, ¿de qué tamaño sería cada espacio?

La ruleta es un juego de azar.

5. ¿Cuál es el espacio muestral de un dado?

6. Calcula el espacio muestral para ganar cuatro volados consecutivos.

7. En una tienda de autoservicio se encuentran clasificados los productos de acuerdo a características comunes o al uso que se les da a los mismos, en cada uno de los estantes se encuentran ordenados por marcas y presentaciones.

   a) ¿Qué criterios tomarías en cuenta para ordenar los productos que se venden en una dulcería?
   b) ¿Qué criterio tomarías en cuenta para clasificar en el caso de que un producto pueda estar ubicado en dos estantes?

8. ¿Cuál es el resultado de la operación $(2x + 3y)^2$, $(2x + 3y)^3$ y $(2x + 3y)^4$ ¿Existe alguna forma de saber el resultado para cualquier potencia? ¿cuál es?, ¿cómo se aplica?

9. El complemento del día es la noche, del vacío es lleno, de reprobado es aprobado. Escribe los complementos para los siguientes datos:

a) Números pares. ....

b) Las vocales. ....

c) La primavera. ....

d) Los días: jueves, martes y domingo. ....

10. El factorial de un número se define como: $n! = n \times n - 1 \times n - 2 \times \ldots \times 1$, de tal forma que $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Encuentra los siguientes valores:

a) $9!=$

b) $12!=$

c) $7!=$

d) ¿Cuál sería la forma más simple de dividir $12! / 9!$?

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de **9 a 10 preguntas** considera tu resultado como **Bien**, de **6 a 8** como **Regular** y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como **No suficiente**, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?		
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, **refuerza tus conocimientos consultando los siguientes conceptos: Operaciones con conjuntos, factoriales, espacios muéstrales.**

Aprende más

Eventos aleatorios y deterministas

La ciencia en general estudia dos tipos de fenómenos, los deterministas y los aleatorios o al azar. Los **eventos deterministas**, son aquellos donde podemos predecir su resultado mediante leyes y fórmulas establecidas; por ejemplo, la temperatura de un cuerpo, la rapidez de un proyectil, por mencionar algunos. Los **eventos aleatorios** o **probabilísticos**, son aquellos que pueden dar lugar a varios resultados sin que pueda ser predecible la ocurrencia del mismo; algunos ejemplos son las lluvias, los accidentes, las carreras de caballos, el lanzar una moneda. Los primeros estudios y el concepto de probabilidad nacen como una necesidad de estudiar la posibilidad de aciertos o fracasos en los juegos de azar. De aquí surge la teoría clásica o Probabilidad clásica de un evento aleatorio.

La probabilidad tiene aplicaciones en la Estadística inferencial, para prueba de hipótesis (evaluación de un producto), estimación de datos, y pronósticos de futuras observaciones; además de diversos campos del saber o de la vida del ser humano, como pueden ser las estadísticas de las carreras de autos o caballos, la eficacia de los medicamentos nuevos, si se mantiene la calidad de ciertos productos en un fábrica o industria, si se colocan nuevos artículos o se retiran otros del mercado, la evaluación de la calidad de un producto, por mencionar algunos ejemplos.

Un ejemplo de Estadística inferencial se puede ver en una fábrica de galletas donde se desea introducir un nuevo producto al mercado, para determinar su aceptación sería ilógico pretender que toda la población pruebe el producto. En este caso, se da a probar el producto a una muestra de **consumidores** y con base en los resultados de esa muestra se decide si se elabora o no.

Consumidor: en economía, es una persona u organización que consume bienes o servicios proporcionados por el productor o el proveedor.

Pues bien, como los resultados obtenidos a partir de una muestra difieren de los que se obtendrían si se le preguntara a la población total, existe un riesgo al tomar una decisión. En este caso se utiliza la probabilidad como una medida de evaluación del producto.

Experimento determinista y aleatorio

Experimentos deterministas. Son los experimentos cuyos resultados pueden ser anticipados con toda certeza y siempre se obtiene el mismo resultado. Por ejemplo: supongamos que ponemos al fuego un recipiente con agua, sabemos que ésta va a hervir y que además, el tiempo en el que alcanza el punto de **ebullición** dependerá de la temperatura, es decir, a mayor temperatura menor el tiempo de ebullición y viceversa. Otro ejemplo es si tiramos una piedra desde una montaña y/o desde un edificio de gran altura. Sabemos que caerá, incluso podremos predecir en qué parte del suelo caerá, dependiendo del ángulo y dirección del tiro que le demos.

Ebullición: proceso físico en el que la materia pasa a estado gaseoso. Se realiza cuando la temperatura de la totalidad del líquido iguala al punto de ebullición del mismo a esa presión.

Experimento aleatorio. Son los experimentos en los que no es posible adelantar el resultado con certeza. Por ejemplo: si se lanza un dado normal con caras marcadas del 1 al 6, desconocemos cuál de esos números aparecerá arriba; o si lanzamos una moneda tampoco sabremos con certeza cuál lado caerá. En los fenómenos o experimentos determinísticos podemos prever el resultado pero en los aleatorios no se puede prever el resultado debido a su naturaleza aleatoria, ya que se tienen varios resultados posibles. Otros conceptos básicos para el estudio de la Probabilidad son:

Espacio muestral. Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se denota por E.

Punto muestral. Es cada uno de los resultados del **espacio muestral**.

Evento. Es el resultado que deseamos obtener al realizar una o varias veces un experimento.

Los espacios muestrales, a su vez, se dividen en: **finitos e infinitos**.

La determinación del espacio muestral de experimentos que implican una o dos repeticiones del mismo tipo son sencillos de obtener. Pero **cuando se quiere conocer todos los resultados posibles de una serie de experimentos o repeticiones del mismo tipo** de forma visible, **se usa una técnica conocida como diagrama de árbol**. La aplicación de este diagrama **conduce metódicamente al espacio muestral que se quiere conocer**.

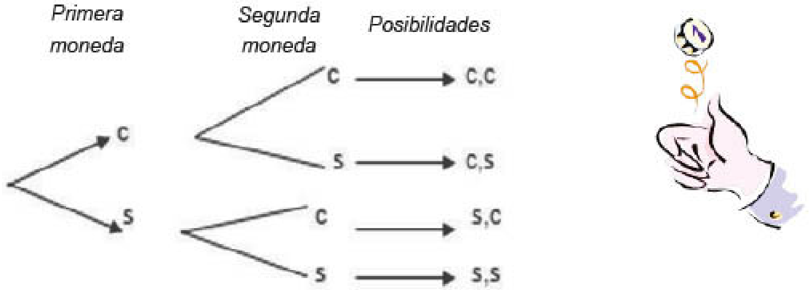
Ejemplo 1: Se nos pide determinar el espacio muestral E, y el diagrama de árbol del evento, lanzar una moneda dos veces.

Diagrama de árbol: herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Solución:

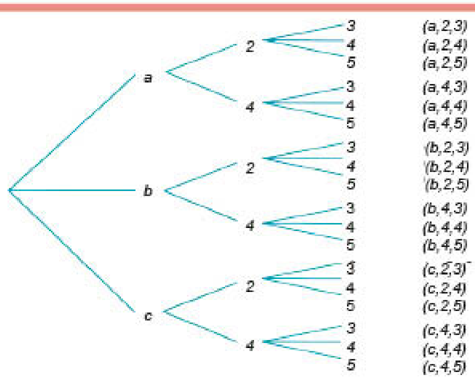
Lanzamos dos veces una moneda al aire, como se muestra en la imagen, dejándola caer al suelo para registrar los datos de si cayó cara o sello. Ya que se trata de un experimento formado por dos repeticiones del mismo tipo, es decir, cara (c) o sello (s), tenemos el siguiente espacio: $E = \{cc, cs, sc, ss\}$

Esto representa que las opciones de caída son cara y cara (cc), cara y sello (cs), sello y cara (sc) y sello y sello (ss). Para representar gráficamente las opciones de caída, empleamos un diagrama de árbol como se muestra a continuación:



Ejemplo 2: Se nos pide determinar el espacio muestral E y el diagrama de árbol del evento $A \times B \times C$ de los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$.

Solución:



El resultado de este producto es el conjunto de los tríos que se listan.

$A \times B \times C = \{(a,2,3),(a,2,4),(a,2,5),(a,4,3),(a,4,4),(a,4,5),(b,2,3),(b,2,4),(b,2,5),$
$(b,4,3),(b,4,4),(b,4,5),(c,2,3),(c,2,4),(c,2,5),(c,4,3),(c,4,4),(c,4,5)\}$

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones: Con base en el conocimiento adquirido, realiza en tu libreta las razones o justificaciones necesarias para resolver lo que se solicita en cada numeral, a fin de que te familiarices con la estadística inferencial.

1. Revisa cada inciso de a hasta g, y escribe adelante A si se trata de un experimento aleatorio o D si es determinista:

    a) La próxima vez que viajes en autobús te sentarás junto a un niño. ....

    b) Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. ....

    c) Cinco por cinco es igual a veinticinco. ....

    d) La próxima vez que vayas al cine te tocará sentarte en la primera fila. ....

    e) Cuando prendas el televisor verás una muchacha en la pantalla. ....

    f) Al tirar un dado saldrá el 3. ....

    g) El próximo año no deberás ninguna materia. ....

2. Escribe 10 ejemplos de experimentos que podrías hacer en la escuela o en tu comunidad: 5 deterministas y 5 aleatorios.

3. Determina los espacios muestrales, por diagrama de árbol, de los siguientes experimentos aleatorios:

    a) Lanzar una moneda 2 veces, utilizando los términos águila y sol.

    ....

    b) Las formas en que una pareja puede tener 3 hijos.

    ....

4. Si realizamos el experimento de preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si emplean o no los servicios básicos de internet, considera las posibles respuetas para realizar lo siguiente:

   a) Elabora un diagrama de árbol que te ayude a determinar el espacio muestral asociado a dicho experimento.

   b) ¿Qué elementos del espacio muestral constituyen el suceso: "al menos dos de las personas emplean los servicios básicos de internet".

5. Escribe el espacio muestral que se obtiene de los siguientes diagramas de árbol, que representan los sucesos elementales de extraer dos esferas de una urna.

   a) Sin devolución de la esfera ....

   b) Con devolución de la esfera ....

6. Elabora el diagrama de árbol para obtener los 36 elementos del espacio muestral de lanzar dos veces un dado.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Cuál crees que sea la probabilidad de lluvia en tu comunidad? Explica breve y claramente.

....

....

....

Aprende más

Operaciones con eventos

Hasta el momento sólo hemos descrito eventos sencillos de un espacio muestral. Los eventos de mayor complejidad se obtienen al realizar operaciones con eventos, éstas describen las posibilidades de lograr un éxito o un fracaso. Por ejemplo, si un estudiante está cursando las materias de Matemáticas e Historia en el mismo cuatrimestre, de acuerdo con las estadísticas de la institución podemos determinar la probabilidad de aprobar al menos una materia, aprobar exactamente una materia, y reprobar las dos materias.

Sean *A* y *B* dos eventos pertenecientes a un espacio muestral al *E*, se definen las siguientes operaciones entre ellos:

Unión

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Se lee, el valor de x pertenece a los valores del evento A o a los valores del evento B. Significa que este evento ocurre si por lo menos uno de los eventos (A o B) ocurre. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Intersección

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Significa que este evento ocurre si ambos eventos *A* y *B* ocurren al mismo tiempo. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Complemento

$$A^c = \{x : x \in A \text{ y } x \in E\}$$

Significa que este evento ocurre para cualquier elemento del espacio muestral, excepto aquellos que pertenecen al evento A: $P(A) + P(A^C) = 1$ o $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Diferencia

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Significa que este evento ocurre para cualquier resultado de A pero sin que ocurra ningún resultado de B: $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Con estas operaciones básicas se pueden expresar espacios muestrales aún más complejos mediante la combinación de operaciones.

Ejemplo: Se lanza un dado común. Obtener el espacio muestral y los siguientes eventos:

a) Obtener un número par.
b) Obtener un número primo.
c) Obtener un número par o primo.
d) Obtener un número par y primo.
e) Obtener un número impar o no primo.

Solución:

El espacio muestral E es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) *Sea "A" el evento de obtener un número par* $A = \{2, 4, 6\}$

b) *Sea "B" el evento de obtener un número primo* $B = \{2, 3, 5\}$

c) *El evento de obtener un número par o primo es la unión de los dos eventos anteriores.* $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

d) *El evento de obtener un número par y primo es la intersección de los eventos A y B.* $A \cap B = \{2\}$. *Este evento sólo posee un resultado. Por lo anterior se le denomina* **evento unitario**.

e) *Si el evento A son los números pares, entonces su complemento son los números impares.* $A^c = \{1, 3, 5\}$. *Si el evento B son los números primos, entonces su complemento son los números no primos.* $B^c = \{1, 4, 6\}$. *El evento de obtener un número impar o no primo es la unión de A y B.* $A^c \cup B^c = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones: Realiza en tu libreta los procedimientos con orden y limpieza, para dar respuesta a los siguientes planteamientos y comenta con tus compañeros tus resultados, mostrando respeto al escuchar sus opiniones.

1. En una mesa de juego se lanzan dos dados comunes al mismo tiempo. Enseguida reflexiona y llega a obtener el espacio muestral y los siguientes eventos:

   a) Obtener un número par.
   b) Obtener un número primo.
   c) Obtener un número par o primo.
   d) Obtener un número par y primo.
   e) Obtener un número impar o no primo.

2. Obtén el espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos aleatorios (puedes usar diagrama de árbol cuando sea oportuno hacerlo):

   a) Lanzar tres monedas.

   b) Se sacan tres bolas una tras otra, sin reemplazamiento, es decir, sin introducir de nuevo la que se saca, de una urna que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3.

   c) Se sacan dos bolas, una tras otra, con reemplazamiento, o sea introduciendo la que se saca, de una urna que contiene dos bolas numeradas con 1 y 2.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Aprende más

Cálculo de probabilidades

Ya se han considerado las herramientas básicas de la probabilidad, ahora pasemos a definir de forma directa el concepto de probabilidad a través del siguiente ejemplo:

El ***informe meteorológico.*** *Cierto día indica el noticiero que la probabilidad de lluvia para nuestra región es de 90%. Con esto entendemos que si bien puede que no llueva, es casi seguro que sí llueva, por lo que tomaremos nuestro paraguas al salir de casa. En cambio, nos informan que el pronóstico es de 50% para lluvia, entonces lo más seguro es que dudes en usar un paraguas, ya que tiene igual probabilidad de que llueva o no.*

Informe meteorológico: información del estado del tiempo o predecir las condiciones atmosféricas en el futuro.

Propiedades que se usan para la probabilidad

Propiedad 1. La probabilidad de un evento A no puede ser menor a cero ni mayor a uno. Esto se resume en forma matemática $0 \leq P(A) \leq 1$. En general, la probabilidad de cualquier evento *A* que pertenezca a un espacio muestral *E*, sin importar el carácter o naturaleza del mismo, siempre estará entre 0 y 1.

Propiedad 2. La probabilidad de todo el espacio muestral es igual a uno. Es decir: $P(E)=1$.

Propiedad 3. La probabilidad de un evento nulo o sin elementos, es decir, que no cuenta con casos favorables dentro del espacio muestral, llamado vacío, es igual a cero. Esto es $P(0) = 0$.

Probabilidad: número que se da a un evento para indicar la posibilidad de que ocurra.

Cálculo de probabilidades clásicas

Se llama probabilidad a los números que reflejan la posibilidad de ocurrencia de hechos o sucesos. A un suceso muy probable, o altamente probable como, por ejemplo, la posibilidad de que llueva, se le considera muy ocurrente o viable y le correspondería una probabilidad muy alta. Mientras algo poco probable, como por ejemplo, un incendio, es algo que no se espera que ocurra y en consecuencia le correspondería una probabilidad muy baja. En una definición más formal, es medir el grado de certidumbre que existe sobre el resultado de un experimento, evaluado entre 0 y 1.

La probabilidad clásica o "a priori" (la primera causa) se expresa como una fracción de número de casos favorables al evento entre el número de casos totales del espacio muestral. Veamos una descripción más clara:

Ejemplo: Si se lanza una moneda que no está cargada hacia un lado y en condiciones normales (no se altera el lanzamiento, ni caída de la moneda) calcula la probabilidad de que caiga águila y la probabilidad de que caiga sol.

Solución:

Dadas las condiciones del experimento, sólo existen dos posibles resultados; águila y sol. Por lo tanto, cada resultado tiene un 50% de posibilidades de ocurrir.

El espacio muestral es: $E=\{A,S\}$

Hay dos resultados en total.

Si definimos el evento F como cae águila: $F=\{A\}$

Sólo hay un resultado favorable para este evento.

Si definimos el evento G como cae sol: $G=\{S\}$

Sólo hay un resultado favorable para este evento.

Entonces la probabilidad de que caiga águila (ocurra el evento F) se denota por:

$$P(F)=\frac{\text{Número de casos favorables de } F}{\text{Número de casos totales}}$$

Numéricamente tenemos: $P(F)=\frac{1}{2}=0.5$

Análogamente para el evento G: $P(G)=\frac{\text{Número de casos favorables de } G}{\text{Número de casos totales}}$

Numéricamente tenemos: $P(G)=\frac{1}{2}=0.5$

Ley general aditiva de la unión de eventos. Si A y B son dos eventos de un espacio muestral E. Entonces se cumple que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo: Se lanzan dos dados comunes al mismo tiempo. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

a) Obtener un número par.
b) Obtener un número primo.
c) Obtener un número par o primo.
d) Obtener un número par y primo.
e) Obtener un número impar o no primo.

Solución:

El espacio muestral E es: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

a) Cálculo de la probabilidad de un número par.

$A = \{2, 4, 6\}$ *Por lo tanto:* $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

b) Cálculo de la probabilidad de un número primo.

$B = \{2, 3, 5\}$ *Por lo tanto:* $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

c) Cálculo de la probabilidad de obtener un número par o primo es la unión de los eventos anteriores.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.5 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

d) Cálculo de la probabilidad de obtener un número par y primo.

La probabilidad de la intersección se comprueba en el siguiente evento:

El evento de obtener un número par y primo es $A \cap B = \{2\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Continúa...

e) Cálculo de la probabilidad de obtener un número impar o no primo.

Si el evento A son los números pares. Entonces su complemento A son los números impares. Si el evento B son los números primos, entonces su complemento B son los números no primos. Por lo tanto, la probabilidad de obtener un número impar o no primo es:

$$P(A^C \cup B^C)$$

Por ley de De Morgan

$$P\left[(A \cap B)^C\right]$$

Finalmente, por ley del complemento

$$P\left[(A \cap B)^C\right] = 1 - P(A \cap B)$$

$$P\left[(A \cap B)^C\right] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Como puedes ver, las leyes de la probabilidad, junto con las leyes del álgebra de conjuntos, simplifican los cálculos de la probabilidad de eventos de naturaleza compleja.

Probabilidad condicional

Por las altas ventas de ropa, el dueño de la compañía "Textiles de Oriente" desea otorgar un premio de estímulo especial a sus trabajadores. Para la entrega del premio le pide al director de recursos humanos la relación de cargo y género, como se muestre en la tabla 2:

Tabla 2.

	Hombres	Mujeres	Totales
Obreros	80	113	193
Empleados	30	17	47
Directores	4	6	10
Totales	**114**	**136**	**250**

La señora Socorro, del área de costura y confección, quien es una empleada responsable y eficiente, está interesada en saber qué posibilidad tiene de ser elegida. Así que saliendo del trabajo, y llegando a casa, se puso a buscar en sus apuntes de probabilidad de la prepa la manera de calcular la probabilidad de ser elegida y encontró lo siguiente:

La **probabilidad condicional** es la probabilidad de un evento A, es modificada debido a que antes de presentarse este evento A, ha ocurrido un primer evento B, el cual está relacionado con el evento A y que se calcula de la siguiente manera:

En general, para calcular la probabilidad condicional tenemos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Con la condición de que la probabilidad del evento P(B) sea mayor que cero (P(B)>0)

Socorro tomó su cuaderno, lápiz, calculadora y escribió lo siguiente:

Eventos:
A: ser empleado = 250
B: ser mujer = 136
A∩B: ser empleada y mujer = 17

Probabilidades:
P(A): Probabilidad de ser empleado
P(B): Probabilidad de ser mujer
P(A∩B): Probabilidad de ser empleada y mujer

Después realizó las siguientes operaciones:

P(A) = 47/250 = 0.188,
P(B) = 136/250 = 0.544,
P(A∩B): 17/250

Sustituyo en la fórmula y el resultado lo expresó en porcentaje:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{17/\cancel{250}}{136/\cancel{250}}$$

$$P(A/B) = \frac{17}{136}$$

$$P(A/B) = 0.125$$

Socorro se da cuenta que tiene una **posibilidad de 12.5%** de ser elegida.

Otro ejemplo de la aplicación de la probabilidad condicional es el siguiente:

Para una campaña de vacunación, el Hospital General requiere de cien termómetros y sólo cuenta con 50, por lo que fue necesario solicitarle a dos laboratorios clínicos de la región, el A y el B, el préstamo de 50 termómetros. Los laboratorios A y B enviaron dos tipos de termómetros, los tradicionales de mercurio con su escala para la lectura de la temperatura y otros que presentan su medida en una pantalla de cristal líquido, como se muestran en la figura 10.1.

Figura 10.1.

Termómetro: aparato que sirve medir la temperatura del cuerpo humano.

En la tabla 3 se muestra la cantidad de termómetros que prestó cada laboratorio.

Tabla 3.

	Lectura	
	Mercurio	**LQD**
Laboratorio A	20	15
Laboratorio B	10	5

Si uno de los médicos que va a vacunar elige al azar un termómetro, calcular la probabilidad de que:

a) Sea del laboratorio A.
b) Sea de pantalla de cristal líquido (LQD).
c) Sea del laboratorio A y de escala de mercurio.
d) Sea de lectura de Mercurio, dado que es de laboratorio B.

Solución:

a) *El espacio muestral E es el total de termómetros o sea 50. El número de termómetros del laboratorio A es de 35. Por lo tanto, la probabilidad de que el termómetro seleccionado sea el laboratorio A es:*

$$P(N) = \frac{35}{50} = 0.7$$

Continúa...

b) La cantidad de termómetros con lectura LQD es 20. Por tanto, la probabilidad de que el termómetro seleccionado sea de LQD de es:

$$P(F) = \frac{20}{50} = 0.4$$

c) La cantidad de termómetros del laboratorio B y que sean de escala de mercurio es 10. Por lo tanto, la probabilidad de que el termómetro seleccionado sea del laboratorio B y de escala de mercurio es:

$$P(F \cup N) = \frac{10}{50} = 0.2$$

d) La probabilidad de este evento estará condicionada a la ocurrencia del evento en que sea de laboratorio B. Adicionalmente, tiene que ser un termómetro de lectura del mercurio, por tanto, se calcula en términos de la probabilidad condicional de la siguiente manera:

$$P(F/N) = \frac{10/\cancel{50}}{15/\cancel{50}} = \frac{10}{15}$$

$$P(F/N) = 0.66$$

Con lo anterior podemos decir que es más probable que el termómetro elegido sea de mercurio, dado que se escogió del laboratorio B.

Ley multiplicativa de la probabilidad

Una iniciativa de la Secretaria del Transporte del Estado es reducir el número de personas que son atropelladas en la avenida "E. Pacheco", la cual se muestra en la figura 10.2. Por lo que el secretario le ha pedido al departamento de proyectos la ubicación de puentes peatonales a lo largo de la avenida. El director de proyectos recordó que en la clase de probabilidad que cursó en la prepa, el maestro mencionó:

La **ley multiplicativa de la probabilidad** es la probabilidad de que ocurran simultáneamente dos eventos independientes A y B, y se calcula como el producto de sus probabilidades: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Figura 10.2.

Así que él reflexionó, que de esta forma, él puede calcular y obtener los puntos a lo largo de la avenida, donde la probabilidad de atropellamiento es alta por el encuentro que se da entre el peatón y el automovil.

Ejemplo 1: En una urna hay siete esferas rojas y tres verdes. Si se sacaron tres esferas, una tras otra, estimar la probabilidad de que Las primeras dos sean Rojas y la última verde.

Solución:

En total hay 10 esferas en la urna: sea R el evento descrito anteriormente. Sea "A" el evento de sacar la primera esfera de color rojo, "B" el evento de sacar la segunda esfera de color rojo y "C" el evento de sacar una tercera esfera de color verde. Entonces la probabilidad del evento A es:

$$P(A)=\frac{7}{10}$$

Dado que son siete esferas rojas de un total de 10, la probabilidad de B es:

$$P(B)=\frac{6}{9}$$

Puesto que se ha extraído una esfera del total y quedan seis esferas rojas, la probabilidad de C es:

$$P(C)=\frac{3}{8}$$

Puesto que se han extraído dos esferas del total y hay tres esferas verdes, por la ley de la multiplicación de probabilidades

$$P(R) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(R)=\frac{7}{10}x\frac{6}{9}x\frac{3}{8}$$

$$P(R)=\frac{7}{40}$$

Ejemplo 2: Una pareja quiere tener dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean varones?

Solución:

Una pareja desea tener dos hijos, el sexo del primero no determina el sexo del segundo, por lo que son eventos independientes. Calculemos la probabilidad de cada uno de los eventos:

P(que el primero sea varón) = ½
P(que el segundo sea varón) = ½
La probabilidad de que ambos ocurran está dada por el producto de sus probabilidades

individuales, es decir: $P(\text{que ambos sean varón})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones: Realiza en tu libreta las razones o justificaciones necesarias para resolver lo que se solicita en los numerales del 1 al 13, a fin de que te familiarices con los razonamientos deductivos de la probabilidad y, en particular, con el tipo de situaciones teóricas. Este trabajo lo entregarás en la fecha que el profesor indique.

1. Sean A y B dos eventos de un espacio muestral E y

$$P(A) = 0.8, P(B) = 0.5 \text{ y } P(A \cap B) = 0.15$$

   Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

   a) $P(A \cup B) =$

   b) $P\left[(A \cup B)^C\right] =$

   c) $P(B - A) =$

   d) $P(A^C \cup B^C) =$

2. En total hay 10 esferas en la urna: sea R el evento descrito por cada inciso. Sea A el evento de sacar la primera esfera de color rojo, B el evento de sacar la segunda esfera de color rojo y C el evento de sacar una tercera esfera de color verde.

   a) Las tres sean verdes.
   b) La primera sea verde y las demás rojas.

3. En una urna hay cinco esferas azules y tres amarillas. Si se sacan tres esferas una tras otra, encontrar las siguientes probabilidades.

   c) La primera es azul y las demás amarillas.
   d) Las tres sean azules.
   e) La primera sea amarilla y las demás azules.
   f) Las tres sean amarillas.

4. Suponiendo que 5% de la población padece la enfermedad de apendicitis (2% en estado agudo A y 3% en estado crónico C y 95% no la padece. Uno de los síntomas es el dolor de estómago. Las probabilidades de tener dolor de estómago padeciendo el estado A, el estado C o no padeciendo la enfermedad son de 90, 20 y 10%, respectivamente. Hallar la probabilidad de que una persona, con dolor de estómago sufra realmente el estado A de apendicitis.

5. La probabilidad de que un alumno elegido al azar de cierta clase, apruebe Matemáticas y Lengua es 0.6. La probabilidad de que apruebe Lengua es 0.75 y la de que no apruebe Matemáticas es 0.2.

   a) ¿Son dos sucesos independientes "Aprobar Lengua" y "Aprobar Matemáticas"?
   b) Calcula la probabilidad de que apruebe Matemáticas suponiendo que aprobó Lengua.

6. En una fábrica de tornillos las máquinas A, B y C producen, respectivamente, 30, 45 y 25% del total de la producción. Analiza la producción, se sabe que 1, 4 y 3% de los fabricados por las máquinas A, B y C, respectivamente, son tornillos defectuosos. Se toma al azar un tornillo:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?
   b) Si ha resultado defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producto de la máquina C?

7. En el juego de dominó qué probabilidad hay de:

   a) Sacar la ficha cuatro o cinco.
   b) Sacar una mula.

8. La probabilidad de que un basquetbolista enceste un tiro libre es de 84%. Determina la probabilidad de que en 3 tiros libres:

   a) Enceste todos.
   b) Falle el segundo.

9. Al lanzar dos monedas, qué probabilidad hay de:

   a) Obtener dos caras.
   b) Obtener una cara y un sello.
   c) Obtener lados iguales.

10. En el lanzamiento de un dado, cuál es la probabilidad de:

   a) Obtener el número 5.
   b) No obtener el número 2.
   c) Obtener 3 o 5.
   d) Obtener un número menor que 5.

11. En el lanzamiento de dos dados, cuál es la probabilidad:

   a) Que la suma sea 11.
   b) Que la suma sea mayor que 10.
   c) Que la suma sea menor que 4.
   d) No salgan números iguales.

12. En una caja hay 12 bolas negras y 8 rojas, qué probabilidad hay de:

   a) Sacar una bola negra.
   b) Sacar una bola roja.
   c) Sacar una bola negra y, sin reponerla, sacar luego una bola roja.
   d) Sacar una bola negra y luego de reponerla, sacar una bola roja.

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta el anexo de respuestas.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Es domingo en la mañana, te levantas y sales de tu casa hacia la tienda. Miras hacia el cielo, y ves que el día está nublado y con riesgo de lluvia. En el camino te encuentras a diferentes personas a quienes les preguntas si creen que va a llover. Algunos te dicen que sí y otros que no. Explica breve y claramente cómo la probabilidad y estadística te ayudan a tener la certeza de que va a llover para estar preparado para dicho evento.

....

....

....

....

....

Aplica lo aprendido

Actividad 4

Producto de aprendizaje: estudio estadístico

Para concluir el último bloque, te invitamos a elaborar un estudio estadístico a partir de una investigación. Para el desarrollo de este trabajo, debes mostrar amabilidad y responsabilidad para trabajar colaborativamente.

Instrucciones: Formarán equipos de cuatro compañeros para realizar una investigación de cómo la probabilidad y estadística se emplean en las pruebas de calidad e higiene para lograr altos índices de calidad en la elaboración de productos lácteos como el queso, la crema y el yogurt. Para ello puedes realizar diferentes entrevistas a ingenieros, productores, administradores de ranchos, o bien buscar en los medios electrónicos a tu alcance como el internet o en las enciclopedias de las bibliotecas de tu comunidad.

Anota en tu cuaderno toda la información que obtuviste. Representa los índices de calidad por medio de un gráfico pertinente y al concluir tu investigación, prepara una carátula con tus datos (nombre, asignatura, semestre y fecha). En otra hoja escribe una reflexión tomando como referencia la investigación que realizaste de cómo la probabilidad es funcional en alguna fábrica de tu localidad. Cuida que tus ideas estén escritas con coherencia y sin errores ortográficos.

Los criterios a evaluar dentro del documento son los siguientes:

- Datos relevantes y pertinentes.
- Bibliografía.
- Representación de ideas principales de estadística y probabilidad.
- Datos del estudiante, asignatura, semestre, fecha.
- Creatividad para realizar la investigación.
- Datos que muestren índices de calidad.
- Muestra procedimientos con secuencia lógica.
- Utiliza alguna herramienta tecnológica para presentar el trabajo.
- De forma precisa y coherente y sin errores.
- Señala la funcionalidad en alguna fábrica.
- Grafico pertinente a los índices.
- Se muestran los datos en las gráficas.

Inspector de control de calidad midiendo un componente

Al finalizar tu investigación, realiza una presentación para tus demás compañeros, mostrando amabilidad y respeto al escuchar los argumentos de los demás.

Lista de cotejo para evaluar el producto de aprendizaje: estudio estadístico

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Información	Datos relevantes y pertinentes.			
	Bibliografía.			
	Representación de ideas principales de estadística y probabilidad.			
Presentación	Datos del estudiante, asignatura, semestre, fecha.			
	Creatividad para realizar la investigación.			
	Datos que muestren índices de calidad.			
	Muestra procedimientos con secuencia lógica.			
	Utiliza alguna herramienta tecnológica para presentar el trabajo.			
Reflexión personal	De forma precisa y coherente. Señala la funcionalidad en alguna fábrica.			
Graficas	Gráfico pertinente a los índices.			
	Se muestran los datos en las gráficas.			
Total de puntos		11		

Si en la lista de cotejo lograste **11 puntos,** considera tu resultado como **Excelente**; y si lograste **9 a 10 puntos,** es **Bien**; de **6 a 7,** es **Regular;** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6**, considera tu desempeño como **No eficiente**; lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Lista de cotejo para evaluar el portafolio de evidencias

Criterios	Indicadores	Sí cumple	No cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada con nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	Entrega la libreta o el cuaderno donde realizó los ejercicios.			
	Identifica las diferentes secciones del portafolio y se desglosan indicando número de ejercicios y de actividad.			
	Presenta orden lógico.			
Documentos de evidencias	Evaluación diagnóstica sin error.			
	6 ejercicios de la actividad 1 sin error.			
	Reflexiona sobre eventos aleatorios y deterministas.			
	2 ejercicios con 8 incisos de la actividad 2 sin error.			
	13 ejercicios de la actividad 3 sin error.			
	Actividad 4. Producto de aprendizaje sin error.			
Total de puntos		10		

Si en la lista de cotejo lograste **10 puntos,** considera tu resultado como **Excelente**; y si lograste **9 a 10 puntos,** es **Bien**; de **6 a 7,** es **Regular** y si tus respuestas correctas fueron **menos de 6**, considera tu desempeño como No suficiente; lo que exige que atiendas tus áreas de oportunidad.

¿Cómo evalúas el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Excelente	
	Bien	
	Regular	
	No suficiente	

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque X

Instrucciones: Al concluir el bloque registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (Desarrollada)
M = Medio (Está en vía de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	
	Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
	Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	
	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	
	Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.	

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.	
	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	
	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.	Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Cuando concluyas la tabla preséntala a tu profesor y valoren los avances registrados.

Glosario

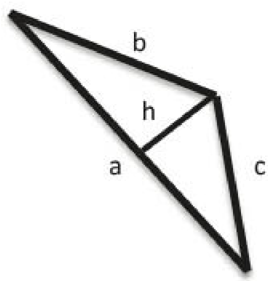
- **Acantilado:** accidente geográfico que consiste en una pendiente o vertical perpendicular al mar.
- **Ambigüedad:** posibilidad de que algo pueda entenderse de varios modos.
- **Anécdota:** cuento corto de un suceso que le haya pasado a alguien.
- **Artefacto:** obra diseñada para desempeñar alguna función específica.
- **Atmósfera terrestre:** capa más externa y menos densa de la Tierra. Está formada por diferentes tipos de gases.
- **Axiomas:** verdades lógicas mínimas de donde nace la Matemática.
- **Colisión:** choque entre dos o más cuerpos.
- **Contextualizar:** conocer e interpretar la realidad del entorno.
- **Criterio:** tiene su origen en un vocablo griego que significa juzgar. Es un juicio de una persona o un objeto.
- **Demanda:** cantidad y calidad de bienes y servicios que pueden ser adquiridos en los diferentes precios del mercado por un consumidor.
- **Desviación absoluta:** desviación media o promedio de un conjunto de datos.
- **Diagrama de árbol:** herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.
- **Diapositiva:** hoja que contiene imágenes o escritos y sirve para clarificar y ampliar el mensaje verbal.
- **Dibujo a escala:** dibujo con tamaños correctos que han sido reducidos o aumentados en una cierta cantidad.
- **Ebullición:** proceso físico en el que la materia pasa a estado gaseoso. Se realiza cuando la temperatura de la totalidad del líquido iguala al punto de ebullición del líquido a esa presión.
- **Enigmático:** algo que contiene un misterio oculto, difícil de entender o resolver.
- **Envasadora:** lugar donde aplican el método de envasado para conservar alimentos o alguna otra sustancia.
- **Grado:** unidad empleada para clasificar los ángulos en las figuras geométricas.
- **Igualdad:** dos objetos son iguales, si poseen el mismo valor.
- **Infinitesimal o infinitésimo:** cantidad infinitamente pequeña.
- **Informe meteorológico:** información del estado del tiempo o predicción de las condiciones atmosféricas en el futuro.
- **Manipulación:** operar con las manos algún objeto.
- **Medición angular:** clase de mediciones sobre un arco de circunferencia.
- **Notación:** representación de un número con un valor muy grande o muy pequeño.
- **Plenaria:** reunión o junta general con todos los participantes del grupo.
- **Población finita:** conjunto compuesto por una cantidad limitada de elementos.
- **Población infinita:** conjunto compuesto por una cantidad muy grande que no puede alcanzarse en el conteo.
- **Probabilidad:** método mediante el cual se obtiene la frecuencia de un suceso o hecho.
- **Procedimiento:** acciones u operaciones que se hacen para obtener un resultado.

- **Propiedades:** reglas que se obtienen de los axiomas.
- **Protón:** partícula cargada positivamente que se encuentra dentro del núcleo atómico.
- **Radián:** unidad de medida del ángulo plano.
- **Semejanza:** dos figuras tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.
- **Semirrecta:** línea que tiene principio y no tiene fin.
- **Sistema sexagesimal:** sistema de numeración posicional que tiene como base aritmética el número 60.
- **Termómetro:** instrumento de medición de temperatura.
- **Transversal:** aquello que cruza, corta o atraviesa.

SOLUCIONES DEL BLOQUE I

Evaluación diagnóstica

1. *Utilizando la escala, obtenemos los valores de cada lado midiendo con una regla, trazamos la altura del triángulos y también se mide, una vez que se conocen la altura y base, procedemos a obtener el área:*



$a = 5\ cm \Rightarrow 5(450\ m) = 2250\ m$

$b = 3\ cm \Rightarrow 3(450\ m) = 1350\ m$

$c = 2.5\ cm \Rightarrow 2.5(450\ m) = 1125\ m$

$h = 1.3\ cm \Rightarrow 1.3(450\ m) = 585\ m$

Calculando el área:

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

Sustituyendo valores de a y h:

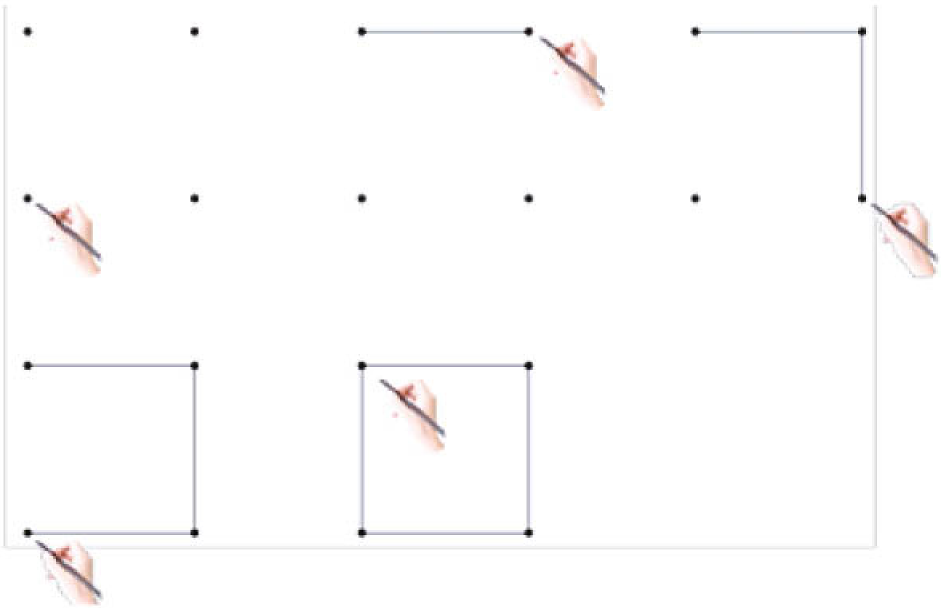
$$A = \frac{(2250)(585)}{2}$$

$$A = 658125\ m^2$$

$$A = 658125\ m^2 \left(\frac{1\ km}{1000\ m}\right)^2 = 0.658125\ km^2$$

2. *Pueden: triángulo, cuadrado o cualquier polígono.*

3. *Ubicar los vértices del polígono regular (cuadrado) y después unirlos con los segmentos correspondientes para delimitar una figura plana.*



4. *Sí es posible representar todo lo que nos rodea a través de figuras y cuerpos geométricos ya que la creatividad del ser humano le ha permitido diseñar modelos que se ajustan a cualquier forma y tamaño.*

5.
Paso 1. *El estudiante observa la figura.*
Paso 2. *Área del triángulo $\triangle ABF$:*

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{15(20)}{2} = 150\ m^2$$

Paso 3. *Se fragmenta el esquema en tres figuras (dos triángulos y un rectángulo) y se calculan primero las áreas de éstas. El área total es la suma de las tres.*

Área del $\triangle AED$:

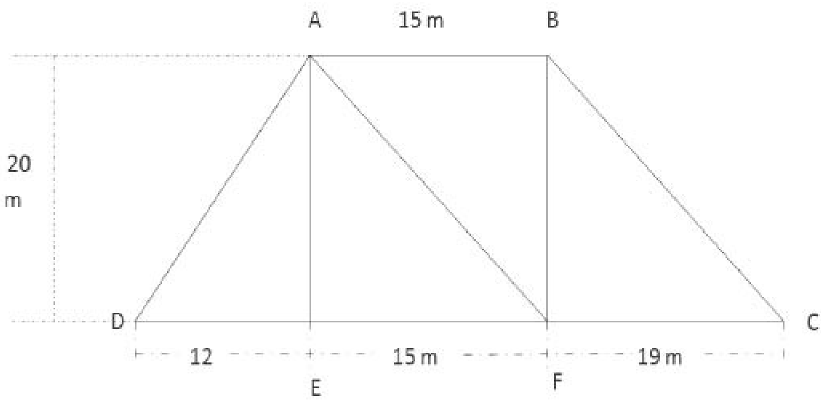
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{12(20)}{2} = 120\ m^2$$

Área del $\triangle BFC$:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{19(20)}{2} = 190\ m^2$$



Área del rectángulo ABFE (tomando la base de 15 m):

$$A = b \cdot h = 15(20) = 300\ m^2$$

Área total:

$$AT = 120 + 300 + 190 = 610\ m^2$$

6.
$2x + 5 = 57$

Despejando x:
$2x = 57 - 5$

Resolviendo:
$x = 55 / 2$
$x = 27.5$

7. a) *60°, obtenidos de dividir 180° en tres partes iguales;* **b)** *Para demostrar que dos rectas son paralelas, mediría la distancia entre ellas y ésta debe conservarse de manera constante.* **c)** *La diferencia entre una línea recta y una curva queda determinada por la dirección en que se encuentran los puntos que las forman. En el caso de la recta, todos en una misma dirección y para la curva en direcciones distintas.* **d)** *Para calcular el área de un triángulo se necesita conocer su base y altura, o bien la medida de sus tres lados.*

8. a) *Tus respuestas pueden ser: caminaría en línea recta para recorrer la menor distancia posible; caminaría siguiendo el margen del río para no perderme o para disfrutar el paisaje;* **b)** *Un punto es adimensional;* **c)** *Para las líneas no se considera su grosor, sólo su longitud. Es decir, se les considera una sola dimensión;* **d)** *Los ángulos se llaman alternos externos;* **e)** *Área del terreno: $A = b \cdot h = 300(25) = 7{,}500.00\ m^2$.*

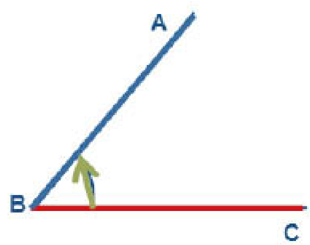
La parte que va a vender es de: $\dfrac{2A}{3} = \dfrac{2(7{,}500)}{3} = 5000\ m^2$

Recibirá por la venta (25)(5000) = \$125,000.00

Actividad 1

I.

a), b), c)



Solución Figura 25

d) $\angle CBA \qquad \angle ABC$

e) *Sí en magnitud, pero en sentido contrario.*

2.

A)

$x + x + 70 = 90$

$2x = 90 - 70$

$2x = 20$

$x = \dfrac{20}{2}$

$x = 10$

Los ángulos miden 10° y 80°.

B)

$4x + 3x + 2x = 90$

$9x = 90$

$x = \dfrac{90}{9}$

$x = 10$

Los ángulos miden 40°, 30° y 20°.

C)

$\dfrac{x}{2} + 3x + \dfrac{x}{2} + 5x = 90$

$9x = 90$

$x = 10$

Los ángulos miden 5°, 30°, 5° y 50°.

D)

$2x + 5x + 3x = 180$

$9x = 180$

$x = \dfrac{180}{9}$

$x = 20$

Los ángulos miden 20°. 50° y 30°.

III.

1.a) *C + 47° = 90°*
C= 90° – 47° = 43°
b) *C + 35° = 90°*
C= 90° – 35° = 55°
c) *C + 68° = 90°*
C= 90° – 68° = 22°
d) *C + 0° = 90°*
C= 90 °

2.a) *S + 75° = 180°*
S= 180° – 75° = 105°
b) *S + 104° = 180°*
S= 180° – 104° = 76°
c) *S + 135° = 180°*
S= 180° – 135° = 45°
d) *S + 135° = 180°*
S= 180° – 135° = 45°

3. *Ángulo menor = x*
Ángulo mayor = x +40°

$x + x + 40° = 90°$

$2x = 90° - 40° = 50°$

$x = \dfrac{50°}{2}$

$x = 25°$

Los ángulos miden 25° y 65°

4. *Ángulo menor = x*
Ángulo mayor = 3x

$$x + 3x = 180°$$
$$4x = 180$$
$$x = \frac{180}{4}$$
$$x = 45°$$

Los ángulos miden 45° y 135°

5. *Ángulo menor = x*
Ángulo mayor = 3x − 20°

$$x + 3x - 20° = 120°$$
$$4x = 120° + 20°$$
$$x = \frac{140°}{4}$$
$$x = 35°$$

El ángulo menor mide 35° y el mayor 85°

6. *Ángulo menor = x*
Ángulo mayor = x + 58°

$$x + x + 58 = 180°$$
$$2x = 180 - 58$$
$$x = \frac{122}{2}$$
$$x = 61°$$

El ángulo menor mide 61° y el mayor 119°

7. *Es posible sólo en el caso de que cada ángulo mida 90°.*

8.

$$x + y = 75$$
$$x - y = 21$$

Reduciendo: $2x=96$, $x = \frac{96}{2}$, $x = 48°$

$y = 75 - x$

$y = 75 - 48$

$y = 27$

Los ángulos miden 48° y 27°

9. *Un ángulo = x*
Otro ángulo = 4x + 20

$$x + 4x + 20 = 180°$$
$$5x = 180 - 20$$
$$x = \frac{160}{5}$$
$$x = 32°$$

Un ángulo mide 32° y el otro 148°

10.
a) *$\angle ADC$ = < b+ < d =35°+ 55°=90°*
b) *$\angle BED$ = 180° − (< b+ < c) = 180° −(35° + 35°) = 120°*
c) *$\angle BEA$ = 90° − < a = 90° − 20° = 70°*
d) *$\angle ABC$ = < a+ < b + < c = 20° + 35° + 35° = 90°*

11. a) *Por cada hora, la manecilla horario recorre un ángulo de 30°, así, en cuatro horas recorre un ángulo de 120°;* b) *El minutero en 1/3 de hora barre un ángulo de 120°*

12. a) *Desde el oeste hasta el noroeste en el sentido del reloj 70°;* **b)** Desde el oeste hasta el sur en el sentido contrario del reloj 45°; **c)** *Desde el suroeste hasta el noroeste en cualquier sentido. En el sentido de las manecillas del reloj es de 90°. En el sentido contrario a las manecillas del reloj es de 270°.*

13. a) *A las 3 en punto, 45°;* **b)** *A las 10 en punto, 60°;* **c)** *A las 5:30 horas, 15°;* **d)** *A las 11:30 horas, 195°.*

14.
a) *$\angle a$ = <c = <f = <g = 43°*
$\angle b$ = <d = <e =$\angle h$ = 137°
b) *$\angle a$ = $\angle c$ = $\angle f$ = $\angle g$ = 60°*
$\angle b$ = $\angle d$ = $\angle e$ = <h = 120°
c) *No, porque para que las rectas sean paralelas los ángulos c y f deben tener la misma medida.*

15.

Figura 1.31
x= 60° y = 120°

Figura 1.32
x= 60° y= 40°

Figura 1.33

$$3x+10+2x+20=180°$$
$$5x=180-30$$
$$x=\frac{150}{5}$$
$$x=30$$

16.

A) Figura 1.34
p = s = t = w = 125°
q = r = u = v = 55°

B) Figura 1.35
2 = 3 = 37° = 7
1 = 4 = 5 = 8 = 143°

C) Figura 1.36

$$7x+35+4x+55=180°$$
$$11x=180-90$$
$$x=\frac{90}{11}$$

Por tanto, los 4 ángulos obtusos son de 92.27 y los 4 ángulos agudos miden 87.72°

Actividad 2

1. a) *El número de triángulos que hay son 6;* **b)** *Hay 3 triángulos rectángulos;* **c)** *Hay 3 triángulos obtusángulos;* d) *Los 6 triángulos son escalenos.*

2. *El otro ángulo mide 60°.*

3. Se puede deducir que el triángulo es equilátero, ya que siendo isósceles, los dos ángulos que forman los lados iguales con el otro lado deben ser iguales. En este caso sería:

$$60°+x+x=180°$$
$$2x=180-60$$
$$2x=120°$$
$$x=60°$$

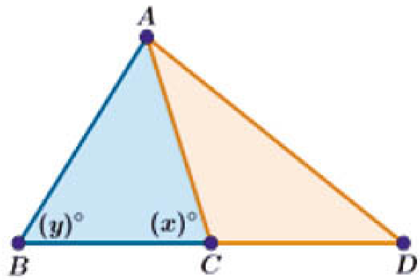
Por lo que los lados también serán iguales.

4. *Si es posible construir un triángulo con ángulos que midan 45°, 45° y 90°, sería un triángulo rectángulo isósceles porque tiene un ángulo recto y al tener dos ángulos iguales sus dos lados también lo son.*

5. *"La suma de los ángulos exteriores de todo triángulo es igual a 360°". Una demostración de este teorema es la siguiente:*

Las tres parejas de ángulos externos e internos son suplementarios, es decir, suman 180°, y al ser tres parejas suman en total 540°, mismos que al restarles los 180° de los tres ángulos interiores nos quedan los 360° dichos en el teorema.

6.



$m\angle BAC = 40°$

$m\angle DAC = 30°$

$m\angle ADC = 50°$

30°+ 50° + ∠ACD = 180°	*∠ACD = 180 – 80 = 100°*
100° + x = 180°	*x = 180 – 100 = 80°*
80° + 40° + y = 180°	*y = 180 – 120 = 60°*

7. *Con la información dada, se deduce que el triángulo ABD es rectángulo y además isósceles, por tanto:* $\overline{AB} = 20\ cm \quad m\angle BAD = 45°$

8.
Figura 1.61
(Columpio)

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{3h}{2} = 4.5$$

$$3h = 9$$

$$h = 3$$

La altura es de 3 m

9.
Figura 1.62

Perímetro:
P = 4(5) = 20 cm

Área:

$$A = 2\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$$

$$A = 2\left[\frac{5(4.3)}{2}\right] = 20.5\ cm^2$$

10.
Figura 1.63

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{0.60(h)}{2} = 0.75$$

$$h = \frac{0.75(2)}{0.60} = \frac{1.5}{0.60} = 2.5$$

La altura es de 2.5 m

Actividad 3

I.

1. *Las rectas* ***paralelas*** *son las que están en el mismo plano y no se intersecan.*
2. *La distancia más corta entre dos puntos es el* ***segmento recto*** *que los une.*
3. *Dos rectas paralelas a una tercera son* ***paralelas*** *entre sí.*
4. *Las paralelas a , comprendidas entre rectas paralelas a ellas son* ***paralelas*** *entre sí.*
5. *Las rectas* ***perpendiculares*** *se cortan formando ángulos adyacentes iguales.*

II.

(A) g y m	*A) Opuestos por el vértice*
(D) d y e	*B) Adyacentes*
(C) a y c	*C) Correspondientes*
(B) p y m	*D) Alternos externos*
(E) f y g	*E) Colaterales internos*
(F) b y o	*F) Colaterales externos*

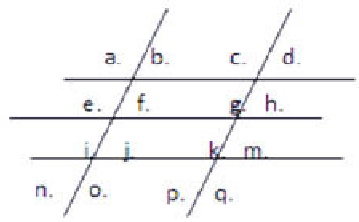


Figura 1.64.

III. Con base en la Figura 1.65, escribe la razón que justifique cada afirmación.

$\hat{1} = \hat{4}$ *por ser* ***opuestos por el vértice***

$\hat{3} + \hat{5} = 180°$ *por ser* ***colaterales internos***

$\hat{2} + \hat{8} = 180°$ *por ser* ***colaterales externos***

$\hat{2} = \hat{7}$ *por ser* ***alternos externos***

$\hat{3} = \hat{6}$ *por ser* ***alternos internos***

$\hat{4} = \hat{8}$ *por ser* ***correspondientes***

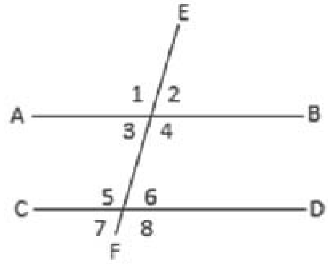


Figura 1.65

IV. Tomando en cuenta las figuras 1.66 y 1.67, escribe el valor de los ángulos pedidos.

a = 85°
b = 95°
c = 95°
d = 85°
e = (4x + 30)°
f = (3x

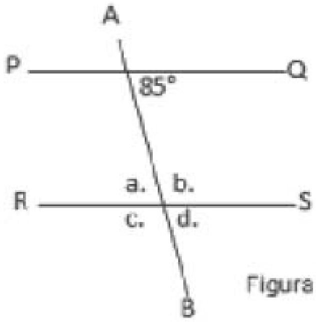


Figura No. 61

PQ || RS

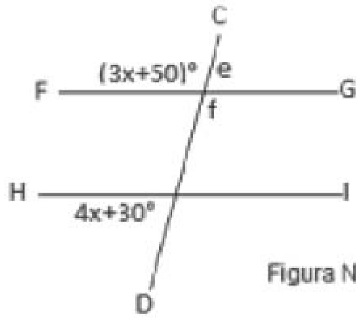


Figura No. 62

FG || HI

V.

1 : 4 : 5

Dividimos el primer ángulo con cada ángulo consecutivo:

$$\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{18°}{72°} = \frac{\cancel{2}x\cancel{9}}{\cancel{2}x4x\cancel{9}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{18°}{90°} = \frac{\cancel{2}x\cancel{9}}{\cancel{2}x5x\cancel{9}} = \frac{1}{5}$$

Respuesta: d) 18°, 72° y 90°

VI. *Los ángulos de la base del $\triangle ABC$ son iguales con un valor de 50°.*

VII.

$60° + 20° + a = 180°$

$a = 180 - 80°$

$a = 100°$

$x + 100° = 180°$

$x = 80°$

$45° + 80° + y = 180°$

$y = 180° - 125°$

$y = 55°$

$125° + z = 180°$

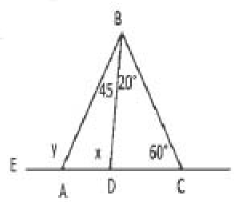
$z = 55°$

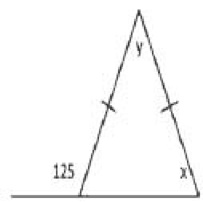
x = 55° por ser un triángulo isósceles

$55° + 55° + y = 180°$

$y = 180° - 110°$

$y = 70°$





VIII.

$x + 40° + 35° = 180°$
$x = 180° - 75°$
$x = 105°$

$y + 110° + 25° = 180°$
$y = 180° - 135°$
$y = 45°$

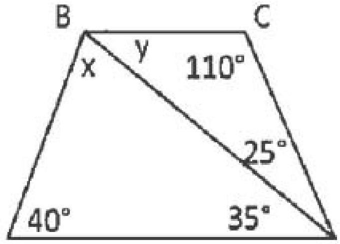


Figura 1.69.

SOLUCIONES DEL BLOQUE II

Para iniciar, reflexiona

a) Dos triángulos son iguales si tienen iguales sus tres lados. ***b)*** *Dos triángulos son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo que forman dichos lados.* ***c)*** *Dos triángulos son iguales si tienen iguales un lado y los dos ángulos contiguos a él.*

Evaluación diagnóstica

1. *Por ser igual su medida, podemos igualar las medidas de su longitud y resolver la igualdad reduciendo términos semejantes y despejando x:*

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$
$$2x + 10 = 5x - 43$$
$$2x - 5x = -43 - 10$$
$$-3x = -53$$
$$x = \frac{-53}{-3}$$
$$x = 17.666$$

2. *Sustituimos los valores de cada variable en las expresiones algebraicas y realizamos las operaciones que nos indican:*

a) $2x + y - 3z =$

$$2\overbrace{(a + 2b - 5)}^{x} + \overbrace{(2a + b - 1)}^{y} - 3\overbrace{(a - 3b)}^{z} = 2a + 4b - 10 + 2a + b - 1 - 3a + 9b = a + 14b - 11$$

b) $xz + xy =$

$$\overbrace{(a + 2b - 5)}^{x}\overbrace{(a - 3b)}^{z} + \overbrace{(a + 2b - 5)}^{x}\overbrace{(2a + b - 1)}^{y} = (a + 2b - 5)[(a - 3b) + (2a + b - 1)]$$
$$= (a + 2b - 5)(3a - 2b - 1) = 3a^2 - 2ab - a + 6ab - 4b^2 - 2b - 15a + 10b + 5$$
$$= 3a^2 - 4b^2 - 16a + 8b + 4ab + 5$$

3. *Sea $3x+2y=12$ la primera ecuación y $2x-y=1$ la segunda ecuación, despejando y de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera ecuación se tiene:*

$$y = 2x - 1$$
$$3x + 2(2x - 1) = 12$$
$$3x + 4x - 2 = 12$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

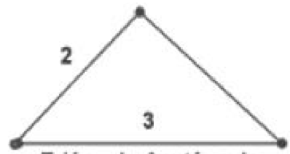
Sustituyendo el valor de x en y

$$y = 2(2) - 1$$
$$y = 3$$

La coordenada del punto que representa a la biblioteca en el bachillerato es (2,3).

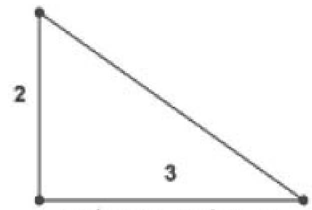
4.

a) *Para que tres segmentos formen un triángulo, cada lado debe ser menor que la suma de sus otros dos lados y mayor que la diferencia es decir: 3 + 2 > x > 3 − 2, 5 > x > 1. Esto significa que el tercer lado puede medir de 5 a 1 unidad. Respuesta: 2 tipos de triángulos.*



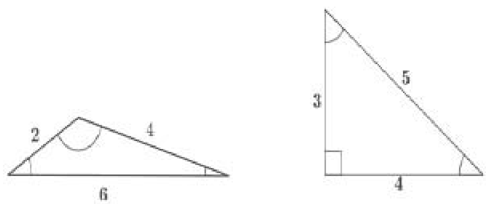
Triángulo Acutángulo

b) *No, depende de la suma de dos de sus lados. Esto significa que el tercer lado puede medir de 5 a 1 unidad. También se debe considerar que la suma de dos de sus lados sean mayor.*

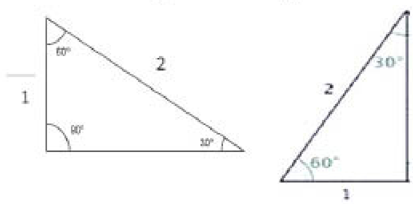


Triángulo rectángulo

5. *No, porque sus tres lados y sus ángulos no son iguales.*



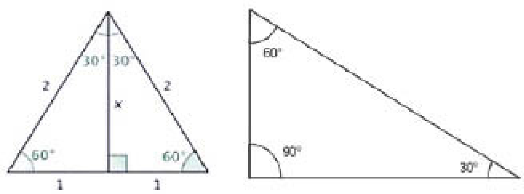
6. *Si, porque sus tres lados y sus tres ángulos son iguales.*



7.

a) *30 triángulos*

b) *Son dos triángulos isósceles que tienen sus tres lados y sus tres ángulos iguales.*



Actividad 1

1. *Como los triángulos ABC y DEF son congruentes, entonces:*

$x + y = 3 .... [1]$

$x + 2y = 5 .... [2]$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:
Despejando de la primera ecuación y:

$y = 3 - x$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$x + 2(3 - x) = 5$

Despejando x:

$x - 2x = 5 - 6$

$-x = -1$

$x = 1$

Sustituyendo x=1 en la primera ecuación:

$1 + y = 3$

$y = 3 - 1$

$y = 2$

2. *Puesto que la velocidad con que caminan ambas personas es la misma, se cumple el criterio de congruencia lado, lado, lado. Sí son congruentes los dos triángulos descritos en las trayectorias de ambas personas.*

3. *Los ángulos alternos internos entre paralelas sí son congruentes, porque pertenecen al mismo grupo de cuatro ángulos. Recuera que, al cortar dos rectas paralelas por una secante se forman ocho ángulos.*

4. *Como* $\overline{AB} = \overline{BC}$

Entonces:

$2a - 20 = 50$

$a = \frac{70}{2}$

$a = 35$

También, $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$
Por tanto:

$b - 10° = 30°$

$b = 40°$

5. *Como* $\Delta I \cong \Delta II$,

$2x = 24$

$x = \frac{24}{2} = \frac{\cancel{2}x12}{\cancel{2}}$

$x = 12$

$3y = 60$

$y = \frac{60}{3} = \frac{\cancel{3}x20}{\cancel{3}}$

$y = 20$

6. *Como* $\Delta I \cong \Delta II$,

$x - 6 = 3y + 6 .... [1]$

$x = 4y .... [2]$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:
Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación:

$4y - 6 = 3y + 6$

Despejando y :

$4y - 3y = 6 + 6$

$y = 12$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$x = 4(12)$

$x = 48$

7. *Traza la figura descrita y observarás que:*

$\overline{AP} = \overline{DQ}$ *y* $\overline{AR} = \overline{RD}$

Además los ángulos con vértices en A y en D son rectos (de 90°). Se cumple el criterio de congruencia lado, ángulo, lado para los *triángulos ΔAPR y ΔDQR, por tanto, son congruentes.*

8. *Como $\overline{AE} = \overline{CF}$; $\overline{BE} = \overline{57}$*
Entonces:
Sustituyendo los valores en las igualdades, se nos forman dos ecuaciones:

$5a + b = 19$.........................[1]

$10a - 2b = 57$.....................[2]

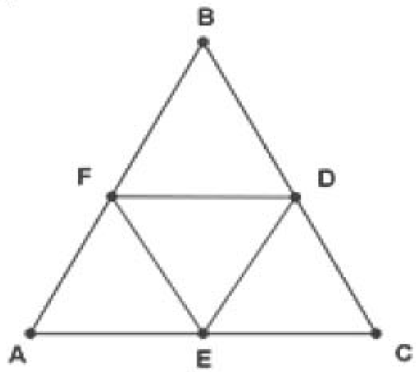
Resolvemos las ecuaciones por el método de suma y resta multiplicamos la ecuación 1 por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{rl} & 2(5a) + \cancel{2b} = 38 \\ + & \underline{10a - \cancel{2b} = 57} \\ & 20a \qquad = 95 \end{array}$$

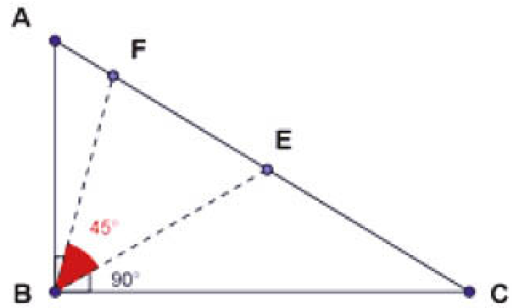
$$a = \frac{95}{20} = \frac{\cancel{5}x19}{4x\cancel{5}} = \frac{19}{4}$$

$a = 4.75$

9. *Los triángulos ΔAFD, ΔECF y ΔBDE son congruentes, puesto que AD, BE y CF son las tres alturas del triángulo equilátero, y por ello iguales. Los otros dos lados de cada triángulo también son iguales puesto que se construyen teniendo como extremos los puntos medios de los lados del triángulo ΔABC.*



Ejercicio 10. Se recomienda trazar el triángulo suponiendo valores. Al formarse dos triángulos rectángulos isósceles, el $\measuredangle EBF$ mide 45°.



11. Inciso a. *Lados-ángulo*

12. *La afirmación verdadera es la del inciso a) "Se conocían las medidas de los dos lados y el ángulo entre ellos".*

13. *La afirmación verdadera es la del inciso b)"Todos los lados de ambos triángulos son iguales entre sí".*

14. *La suma de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°, por tanto:*

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

$40° + x + 18° + 4x + 12° = 180°$

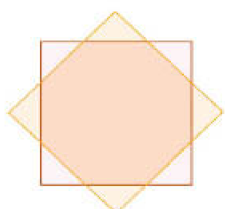
$5x + 70° = 180°$

$x = 22°$

Entonces:

$B = 40°$ y $C = 100°$

15. *Los triángulos que se forman cumplen el criterio de congruencia lado, ángulo, lado, puesto que el octágono es regular y son triángulos rectángulos.*



SOLUCIONES DEL BLOQUE III

Evaluación diagnóstica

1. *Juan compra* $\frac{10}{2}=5$ *dulces. David compra* $\frac{40000}{8000}=5$ *computadoras.*

Las cantidades calculadas son las mismas, lo que indica que los datos son proporcionales.

2. *A través del uso de triángulos semejantes, formados por la sombra de la casa y un objeto de altura conocida.*

3. *Considerando los escalones de la misma altura, cada escalón tendría* $\frac{252}{14}=18$ *cm de altura.*

4. *Solución:* $\frac{75}{250}=0.3$. *Respuesta: La razón de la altura a la base del pizarrón es de 0.3*

5. *Solución:* $\frac{30}{50}=0.6$. *Respuesta: La razón de la hembras a los machos en la pecera es de 0.6*

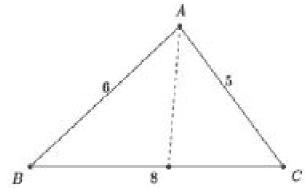
6. *Solución:* $\frac{2}{1.5}=1.33$. *Respuesta: La razón entre la altura y el ancho de la fotografía es de 1.33*

7. *Solución:* $\frac{10}{50}=\frac{x}{75} \Rightarrow x=75\left(\frac{10}{50}\right)=15$.
Respuesta: Se requerirán 15 mg de medicamento.

8. *Solución:* $\frac{12}{4}=\frac{42}{x} \Rightarrow x=4\left(\frac{42}{12}\right)=14$
Respuesta: Deben colocarse 14 mesas para fumadores.

Actividad 1

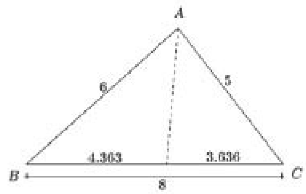
1. *Dibujamos el triángulo y trazamos su bisectriz. Posteriormente calculamos la proporción por lado.*



la proporción de los segmentos

$$=\frac{BC}{AB+AC}=\frac{8}{6+5}=\frac{8}{11}=0.727$$

$$0.7272(6)=4.363$$
$$0.7272(5)=3.636$$



Los segmentos medirán 4.3632 y 3.636 aproximadamente.

2. *Un procedimiento consiste en trazar triángulos semejantes con ayuda de la escuadra y la sombra del edificio.*

3.

a) $x=3\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{3(4)}{9}=\frac{4}{3}$

b)
$$16(1)=x(x)$$
$$16=x^2$$
$$\sqrt{16}=\sqrt{x^2}$$
$$\pm 4=x$$
$$x=\pm 4$$

c) $5(6)=7a$

$\frac{30}{7}=a$

$a=\frac{30}{7}$

d) $a(a-1)=1(2)$

$a^2-a=2$

$a^2-a-2=0$

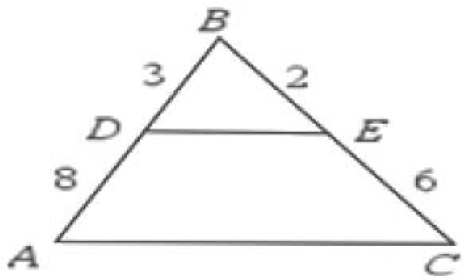
$(a-2)(a+1)=0$

$a-2=0 \qquad a_1=2$

$a+1=0 \qquad a_2=-1$

4.
Figura 3.8.

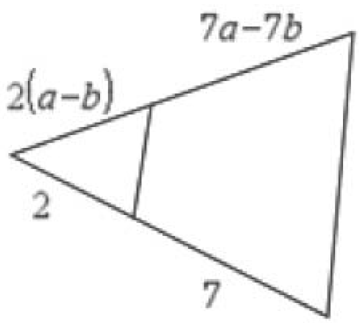
a)



Las rectas no son paralelas porque no se cumple la igualdad:

$$\frac{3}{8}=\frac{2}{6}$$

b)



$$\frac{2}{7}=\frac{2(a-b)}{7a-7b}\Rightarrow\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\frac{\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a-b)}}\Rightarrow\frac{2}{7}=\frac{2}{7}$$

En este caso las rectas son proporcionales, es decir son rectas paralelas

5. Solución:

$\frac{x}{3}=\frac{x+2}{4.5}$

$4.5x=3(x+2)$

$4.5x=3x+6$

$4.5x-3x=6$

$1.5x=6$

$x=\frac{6}{1.5}=4$

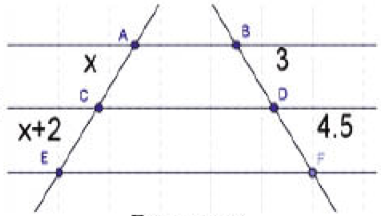


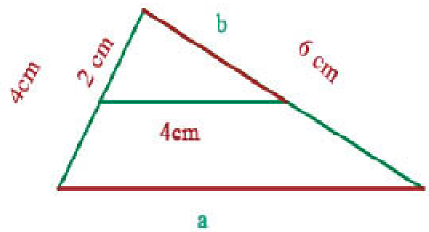
Figura 3.10.

Si $x=4$, *entonces*

$\overline{AE}=x+x+2=4+4+2=10$

Actividad 2

1. *En efecto, "si una recta une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces es paralela al tercer lado e igual a la mitad de su longitud". Sólo basta observar la siguiente figura para notar que con la recta que une los puntos medios se forman dos triángulos semejantes, los cuales tienen sus tres ángulos congruentes entre sí; por tanto, dicha recta es paralela al tercer lado restante.*



2.

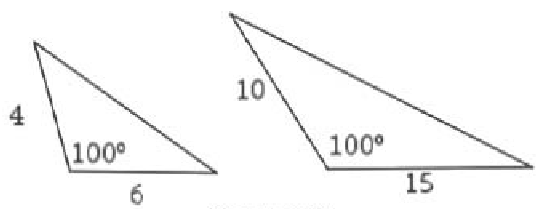


Figura 3.18

Criterio 2: lal (lado-ángulo-lado)

Si dos triángulos tienen un par de lados proporcionales y el ángulo comprendido entre esos lados es congruente en ambos casos, los triángulos son semejantes. Como los dos ángulos son iguales y los lados son proporcionales porque $\frac{4}{6}=\frac{10}{15}$, *entonces los triángulos son semejantes.*

5. *Por el criterio 1: III (lado-lado-lado) Si los tres lados de un triángulo son proporcionales, éstos son semejantes.*
Entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}\Rightarrow\frac{27}{135}=\frac{32}{160}$$
$$=\frac{40}{200}\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

Los triángulos son semejantes.

6. *La razón de semejanza es:*

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3}=\frac{12}{6}$$

7.

$$\frac{3.50}{1.75}=\frac{s}{8.25}\rightarrow s=\frac{3.50(8.25)}{1.75}\rightarrow s$$
$$=\frac{28.875}{1.75}\rightarrow s=16.50$$

La sombra que proyectará el poste es de 16.50 m

8.

$$\frac{45}{20}=\frac{x}{30}\rightarrow x=\frac{45(30)}{20}\rightarrow x$$
$$=\frac{1350}{20}\rightarrow x=67.5$$

La sombra que proyectará el árbol será de 67.5 m

9.

$$\frac{95}{650}=\frac{E}{11.60}\Rightarrow E=\frac{95(11.60)}{650}\Rightarrow E$$
$$=\frac{1102}{650}\Rightarrow E=1.69$$

La estatura del hombre es de 1.69 m

10.

$$\frac{A}{50.4}=\frac{2.54}{4.21}\Rightarrow A=\frac{2.54(50.4)}{4.21}\Rightarrow A$$
$$=\frac{128.016}{4.21}\Rightarrow A=30.40$$

La antena mide 30.40 m

11.

$$\frac{T}{79.42}=\frac{3.05}{5.62}\Rightarrow T=\frac{3.05(79.42)}{5.62}\Rightarrow T$$
$$=\frac{242.231}{5.62}\Rightarrow T=43.10$$

La torre mide 43.10 m

Actividad 3

1.

La diagonal mide:

$$d=\sqrt{70^2+40^2}=\sqrt{4900+1600}$$
$$=\sqrt{6500}=80.62$$

La caminata diaria por la diagonal es: 4(80.62 m) **=** *322.48 m*

Por la orilla caminaría: 4(70 + 40) = 440 m
Por lo que la distancia que ahorra en su caminata diariamente es de:

$$440\ m - 322.48\ m = 117.52\ m$$

2.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$$
$$b = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{4^2}{2}} = \sqrt{8}$$

El área será de:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{4\sqrt{8}}{2} = 2\sqrt{8}$$

3. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$a = \sqrt{9^2 + 12^2}$$
$$a = \sqrt{81 + 144}$$
$$a = \sqrt{225}$$
$$a = 15$$

La hipotenusa del triángulo tiene una longitud de 15.

4. *Aplicando el teorema de Pitágoras:*

$$x = \sqrt{15^2 - 14^2}$$
$$x = \sqrt{225 - 196}$$
$$x = \sqrt{29}$$

La distancia perpendicular del centro a la cuerda es de $\sqrt{29}$

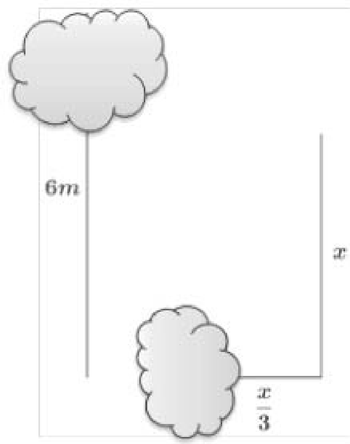
5. *Aplicando el teorema de Pitágoras:*

$$x = \sqrt{24^2 - 10^2} = \sqrt{576 - 100} = \sqrt{476}$$

El área del rectángulo es:

$$A = bh \qquad A = 10\sqrt{476}\ cm^2$$

6. *Cuando el árbol se rompe, una parte queda en pie y la otra cae al suelo. Si a la parte vertical le asignamos la variable x y a la parte horizontal le asignamos el valor de x/3, podemos sumar las partes del árbol e igualarlas a la altura de 6 m y realizamos las operaciones necesaria para encontrar el valor de x.*



altura = parte horizontal + parte vertical

$$6 = \frac{x}{3} + x$$
$$6 = \frac{4}{3}x$$
$$x = \frac{18}{4}$$
$$x = 4.5\ m$$

7.

a) *Aplicando el teorema de Pitágoras:*

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$10^2 = 8^2 + 6^2$$
$$100 = 64 + 16$$
$$100 = 100$$

b) *Aplicando el teorema de Pitágoras*

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$2^2 = 1^2 + 1^2$$
$$4 \neq 2$$

Esta terna de valores no corresponde a un triángulo rectángulo.

c) *Aplicando el teorema de Pitágoras:*

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 + 2^2$$
$$4(2) = 4 + 4$$
$$8 = 8$$

d) *Aplicando el teorema de Pitágoras*

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$100^2 = 60^2 + 80^2$$
$$10000 = 3600 + 6400$$
$$10000 = 10000$$

8. *Aplicando el teorema de Pitágoras:*

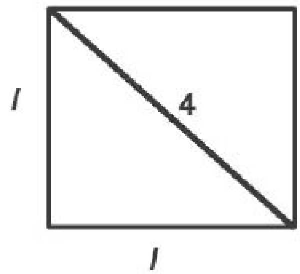
a) $h = \sqrt{z^2 - 4}$, $z = \sqrt{h^2 + 4}$

b) $z = \sqrt{h^2 + 9}$, $x = \sqrt{64 - h^2}$

c) $h = \sqrt{z^2 - 81}$, $x = \sqrt{h^2 + x^2}$

10. *Si dibujamos el cuadrado y trazamos una diagonal, observamos que se forma un triángulo rectángulo isósceles, donde sus lados son del mismo valor y su hipotenusa es de 4 cm.*

Aplicando el teorema de Pitágoras encontramos los valores de sus lados.



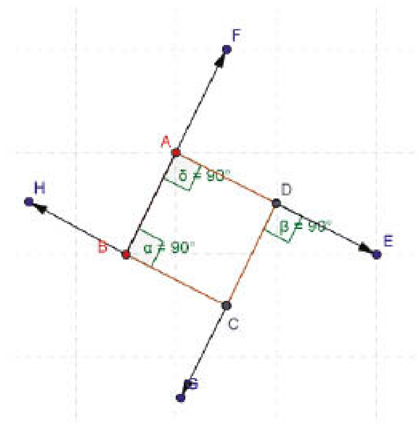
$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$
$$l = \sqrt{\frac{d^2}{2}}$$
$$b = \sqrt{\frac{4^2}{2}} = \sqrt{8}$$
$$b = 2.83 \text{ cm}$$

SOLUCIONES DEL BLOQUE IV

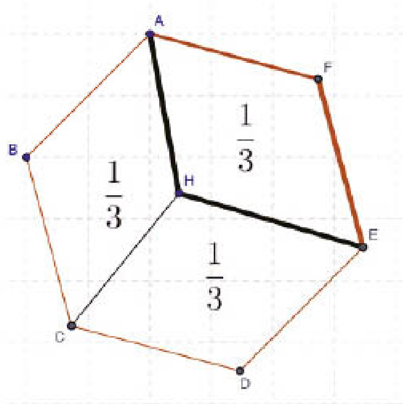
Evaluación diagnóstica

CASO 1. *Pueden tener dos opciones que los polígonos sean:*

a) Un cuadrado
b) Un rectángulo



CASO 2. *El hexágono se tiene que dividir en 3 secciones, trazando 3 de sus radios, dejando un vértice libre entre cada sección, transformándose el hexágono en un cubo.*



CASO 3.

Área del terreno que se vende

$A_{terreno} = b \cdot h$

Donde:

$b = base$

$h = altura$

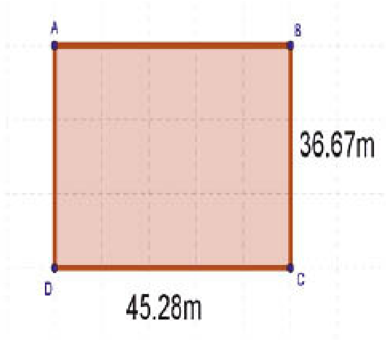
$A_{terreno} = (45.28\ m)(36.67\ m) = 1660.42\ m^2$

Área del terreno que queda

$= 10{,}000 - 1{,}660.42$

Área del terreno que queda

$= 8{,}339.58\ m^2$

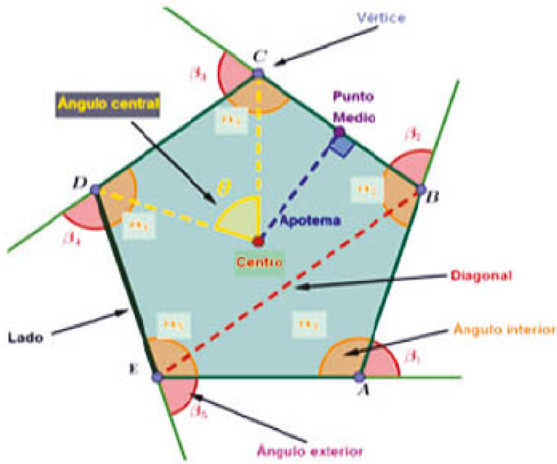


Acti- **vidad**

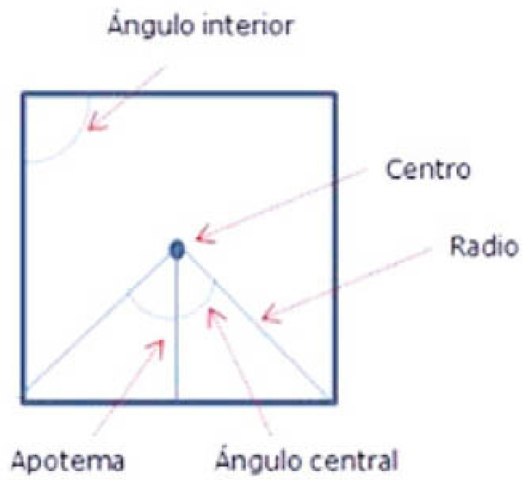
1

Solución: Comparando un cuadrado y el pentágono.

PENTÁGONO: figura geométrica de 5 lados iguales entre sí (si es pentágono re-gular) o diferentes (si es pentágono irregular), con ángulos obtusos y 5 vértices.



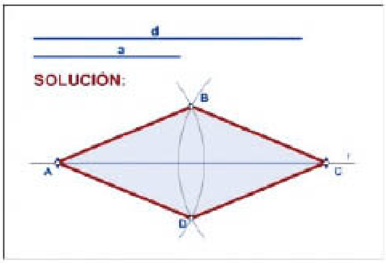
CUADRADO: figura geométrica regular de 4 lados iguales perpendiculares 2 a 2, con 4 ángulos rectos (90º cada uno).



Actividad 2

Construir un rombo conocidos una diagonal y su lado. Pasos:

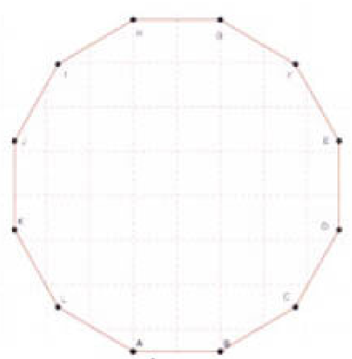
- *Se coloca la diagonal sobre una recta r cualquiera. Se obtienen los puntos A y C.*
- *Con el lado A como radio, se trazan dos arcos desde A y C. Obtenemos los puntos B y D.*
- *Se unen los extremos de la diagonal (A y C) con los puntos hallados (B y D) y se obtiene el rombo.*



Actividad 3

1. *Un dodecágono es un polígono de:*

- *12 vértices*
- *12 lados*
- *12 ángulos interiores*
- *12 ángulos exteriores*
- *12 ángulos centrales*


Dodecágono

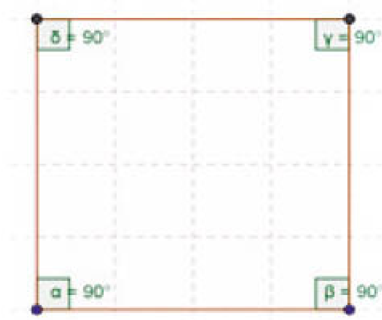
2. *Un heptágono es un polígono de:*

- *7 vértices*
- *7 lados*
- *7 ángulos interiores*
- *7 ángulos exteriores*
- *7 ángulos centrales*

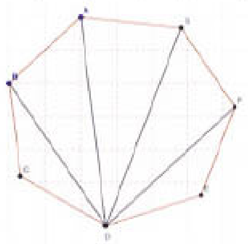
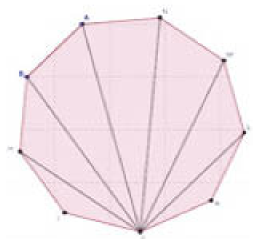
Heptágono

3. *Un cuadrado es un polígono de:*

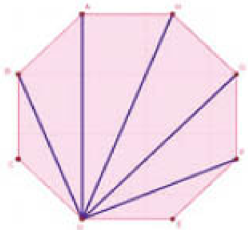
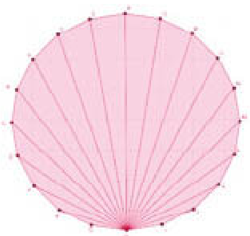
- *4 vértices*
- *4 lados*
- *4 ángulos interiores*
- *4 ángulos exteriores*
- *4 ángulos centrales*



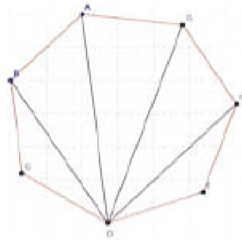
Actividad 4

Polígonos	Núm. de diagonales desde un vértice: $n_D = n - 3$	Núm. de diagonales totales $n_D = \frac{n(n-3)}{2}$
1. y 2. (Heptágono) 	$n_D = 9 - 3 = 6$	$n_D = \frac{7(7-3)}{2} = 14$
3. y 4. (Nonágono) 	$n_D = 9 - 3 = 6$	$n_D = \frac{10(10-3)}{2} = 35$
5. y 6. (Decágono) 	$n_D = 10 - 3 = 7$	$n_D = \frac{10(10-3)}{2} = 35$
7. y 8. (Undecágono) 	$n_D = 11 - 3 = 8$	$n_D = \frac{11(11-3)}{2} = 44$

Actividad 5

Polígonos	Núm. de diagonales desde un vértice: $n_D = n - 3$	Núm. de diagonales totales $n_D = \frac{n(n-3)}{2}$
1. *Octágono 8 lados* 	$n_D = 8 - 3 = 5$	$n_D = \frac{8(8-3)}{2} = 20$
2. *Decágono 10 lados* 	$n_D = 10 - 3 = 7$	$n_D = \frac{10(10-3)}{2} = 35$
3. *Dodecágono 12 lados* 	$n_D = 12 - 3 = 9$	$n_D = \frac{12(12-3)}{2} = 54$
4. *Icoságono 20 lados* 	$n_D = 20 - 3 = 17$	$n_D = \frac{20(20-3)}{2} = 170$

5. *Heptágono*



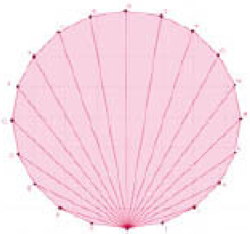
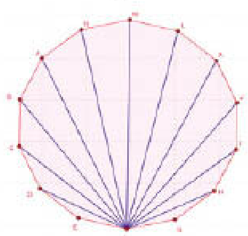
Se observan 5 triángulos

$n_t = n - 2$

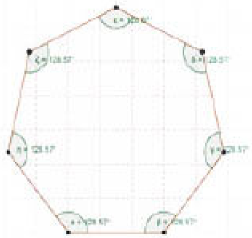
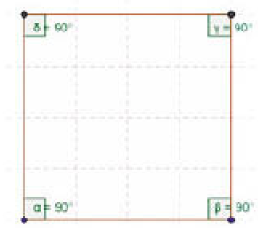
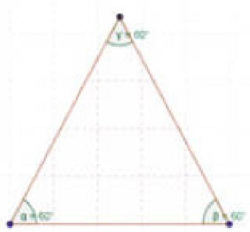
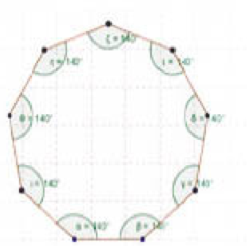
Fórmula para calcular el número de triángulos desde un vértice.

$n_t = 7 - 2 = 5$

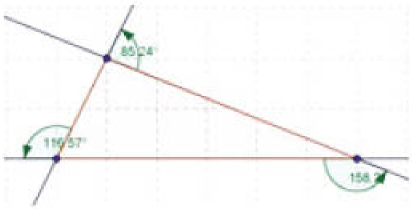
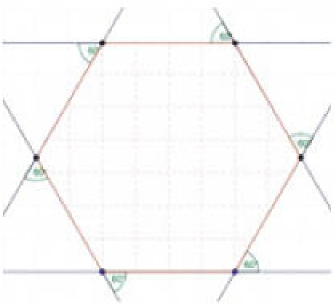
Actividad 6

Polígonos	Núm. de diagonales desde un vértice: $n_D = n - 3$	Fórmula para calcular el número de triángulos desde un vértice $n_t = n - 2$
1. *Icoságono 20 lados* 	$n_D = 20 - 3 = 17$	$n_t = 20 - 2 = 18$
2. *Dodecágono 12 lados* 	$n_D = 12 - 3 = 9$	$n = 12 - 2 = 10$
3. *Tetradecágono 13 lados* 	$n_D = 14 - 3 = 11$	$n_t = 14 - 2 = 12$

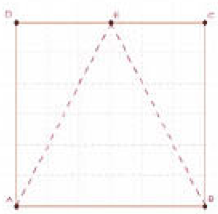
Actividad 7

Polígonos	La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono está dada por la expresión $S_{\angle_i} = 180°(n-2)$
1. *Heptágono 7 lados*	
	$S_{\angle_i} = 180°(7-2)$ $S_{\angle_i} = 900°$
2. *Cuadrado 4 lados*	
	$S_{\angle_i} = 180°(4-2)$ $S_{\angle_i} = 360°$
3. *Triángulo 3 lados*	
	$S_{\angle_i} = 180°(3-2)$ $S_{\angle_i} = 180°$
4. *Nonágono o eneágono 9 lados*	
	$S_{\angle_i} = 180°(9-2)$ $S_{\angle_i} = 1260°$

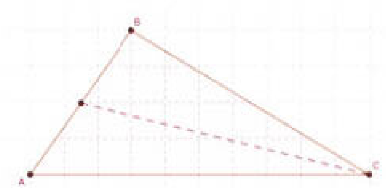
Actividad 8

Polígonos	La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono es 360°. $S\angle_e = 360°$
1. *Triángulo escale* 	$S\angle_e = 360°$
2. *Hexágono 6 lados* 	$S\angle_e = 6x60°$ $S\angle_e = 360°$

Actividad 9

Polígonos	Núm. de diagonales desde un lado: $n_D = n - 2$	Fórmula para calcular el número de triángulos desde un punto de un lado $n_t = n - 1$
1. *Cuadrado 4 lados* 	$n_D = 4 - 2$ $n_D = 2$	$n_t = 4 - 1$ $n_t = 3$

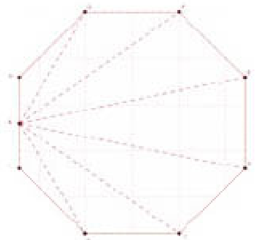
2. *Triángulo 3 lados*



$n_D = 3 - 2$
$n_D = 1$

$n_t = 3 - 1$
$n_t = 2$

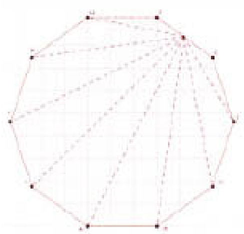
3. *Octágono 8 lados*



$n_D = 8 - 2$
$n_D = 6$

$n_t = 8 - 1$
$n_t = 7$

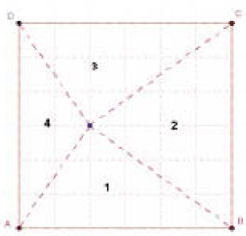
4. *Decágono 10*



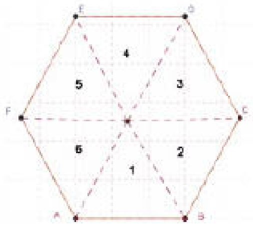
$n_D = 10 - 2$
$n_D = 8$

$n_t = 10 - 1$
$n_t = 9$

Actividad 10

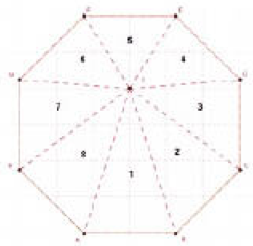
Polígonos	Núm. de diagonales desde un punto interior con los vértices: $n_D = n$	Fórmula para calcular el número de triángulos desde un punto un punto interior con los vértices: $n_t = n$
1. *Cuadrado 4 lados* 	$n_D = n$ $n_D = 4$	$n_t = n$ $n_t = 4$

2. *Hexágono 6 lados*



$$n_D = n \qquad n_t = n$$
$$n_D = 6 \qquad n_t = 6$$

3. *Octágono 8 lados*



$$n_D = n \qquad n_t = n$$
$$n_D = 8 \qquad n_t = 8$$

Actividad 11

1.

Área de un triángulo: $A = \dfrac{base \cdot altura}{2} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Despejando b: $b = \dfrac{2 \cdot A}{h}$

Sustituyendo A y h: $b = \dfrac{2(88)}{25}$

Resolviendo: $b = \dfrac{176}{25}$

$b = 7.04\ cm$

2.

Área de un octágono: $A = \dfrac{Perímetro \cdot apotema}{2} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

Despejando: $a = \dfrac{2 \cdot A}{P}$

Sustituyendo A y P: $a = \dfrac{2(1256)}{300}$

Resolviendo: $a = \dfrac{628}{75}$

$a = 8.37\ cm$

3.

A las medidas de la cancha de fútbol se les suma dos veces el ancho de la pista

$largo_{terreno} = 120 + 2(8) = 136\ m$

$ancho_{terreno} = 60 + 2(8) = 76\ m$

Obtenemos:

$\text{Área de la cancha} = A_{cancha} = largo_{cancha} \cdot ancho_{cancha}$

Sustituyendo largo y ancho: $A_{cancha} = 120 \cdot 60$

Resolviendo: $A_{cancha} = 7200\ m^2\ (cancha)$

$\text{Área del terreno} = A_{terreno} = largo_{terreno} \cdot ancho_{terreno}$

Sustituyendo largo y ancho: $A_{terreno} = 136 \cdot 76$

Resultado: $A_{terreno} = 10336\ m^2\ (terreno)$

Área de la pista:

$A_{pista} = A_{terreno} - A_{cancha}$

$A_{pista} = 10336\ m^2 - 7200\ m^2$

Resultado: $A_{pista} = 3136\ m^2\ (pista)$

4.

Calculamos:

Área del auditorio: $A_{auditorio} = \dfrac{n \cdot l^2}{4\tan\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$

Sustituyendo l y n: $A_{auditorio} = \dfrac{6 \cdot (40)^2}{4\tan\left(\dfrac{180°}{6}\right)}$

Resolviendo: $A_{auditorio} = 4156.92\ m^2$

Obtenemos área para butacas

$A_{butacas} = A_{auditorio} - A_{reserva}$

$A_{butacas} = 4156.92 - 500$

$A_{butacas} = 3656.92\ m^2$

$\text{Núm. de butacas} = \dfrac{\text{Área para butacas}\,(A_{butacas})}{\text{Área de cada butaca}}$

$\text{Núm. de butacas} = \dfrac{3656.92\ m^2}{2.5\ m^2}$

$\text{Núm. de butacas} = 1462$

5.

Calculamos:

Área de la loseta:

$A_{loseta} = largo_{loseta} \cdot ancho_{loseta}$

$A_{loseta} = (0.20)(0.20)$

$A_{loseta} = 0.04\ m^2$

Área del teatro:

$A_{teatro} = n\left(\frac{l \cdot a}{2}\right)$

Donde:

$n =$ *número de lados*

$l =$ *longitud de cada lado*

$a =$ *apotema*

$A_{teatro} = 8\left(\frac{25 \cdot 15}{2}\right)$

$A_{teatro} = 1500\ m^2$

Obtenemos:

$\text{Núm. de losetas} = \frac{\text{Área del teatro}\,(A_{teatro})}{\text{Área de cada loseta}}$

$\text{Núm. de losetas} = \frac{1500\ \cancel{m^2}}{0.04\ \cancel{m^2}}$

$\text{Núm. de losetas} = 37500\ \text{piezas}$

SOLUCIONES DEL BLOQUE V

Evaluación diagnóstica

1. *Vamos a encontrar el área del cuadrado externo de forma directa y la vamos a calcular a través de la suma del área del cuadrado inscrito y de las áreas de los cuatro triángulos que se forman para posteriormente igualarlas:*

Donde el:

Área del cuadrado externo

$A_{externo} = (a+b)^2$

Área del cuadrado inscrito

$A_{interno} = c$

Área del Δabc:

$A_{triángulo} = \frac{a \cdot b}{2}$

Si $A_{externo} = A_{interno} + 4A_{triángulo}$

Sustituyendo valores:

$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$

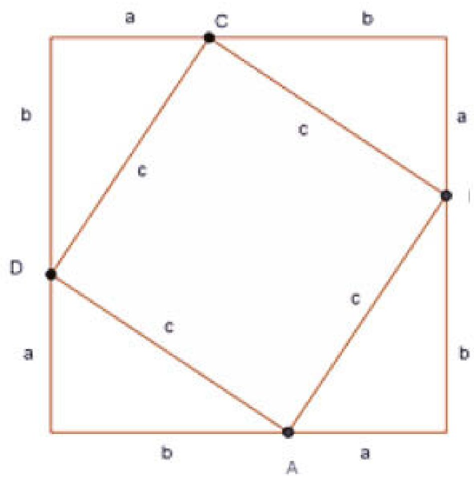
Desarrollando cada lado de la igualdad:

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

Reduciendo términos semejantes:

$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$

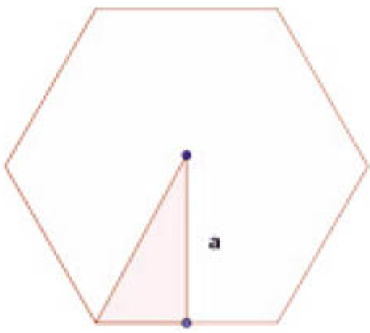
$a^2 + b^2 = c^2 \therefore$ *nos lleva al teorema de Pitágoras*

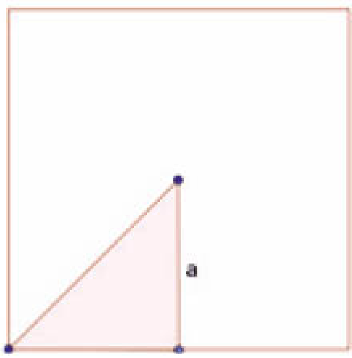


2. *Conocer la medida de los lados (l) y la apotema (a).*

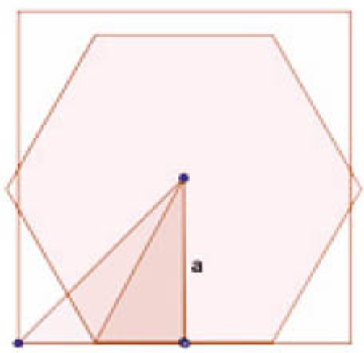
3. *Dibujar el hexágono y el cuadrado con un valor propuesto de apotema a. Posteriormente, sobreponer las figuras para comparar sus áreas, como se muestra a continuación:*

Trazo de figuras con una apotema propuesta:





Comparación de las áreas por sobre posición:



Se concluye: que el área de cuadrado es mayor a la del hexágono.

4. *Con el valor del perímetro se puede obtener el valor de cada lado, ya que por ser un triángulo equilátero, tiene sus tres lados y ángulos iguales por lo que el valor de cada lado se obtiene:*

P = n·l
n = número de lados del triángulo
l = longitud de cada lado

Despejando l, tendremos: $l = \frac{P}{n}$

Sustituyendo P = 32.2 cm y n = 3 lados:

$$l = \frac{P}{n} = \frac{32.2}{3} = 10.73$$

$$l = 10.73\ cm$$

Con el resultado anterior calculamos el área del triángulo:

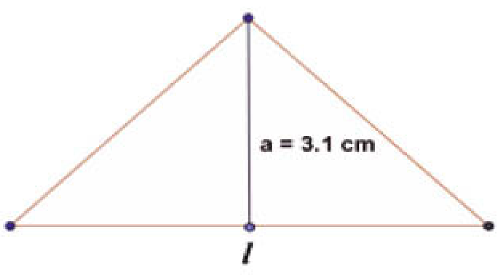
$$A = \frac{l \cdot a}{2}$$

A = área del polígono regular
l = longitud de cada lado
a = apotema

Sustituyendo los valores de
l = 10.73
a = 3.1

$$A = \frac{l \cdot a}{2} = \frac{10.73 \cdot 3.1}{2} = 16.63$$

$$A = 16.63\ cm^2$$



5. *Con la fórmula del área y del perímetro, encontramos el valor de cada lado y del apotema para posteriormente trabajar un triángulo rectángulo como se muestra a continuación:*

Si cada lado mide:

$$l = \frac{P}{n} = \frac{20}{5}$$

$$l = 4\ m$$

Ahora calculamos la apotema:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

A = área del polígono regular
P = perímetro
a = apotema

Despejando a:

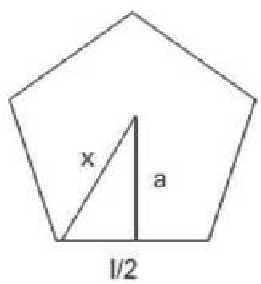
$$a = \frac{2A}{P}$$

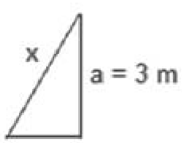
Sustituyendo A = 30 m^2, P = 20 m:

$$a = \frac{2(30)}{20} = 3$$

Realizando operaciones: a = 3 m

Dibujamos un triángulo rectángulo a partir de la figura 5.1:





$$\frac{l}{2} = \frac{4\ m}{2} = 2\ m$$

Aplicando el teorema de Pitágoras encontramos el valor de x:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$x^2 = (3)^2 + (2)^2$$
$$x = \sqrt{9+4}$$
$$x = \sqrt{13}\ m = 3.61\ m$$

6. *Aplicando el teorema de Pitágoras en el primer triángulo hallamos el valor de la hipotenusa "B´":*

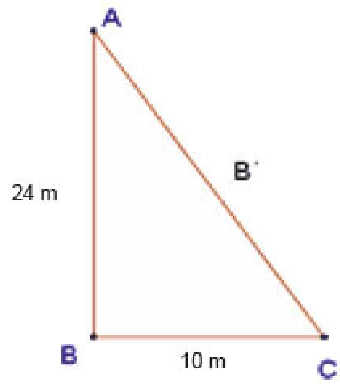


Figura 5.2.

Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$

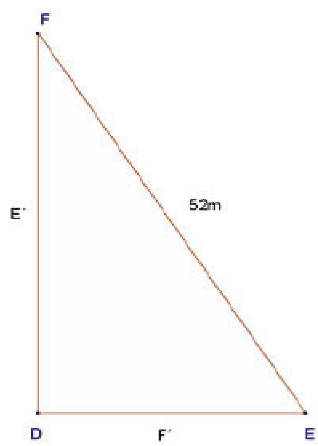
Sustituyendo valores:

$$(B')^2 = (10)^2 + (24)^2$$

Resolviendo:

$$B' = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676}$$

$$B' = 26\ m$$



Por semejanza de triángulos:

Δ *triángulo 1 : Δ triángulo 2*

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{10}{26} : \frac{F'}{52}$$

Despejando F´: $F' = \dfrac{10 \cdot 52}{26}$

Resolviendo: $F' = 20\ m$

Lo anterior se aplica para obtener E´:

Despejando E´: $E' = \dfrac{24 \cdot 52}{26}$

Resolviendo: $E' = 48\ m$

7.

$$A = \frac{nl^2}{4\tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

$n =$ *número de lados*

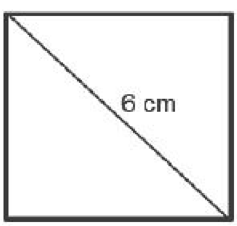
$l =$ *longitud de cada lado*

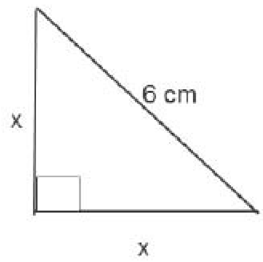
Sustituyendo:

$$A = \frac{nl^2}{4\tan\left(\frac{180°}{n}\right)} = \frac{6 \cdot (45)^2}{4\tan\left(\frac{180°}{6}\right)} = \frac{12150}{2.31}$$

Resolviendo: $A = 5259.74\ cm^2$

8. *Dibujamos un cuadrado con una diagonal de 6 cm y a cada lado le asignamos la letra x, aplicando el teorema de Pitágoras encontramos la longitud de cada lado, para posteriormente calcular el área del cuadrado.*





Teorema de Pitágoras

$c^2 = a^2 + b^2$

sustituyendo $c = 6$:

$(6)^2 = (x)^2 + (x)^2$

$36 = 2x^2$

Despejando: $x = \sqrt{\dfrac{36}{2}}$

Resolviendo: $x = 4.24\ cm$

9.

$$A = n\left(\frac{l \cdot a}{2}\right)$$

$A =$ *área del polígono regular*

$l =$ *longitud de cada lado*

$a =$ *apotema*

$n =$ *número de lados*

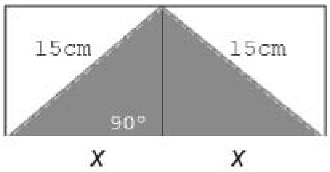
Despejando: $l = \dfrac{2A}{a \cdot n}$

Sustituyendo $A = 80\ cm^2$, $a = 8\ cm$ *y* $n = 8$ *lados:*

$$l = \frac{2 \cdot 80}{8 \cdot 8} = \frac{160}{64}$$

Resolviendo: $l = 2.5\ cm$

10. *Considerando que tenemos un triángulo isósceles (dos lados iguales y uno diferente) aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular los lados del triángulo rectángulo, el cual también es del tipo isósceles.*



$A_{cuadrado} = x^2$

$A_{cuadrado} =$ *área del cuadrado*

$x =$ *longitud de cada lado del cuadrado*

Por el teorema de Pitágoras sabemos:

$c^2 = a^2 + b^2$

Sustituyendo los valores del tríangulos:

$(15)^2 = (x)^2 + (x)^2$

$225 = 2x^2$

Despejando: $x = \sqrt{\dfrac{225}{2}}$

Resolviendo: $x = 10.61\ cm$

Si el área del tríangulo es igual a:

$A_{triángulo} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Donde:

$A_{triángulo} =$ *área del triángulo*

$b =$ *base*

$h =$ *altura*

Sustituyendo $b = 2x$ *y* $h = x$:

$A_{triángulo} = \dfrac{(2x)(x)}{2} = \dfrac{2x^2}{2} = x^2$

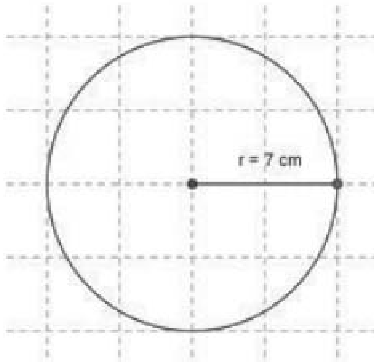
Calculando el área del triángulo:

$A_{triángulo} = (10.61)^2$

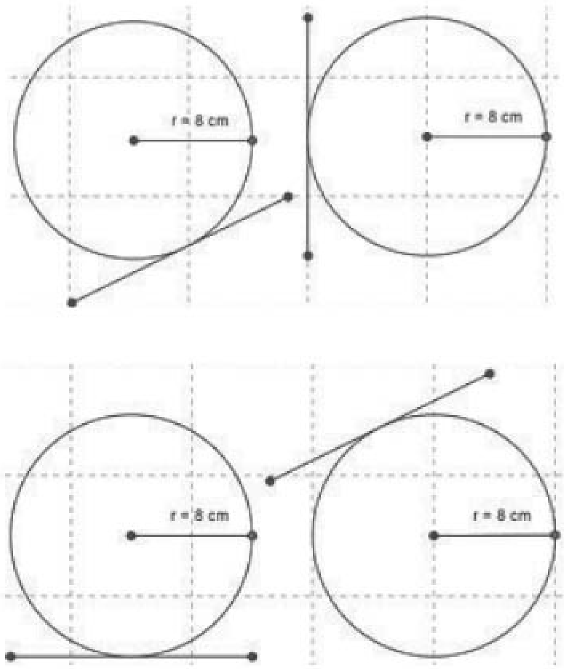
Resolviendo: $A_{triángulo} = 112.57\ cm^2$

Actividad 1

1. *Con apoyo de un compás y una regla o escuadra, traza la circunferencia, colocando tu compás sobre la regla o escuadra, abriéndolo de manera que la distancia de separación de punta a punta marque una medición de 7 cm. Después selecciona un punto sobre tu libreta gira el compás y traza tu circunferencia, la cual queda como la siguiente figura:*



2. *Se muestra cuatro opciones de trazo:*



3. *En una circunferencia se pueden trazar un número infinito de radios y diámetros.*

4. *Por estar formada la circunferencia por un número infinito de puntos, en cada uno de ellos se puede trazar una recta tangente, por lo tanto, el número de rectas tangentes es infinito.*

Radio
Cuerda
Diámetro
Arco

5.

Solución: $d = 2 \cdot r$

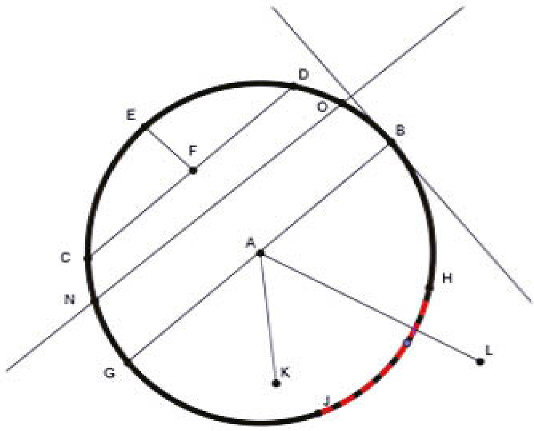
d = diámetro

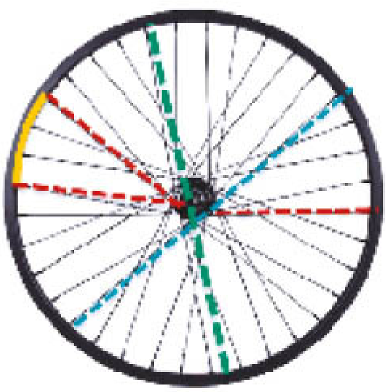
r = radio

Sustituyendo $r = \frac{1}{2}$ cm: $d = \cancel{2} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$

Resolviendo: $d = 1$ cm

6.



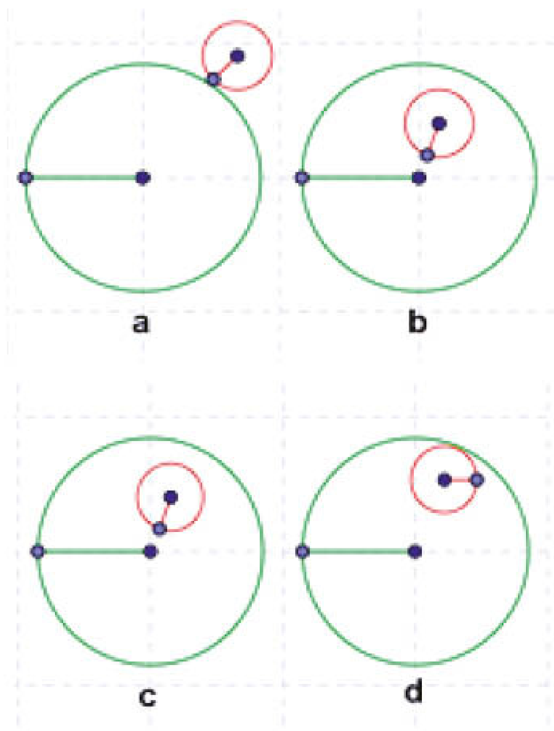


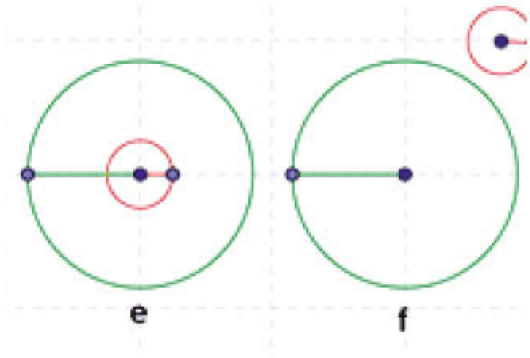
7.

B	=	*Recta tangente o tangente*
ON	=	*Recta secante o secante*
HJ	=	*Arco*
L	=	*Punto exterior*
K	=	*Punto interior*
AB	=	*Radio*
EF	=	*Flecha*
CD	=	*Cuerda*
BG	=	*Diámetro*

Actividad 2

1.





2. *Respuestas en los paréntesis*

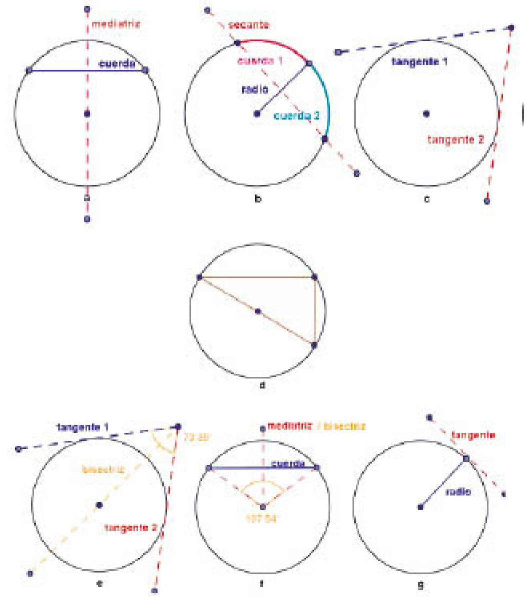
(h)
(k)
(n)
(c)
(j)
(d)
(l)
(i)
(m)
(k)
(a)

Actividad 3

1. *Tomando en cuenta la definición del ángulo central, ángulo interior, ángulo inscrito y semi inscrito se da la respuesta a cada inciso:*

a) 200°
b) 80°
c) 100°
d) 300°
e) 200°
f) 250°
g) 98°
h) 158°
i) 258°
j) 59°

2.



3.

a) Por ser un ángulo central: $\widehat{AB} = 90°$

b) Por ser un ángulo inscrito: $\widehat{CD} = 60°$

c) Por ser un ángulo inscrito: $\widehat{FE} = 70°$

d) Por ser un ángulo interior:

$$\angle GJH = \frac{25° + 80°}{2} = 52.5°$$

e) Por ser un ángulo interior:

$$\angle IMJ = \frac{32° + 22°}{2} = 27°$$

f) Por ser ángulos inscritos:

$$\angle LKM = \frac{65°}{2} = 32.5°, \angle KML = \frac{140°}{2} = 70°,$$

$$\angle MLK = \frac{140°}{2} = 70°$$

g) Por ser un ángulo central: $\widehat{NO} = 135°$

h) Por ser un ángulo semi-inscrito:

$$\angle PJQ = 195° x 2 = 390°$$

i) Por ser un ángulo exterior

$$\angle OHJ = \frac{10° + 25°}{2} = 17.5°$$

j) Por ser un ángulo exterior:

Continúa...

$$\angle MKS = \frac{8^\circ + 34^\circ}{2} = 21^\circ$$

k) Por ser ángulos centrales:

$$\angle WPV = 45^\circ, \angle WPX = 160^\circ,$$

$$\overset{\frown}{XY} = 60^\circ, \overset{\frown}{YV} = 95^\circ$$

Actividad 4

1.

Objeto a medir	Diámetro	Perimetro	Perimetro / Diámetro
Moneda de \$10	*2.7 cm*	$P = 2\pi r = 2\pi(2.7) = 2 \cdot 3.1416 \cdot 2.7$ $P = 16.96 cm$	*16.96 cm / 2.7 cm*
Plato	*20 cm*	$P = 2\pi r = 2\pi(20) = 40 \cdot 3.1416$ $P = 125.66\ cm$	*125.66 cm / 20 cm*
Neumático de bicicleta	*55.9 cm*	$P = 2\pi r = 2\pi(55.9) = 111.8 \cdot 3.1416$ $P = 351.23\ cm$	*351.23 cm / 55.9 cm*
CD	*11.7 cm*	$P = 2\pi r = 2\pi(11.7) = 23.4 \cdot 3.1416$ $P = 73.51\ cm$	*73.51 cm / 11.7 cm*
Vaso desechable	*7.5 cm*	$P = 2\pi r = 2\pi(7.5) = 15 \cdot 3.1416$ $P = 47.12\ cm$	*47.12 cm / 7.5 cm*

2.

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{d^2}{4}\right)$$

$A =$ *área de la circunferencia*

$d =$ *diámetro*

$\pi = Pi\ (3.1416)$

Sustituyendo d = 8 cm:

$$A = \pi\left(\frac{8}{2}\right)^2 = \frac{64\pi}{4} = \frac{\cancel{4} \cdot 16 \cdot 3.1416}{\cancel{4}}$$

Resolviendo: $A = 16\pi\ cm^2 = 50.26\ cm^2$

3.

$P = 2\pi r$

$P =$ *Perímetro* (*longitud de la circunferencia*)

$r =$ *radio*

$\pi = Pi\ (3.1416)$

Sustituyendo r = 5 cm:

$$P = 2\pi(5) = 10\pi = 10 \cdot 3.1416$$

Resolviendo: $P = 10\pi\ cm = 31.42\ cm$

4.

$$P = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)$$

$P =$ *Perímetro* (*longitud de la circunferencia*)

$d =$ *diámetro*

$\pi = Pi\ (3.1416)$

Sustituyendo d = 6 cm:

$$P = 2\pi\left(\frac{6}{2}\right) = 6\pi = 6x3.1416$$

Resolviendo: $P = 6\pi\ cm = 18.85\ cm$

5.

$P = 2\pi r$

$P =$ *Perímetro* (*longitud de la circunferencia*)

$r =$ *radio*

$\pi = Pi\ (3.1416)$

Sustituyendo r = 55 cm:

$$P = 2\pi(55) = 110\pi = 110 \cdot 3.1416$$

Resolviendo:

$$P = 110\pi \ cm = 345.58 \ cm$$

6.

$$A = \pi r^2$$

$A =$ *área de la circunferencia*

$r =$ *radio*

$\pi = Pi \ (3.1416)$

Despejando r: $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

Sustituyendo A= 56 cm²:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{56}{\pi}} = \sqrt{\frac{56}{3.1416}}$$

Resolviendo:

$$r = \sqrt{\frac{56}{\pi}} \ cm = 4.22 \ cm$$

7.

$$A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$A =$ *área de la circunferencia*

$d =$ *diámetro*

$\pi = Pi \ (3.1416)$

Despejando d: $d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

Sustituyendo A = 1524 m²:

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1524}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1524}{3.1416}}$$

Resolviendo:

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{1524}{\pi}} \ m = 44.05 \ m$$

8.

$$A = \pi r^2$$

$A =$ *área de la circunferencia*

$r =$ *radio*

$\pi = Pi \ (3.1416)$

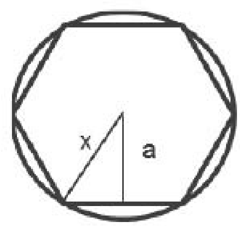
Despejando r: $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

Sustituyendo A = 580 cm²:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{580}{\pi}} = \sqrt{\frac{580}{3.1416}}$$

Resolviendo: $r = \sqrt{\frac{580}{\pi}} \ cm = 13.59 \ cm$

9. *Iniciamos calculando la longitud de cada lado del hexágono. Posteriormente calculamos la apotema y, aplicando el teorema de Pitágoras, hallamos el radio de la circunferencia x, el cual se utiliza en el cálculo del perímetro.*



$$A_{hexágono} = \frac{n \cdot l^2}{4 \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

$A_{hexágono} =$ *área del hexágono*

$l =$ *longitud de cada lado*

$n =$ *número de lados*

Despejando l:

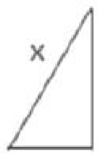
$$l = \sqrt{\frac{A_{hexágono}\left[4 \tan\left(\frac{180°}{n}\right)\right]}{n}}$$

Sustituyendo $A_{hexágono}$ *= 60* cm^2*:*

$$l=\sqrt{\frac{60\left[4\tan\left(\frac{180^\circ}{6}\right)\right]}{6}}=\sqrt{40\tan 30^\circ}$$

Resolviendo: $l = 4.81\ cm$

Dibujamos un triángulo rectángulo a partir de la figura:



$$a=\frac{2\cdot A}{l\cdot n}=\frac{2\cdot 60}{2.4\cdot 6}=8.33\ cm$$

$$\frac{l}{2}=\frac{4.81\ cm}{2}=2.40\ cm$$

Aplicando el teorema de Pitágoras encontramos el valor de x:

$$c^2=a^2+b^2$$
$$x^2=(2.40)^2+(8.33)^2$$
$$x=\sqrt{5.76+69.39}$$
$$x=\sqrt{75.15}\ m=8.67\ m$$

El valor de "x" corresponde al radio de la circunferencia. Procedemos a obtener el perímetro de la circunferencia:

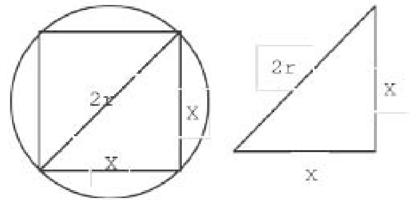
$$P=2\pi r$$
$$P=Perímetro\ (\text{longitud de la circunferencia})$$
$$r=radio$$
$$\pi=Pi\,(3.1416)$$

Sustituyendo r = 8.67 cm:

$$P=2\pi(8.67)=17.34\pi=17.34x3.1416$$

Resolviendo: $P=17.34\pi\ cm=54.47\ cm$

10. *Aplicando el teorema de Pitágoras, para el triángulo rectángulo de la figura, encontramos la relación de los lados del cuadrado con el radio de la circunferencia, generando una relación entre las dos áreas, para posteriormente calcular el área del cuadrado.*



$A_{cuadrado}=x^2$

$A_{cuadrado}=$ *área del cuadrado*

$A_{circunferencia}=$ *área de la circunferencia*

$x=$ *longitud de cada lado del cuadrado*

Por el teorema de Pitágoras sabemos:

$c^2=a^2+b^2$

Sustituyendo los valores del triángulo:

$(2r)^2=(x)^2+(x)^2$

$4r^2=2x^2$

Si $x^2=A_{cuadrado}$*, entonces tenemos:*

$2\cdot\cancel{2}\cdot r^2=\cancel{2}A_{cuadrado}=2r^2=A_{cuadrado}$

Si ahora sabemos que el área de la circunferencia es:

$A_{circunferencia}=\pi r^2$

Sustituyendo $r^2=A_{cuadrado}$*:*

$$A_{circunferencia}=\frac{A_{cuadrado}}{2}\pi$$

Despejando $A_{cuadrado}$*:*

$$A_{cuadrado}=\frac{2\cdot A_{circunferencia}}{\pi}$$

Sustituyendo valores:

$$A_{cuadrado}=\frac{2\cdot 500}{\pi}=\frac{1000}{3.1416}$$

Resolviendo: $A_{cuadrado}=318.31\ cm^2$

11. *Iniciamos hallando el largo de la soga que se enreda en cada vuelta. Después, con la fórmula del perímetro, despejamos el diámetro y calculamos su valor.*

El perímetro de la rueda lo calculamos de la siguiente manera:

$$P = \frac{\text{longitud de la soga}}{\text{número de vueltas}}$$

El perímetro de una circunferencia se calcula:

$$P = \pi d$$

donde :

$P = \text{perímetro}$

$d = \text{diámetro}$

$\pi = Pi\,(3.1416)$

Despejando d:

$$d = \frac{P}{\pi} = \frac{\text{longitud de la soga}}{\pi \cdot \text{número de vueltas}}$$

Sustituyendo valores:

$$d = \frac{25}{\pi \cdot 15} = \frac{5 \cdot \cancel{5}}{\pi \cdot 3 \cdot \cancel{5}} = \frac{5}{3 \cdot 3.1416}$$

Resolviendo: $d = \dfrac{5}{3\pi}\,m = 0.53\ m$

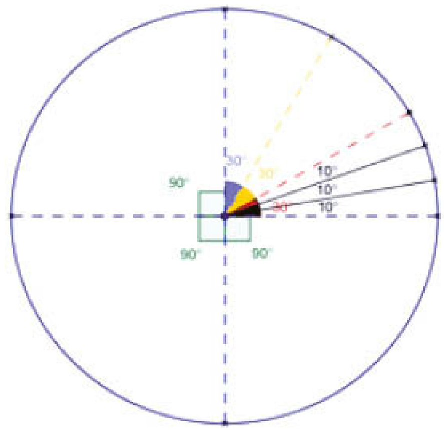
SOLUCIONES DEL BLOQUE VI

Evaluación diagnóstica

I.

1. *d) Figura formada por 2 semirrectas al cortarse.*
2. *b)* πr^2
3. *c) 8*
4. *c) 0.33*
5. *c)* $2\sqrt{2}$

II. *La circunferencia que trazamos debe ser parecida a la siguiente figura:*



Actividad 1

1.

Realizamos operaciones de conversión en los ángulos B y C, para expresarlos sólo en grados:

$B = 54°00'50''$

convertimos los 50'' en grados :

$$50''\left(\frac{1°}{3600''}\right) = 0.014°$$

el valor encontrado lo sumamos a los 54° obtenemos :

$B = 54° + 0.014° = 54.014°$

$C = 76°20'30''$

convertimos los 30'' en grados :

$$30''\left(\frac{1°}{3600''}\right) = 0.008°$$

convertimos los 20' en grados :

$$20'\left(\frac{1°}{60'}\right) = 0.333°$$

los valores encontrado los sumamos a los 76°
obtenemos:

$C = 76° + 0.333° + 0.008° = 76.341°$

Sustituimos el valor de cada ángulo en la expresión algebraica y resolvemos:

$a)\ 2A + B = 2(30°) + 54.014°$
$= 60° + 54.014° = 114.014°$

$b)\ 3C - B = 3(76.341°) - 54.014°$
$= 175.009°$

$c)\ 5A + 2B + C = 5(30°) + 2(54.014°)$
$+ 76.341° = 334.369°$

$d)\ A - C + B = 30° - 76.341° + 54.014°$
$= 7.673°$

2.

Considerando que $180°$ *equivale a* πrad*, procedemos a convertir los radianes a grados*

a) $\dfrac{\pi}{2} rad$

convertimos $\dfrac{\pi}{2} rad$ *en grados*

$$\left(\frac{\cancel{\pi}}{2}\right)\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right) = 90°$$

b) $\dfrac{3\pi}{2} rad$

convertimos $\dfrac{3\pi}{2} rad$ *en grados:*

$$\left(\frac{3\cancel{\pi}}{2}\right)\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right) = 270°$$

c) $\dfrac{5\pi}{4} rad$

convertimos $\dfrac{5\pi}{4} rad$ *en grados :*

$$\left(\frac{5\cancel{\pi}}{4}\right)\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right) = 225°$$

3.

Considerando que πrad *equivale a 180°, procedemos a convertir los radianes a grados.*
Para realizar la conversión es necesario expresar los ángulos solamente en grados :

a) 45°12'

convertimos los $12'$ *en grados:*

$$(12')\left(\frac{1°}{60'}\right) = 0.2°$$

a los $45°$ *les sumamos los* $0.2° \Rightarrow 45.2°$
convertimos los $45.2°$ *en radianes:*

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{45.2°}{x_{rad}}$$

Despejando y realizando opreaciones x :

$$x_{rad} = \frac{(45.2\cancel{°})(\pi)}{180\cancel{°}}$$

$$x_{rad} = 0.7888 rad$$

b) 65°19'35''

convertimos los $35''$ *en grados:*

$$(35'')\left(\frac{1°}{3600''}\right) = 0.0097°$$

convertimos los $19'$ *en grados:*

$$(19')\left(\frac{1°}{60'}\right) = 0.3166°$$

a los $65°$ *les sumamos los*
$0.0097° + 0.3166° \Rightarrow 65.3263°$
convertimos los $65.3263°$ *en radianes:*

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{65.3263°}{x_{rad}}$$

Despejando y realizando operaciones x:

$$x_{rad} = \frac{(65.3263\cancel{°})(\pi)}{180\cancel{°}}$$

$$x_{rad} = 0.1402 rad$$

c) $345^\circ 59' 60''$

convertimos los 60'' en grados:

$$(60'')\left(\frac{1^\circ}{3600''}\right)=0.0166^\circ$$

convertimos los 59' en grados:

$$(59')\left(\frac{1^\circ}{60'}\right)=0.9833^\circ$$

a los 345° les sumamos los

$0.0166^\circ + 0.9833^\circ \Rightarrow 345.9999^\circ$

convertimos los 65.3263°

en radianes:

$$\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{345.9999^\circ}{x_{rad}}$$

Despejando y realizando operaciones x:

$$x_{rad}=\frac{(345.9999\cancel{^\circ})(\pi)}{180\cancel{^\circ}}$$

$$x_{rad}=6.0388\ rad$$

Actividad 2

1.

a) *La razón entre los dos catetos es igual:*

$$\tan\theta=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{5}{5}=1$$

$$ctg\theta=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{5}{5}=1$$

b)

Empleando el teorema de Pitagoras:

$c^2=a^2+b^2$

Relacionando el teorema con los lados del triángulo

$$(\text{hipotenusa})^2=(\text{cateto adyacente})^2+(\text{cateto opuesto})^2$$

Sustituyendo valores y realizando las operaciones:

$$\text{hipotenusa}=\sqrt{(5)^2+(5)^2}=\sqrt{50}$$

c) *La razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa es igual a:*

$$\cos\theta=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{5}{\sqrt{50}}$$

Racionalizando el denominador:

$$\cos\theta=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{5}{\sqrt{50}}\cdot\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}}$$

$$=\frac{5\cdot\sqrt{50}}{50}=\frac{5\cdot\sqrt{25}\sqrt{2}}{5\cdot 5\cdot 2}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{si el } \cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \therefore\ \theta=45^\circ$$

$$\sec\theta=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{\sqrt{50}}{5}$$

$$=\frac{\sqrt{25}\sqrt{2}}{5}=\frac{\cancel{5}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{5}}$$

$$\text{si la } \sec 45^\circ=\sqrt{2}\ \therefore\ \theta=45^\circ$$

d) *Como tan A = 1.5, sus razones trigonométricas son:*

$$\tan A=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{15}{10}=1.5$$

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\text{hipotenusa}=\sqrt{(\text{cateto adyacente})^2+(\text{cateto opuesto})^2}$$

$$\text{hipotenusa}=\sqrt{(10)^2+(15)^2}=\sqrt{325}=$$

$$\sqrt{(25)(13)}=\sqrt{(25)(13)}=5\sqrt{13}$$

$$senA=\frac{15}{5\sqrt{13}}=\frac{15}{5\sqrt{13}}\bullet\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=\frac{3\bullet\cancel{5}\bullet\sqrt{13}}{\cancel{5}\bullet 13}$$

$$=\frac{3\bullet\sqrt{13}}{13}=0.832$$

$$\cos A=\frac{10}{5\sqrt{13}}=\frac{10}{5\sqrt{13}}\bullet\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=\frac{2\bullet\cancel{5}\bullet\sqrt{13}}{\cancel{5}\bullet 13}$$

$$=\frac{2\bullet\sqrt{13}}{13}=0.554$$

$$ctgA = \frac{10}{15} = \frac{2 \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{3} = 0.666$$

$$\sec A = \frac{5\sqrt{13}}{10} = \frac{\cancel{5}\sqrt{13}}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{\sqrt{13}}{2} = 1.803$$

$$\csc A = \frac{5\sqrt{13}}{15} = \frac{\cancel{5}\sqrt{13}}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{\sqrt{13}}{3} = 1.202$$

2.

a) $\cos 43° = 0.7314$

b) $2\,sen\,70° + 3\cos 20° - \frac{3}{\csc 70°}$

Si empleamos la identidad trigonométrica

$$sen\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

tenemos lo siguiente:

$$2sen70° + 3\cos 20° - 3\left(\frac{1}{\csc 70°}\right)$$

$$2sen70° + 3\cos 20° - 3sen70°$$

$$3\cos 20° - sen70° = 1.8793$$

c) $\tan 32°00'20''$

convertimos los 20" a grados:

$$20\cancel{''}\left(\frac{1°}{3600\cancel{''}}\right) = 0.0055°$$

$$\tan(32.0055°) = 0.6250$$

d) $\frac{4\tan 35° - 3\cot 55°}{\cot 55°}$

Si empleamos la identidad trigonométrica

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

tenemos lo siguiente:

$$\tan 55°\left[4\tan 35° - 3\frac{1}{\tan 55°}\right]$$

$$4\tan 35° \tan 55° - 3 = 1$$

e) $\cot 32° = \frac{1}{\tan 32°} = 1.6$

3.

a) $$\frac{sen\,45° + \cos 45°}{sen^2\,60°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

b) $$\frac{sen\,30° + \cos 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3}$$

c) $$\frac{\tan 30° - \tan 60°}{1 + \tan 30° \tan 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{1}}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{1}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Actividad 3

1.

ángulo / función	0°	30°	45°	60°	90°
$sen\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\csc\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

2.

θ	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**
$180° - \theta$	60°	45°	30°	0°
$sen\,\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
$\sec\theta$	-2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1
$\csc\theta$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	∞

3.

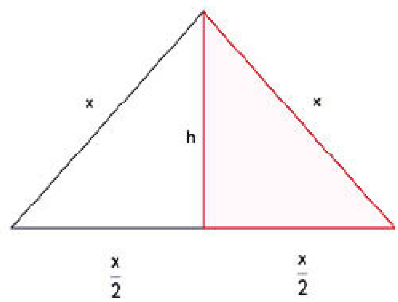
θ	**210°**	**225°**	**240°**	**270°**
$\theta - 180°$ o $180° + \theta$	30°	45°	60°	90°
$sen\,\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sec\theta$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	∞

4.

θ	**300°**	**315°**	**330°**	**360°**
$360° - \theta$	60°	45°	30°	0°
$sen\,\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
$\sec\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\csc\theta$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	∞

Actividad 4

I. *Una vez dibujado el triángulo equilátero, lo dividimos en dos triángulos rectángulos, utilizamos el de la derecha y calculamos su altura en función de sus lados utilizando el teorema de Pitágoras:*



$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2$$

Despejando la altura (h):

$$h^2 = x_2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

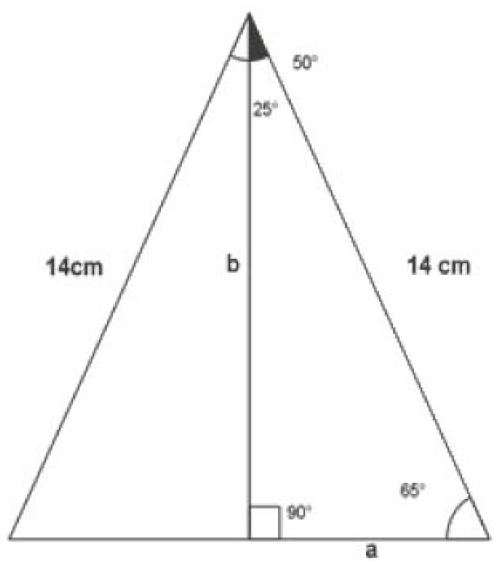
$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{4x^2 - x^2}{4}$$

$$h=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$A=\frac{bxh}{2}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=\frac{\frac{x^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{2}{1}}=\frac{x^2\sqrt{3}}{8}$$

II.

1. *Una vez dibujado el triángulo isósceles, lo dividimos en dos triángulos rectángulos. Utilizamos el de la derecha y calculamos su altura en función de sus lados utilizando la función trigonométrica del coseno:*



$$\cos 65^\circ=\frac{a}{14}$$

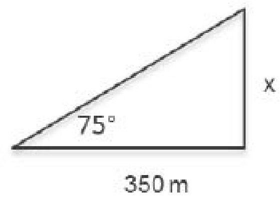
$$a=(\cos 65^\circ)(14)=5.92\ cm$$

$$\cos 25^\circ=\frac{b}{14}$$

$$b=(\cos 25^\circ)(14)=12.69\ cm$$

$$A=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{(5.92)(12.69)}{2}=37.56\ cm^2$$

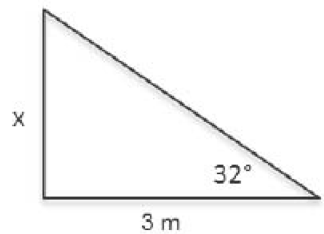
2. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con la función trigonométrica de la tangente calculamos la elevación x:*



$$\tan 75^\circ=\frac{a}{350}$$

$$x=(\tan 75^\circ)(350)=1306.21\ m$$

3. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con la función trigonométrica de la tangente calculamos la elevación x:*

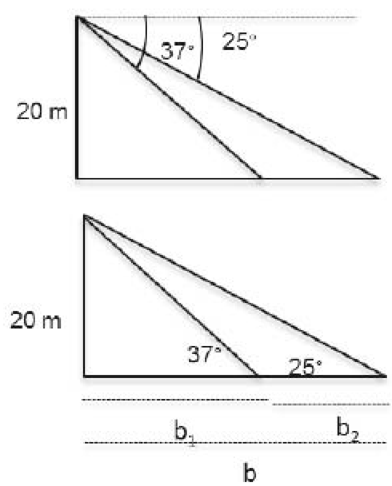


$$\tan 32^\circ=\frac{x}{3}$$

$$x=(\tan 32^\circ)(3)$$

$$x=1.87\ cm$$

4. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con la función trigonométrica de la tangente calculamos los valores:*



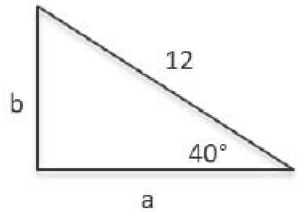
$$\tan 25° = \frac{20}{b} \qquad b = \frac{20}{\tan 25°} = 42.89\ m$$

$$\tan 37° = \frac{20}{b_1} \qquad b_1 = \frac{20}{\tan 37°} = 26.54\ m$$

$$b_2 = b - b_1 = 42.89 - 26.54$$

$$b_2 = 16.35\ m$$

5. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con las funciones trigonométricas calculamos los valores:*



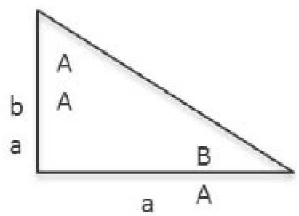
$$sen\,40° = \frac{b}{12}$$

$$b = (sen\,40°)(12) = 7.71$$

$$\cos 40° = \frac{a}{12}$$

$$a = (\cos 40°)(12) = 9.19$$

6. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con las funciones trigonométricas calculamos los valores:*



$$\tan A = 0.6$$

$$A = \tan^{-1} = (0.6)$$

$$A = 30.96°$$

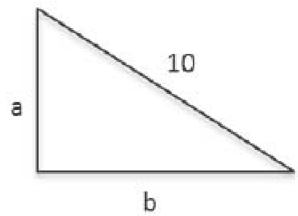
$$90° + A + B = 180°$$

Despejamos el ángulo B:

$$B = 180° - 90° - 30.96°$$

$$B = 59.04°$$

7. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con las funciones trigonométricas calculamos los valores:*



Obtenemos los ángulos :

$$90° + A + B = 180°$$

$$A - B = 10°$$

Despejamos A :

$$A = 10° + B$$

Sustituyendo A

$$90° + (10° + B) + B = 180°$$

$$2B = 180° - 90° - 10°$$

$$2B = 80°$$

$$B = 40°$$

Sustituyendo B :

$$A = 10° + 40° = 5°$$

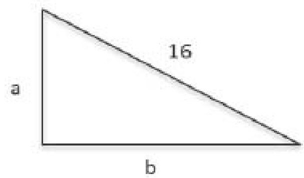
$$sen\,50° = \frac{a}{10}$$

$$a = (sen\,50°)(10) = 7.66$$

$$\cos 50° = \frac{b}{10}$$

$$b = (\cos 50°)(10) = 6.43$$

8. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con las funciones trigonométricas calculamos los valores:*



Si b : 2a entonces b = 2a

Sustituyendo:

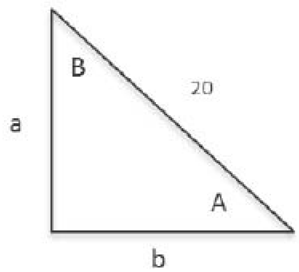
$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$A = \tan^{-1}(0.5) = 26.56°$$

$$B = 180° - 90° - 26.56° = 63.44°$$

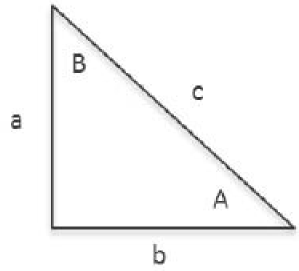
$$sen\,26.56° = \frac{a}{16}$$
$$a = (sen\,26.56°)(16) = 7.15$$
$$cos\,26.56° = \frac{b}{16}$$
$$b = (cos\,26.56°)(16) = 14.31$$

9. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con las funciones trigonométricas del seno y coseno, calculamos los valores:*



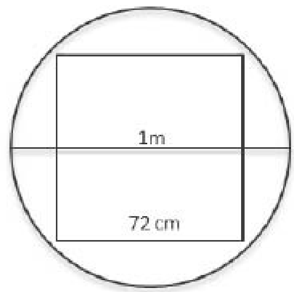
$$90° + A + B = 180°$$
Despejando A:
$$A = B + 4°$$
Sustituyendo A:
$$90° + (B + 4°) + B = 180°$$
Despejando B:
$$B = \frac{180° - 90° - 4°}{2} = 43°$$
$$B = 43°$$
Sustituyendo B:
$$A = 43° + 4° = 47°$$
$$A = 47°$$
$$sen\,47° = \frac{a}{20}$$
$$a = (sen\,47°)(20) = 14.63$$
$$a = 14.63$$
$$cos\,47° = \frac{b}{20}$$
$$b = (cos\,47°)(20) = 13.64$$
$$b = 13.64$$

10. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con la función trigonométrica de la tangente, calculamos los valores:*



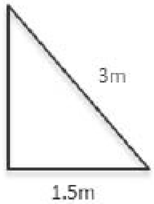
$$Si\ a = \frac{b}{2}$$
$$tan\,A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b}{1}} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$
Despejamos el ángulo "A":
$$A = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.56°$$
$$B = 180° - 90° - 26.56°$$
$$B = 63.44°$$

11. *Se obtiene las áreas por separado del círculo y el cuadrado para que se resten y obtengamos la diferencia:*



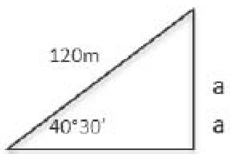
$$A_{circunferencia} = \pi\frac{d^2}{4} = \pi\frac{(100\ cm)^2}{4} = 7854\ cm^2$$
$$A_{cuadrado} = l^2 = (72\ cm)^2 = 5184\ cm^2$$
$$A = A_{circunferencia} - A_{cuadrado} = 7854 - 5184$$
$$= 2670\ cm^2$$

12. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con la función trigonométrica del coseno calculamos el valor:*



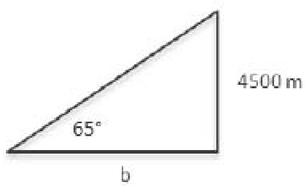
$$\cos A = \frac{1.5}{3}$$
Despejamos A :
$$A = \cos^{-1}\left(\frac{1.5}{3}\right)$$
$$A = 60^\circ$$

13. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con la función trigonométrica del seno calculamos el valor:*



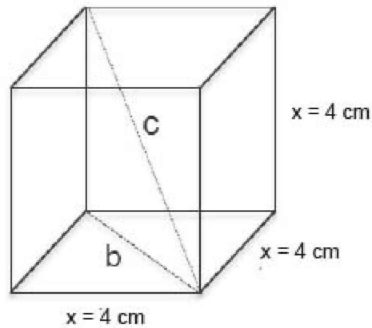
$$sen\, 40.5^\circ = \frac{a}{120}$$
Despejando a :
$$a = (sen(40.5^\circ))(120)$$
$$a = 77.93\ m$$

14. *Trazamos un triángulo rectángulo, y con la función trigonométrica de la tangente calculamos el valor:*



$$\tan 65^\circ = \frac{4500}{b}$$
despejamos b:
$$b = \frac{4500}{\tan 65^\circ}$$
$$b = 2098.38\ m$$

15. *Trazamos un triángulo rectángulo dentro del cubo, y aplicando el teorema de Pitágoras y calculamos el valor de c:*



$$x = \sqrt[3]{64} = 64\ cm$$
$$b = \sqrt{4^2 + 4^2}$$
$$b = 5.66\ cm$$
$$c = \sqrt{5.66^2 + 4^2} = 6.93\ cm$$

SOLUCIONES DEL BLOQUE VII

Evaluación diagnóstica

1. $2(a-b)$

2.
$$\frac{4}{5} - \frac{2}{\boxed{}} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{3} - \frac{2}{?} = \frac{2}{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{15} - \frac{2}{?}\cdot\frac{5}{5} = \frac{2}{15}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{12}{15} - \frac{2}{\boxed{3}}\cdot\frac{5}{5} = \frac{2}{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{12-10}{15}=\frac{2}{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{15}=\frac{2}{15}$$

Otra forma:

$$\frac{4}{5}=\frac{2}{15}+\frac{2}{?} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}-\frac{2}{15}=\frac{2}{?} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{?}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{3}-\frac{2}{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{?}=\frac{12}{15}-\frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{?}=\frac{12-2}{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{?}=\frac{10}{15} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{?}=\frac{2\times \cancel{5}}{3\times \cancel{5}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{?}=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad ?=3$$

Respuesta: 3

3.

$$(5x+2y)(?)=\underbrace{25x^2-4y^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

Factorizando la expresión a la derecha de la igualdad:

$$(5x+2y)(?)=(5x+2y)(5x-2y)$$

Respuesta: $\underline{5x-2y}$

4.

$$x^2-?\,x+15=(x-3)(x-5)$$

Se efectúa el producto a la derecha de la igualdad:

$$x^2-?\,x+15=x^2-\underline{5x}-\underline{3x}+15$$

$$x^2-?\,x+15=x^2-8x+15$$

Respuesta: 8

5.

$$x^2-?\,x+15=(x-3)(x-5)$$

Se efectúa el producto a la derecha de la igualdad:

$$x^2-?\,x+15=x^2-\underline{5x}-\underline{3x}+15$$

$$x^2-?\,x+15=x^2-8x+15$$

5.

$$\underbrace{x^6-1}_{\text{Diferencia de cuadrados}}=\left(\underbrace{x^3+1}_{\text{Suma de cubos}}\right)\left(\underbrace{x^3-1}_{\text{Diferencia de cubos}}\right)$$

$$x^6-1=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

Respuesta:

$$\underline{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

6.

Se factoriza el factor común de numerador y denominador:

$$\frac{8x^3+28x^2-60x}{4x^4-26x^3+30x^2}=\frac{4x(2x^2+7x-15)}{2x^2(2x^2-13x+15)}$$

$$=\frac{\cancel{2}(2)\cancel{x}(2x^2+7x-15)}{\cancel{2}\cancel{x}x(2x^2-13x+15)}$$

$$=\frac{2(2x^2+7x-15)}{x(2x^2-13x+15)}$$

Se factorizan los trinomios cuadrados obtenidos tanto en numerador como en denominador:

$$\begin{array}{c} 2x^2+7x-15 \\ -\ 3x \\ 2x-3 \\ x+5 \\ \underline{+10x} \\ +\ 7x \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2x^2-13x+15 \\ -\ 3x \\ 2x-3 \\ x-5 \\ \underline{-10x} \\ -13x \end{array}$$

$$\frac{2\cancel{(2x-3)}(x+5)}{x\cancel{(2x-3)}(x-5)}=\frac{2(x+5)}{x(x-5)}$$

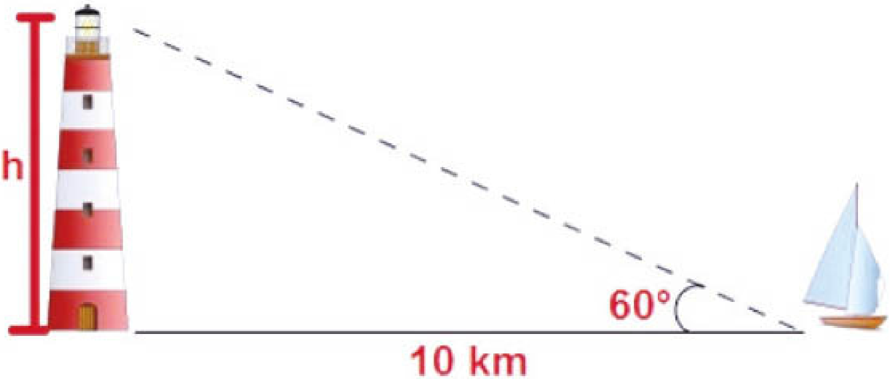
Respuesta: $\dfrac{2(x+5)}{x(x-5)}$

7. *Realizando productos cruzados:*

$$\frac{a+3}{b+7}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(a+3)=1(b+7) \quad \Rightarrow \quad 2a+6=b+7 \quad \Rightarrow \quad 2a-b=7-6$$

Respuesta: $2a-b=1$

8.



Consideraciones necesarias para resolver el problema: *que la línea para medir la separación entre la base del faro y la embarcación sea horizontal. Esto implica que el faro no se encuentre sobre un monte o que el suelo tenga alguna inclinación.*

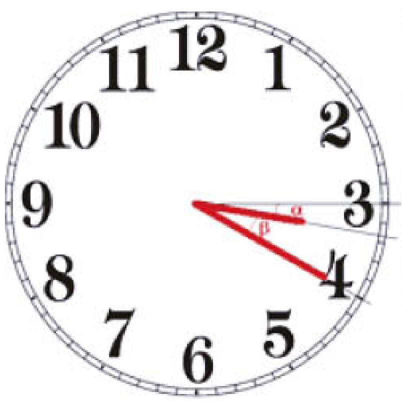
Procedimiento

$$\tan 60^\circ=\frac{h}{10} \quad \Rightarrow \quad h=10\cdot\tan 60^\circ \quad \Rightarrow \quad h=10\sqrt{3}\approx 17.32$$

Respuesta: El faro tiene una altura focal de 17.3 m, aproximadamente.

9. *El reloj está dividido en 12 partes iguales, por tanto:* $\theta=\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$ *es el ángulo que se forma entre dos enteros consecutivos.*

A las 3:00 las manecillas formaban exactamente 90°, pero 20 minutos después la manecilla de los minutos está en el 4 y la de las horas está entre el 3 y el 4.



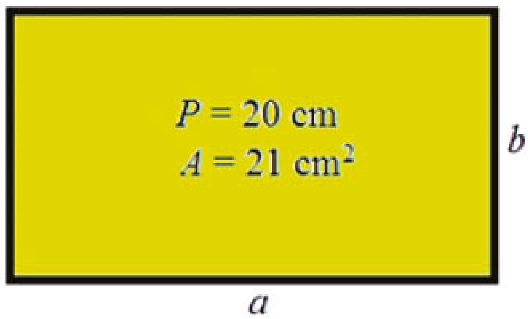
Dado que 20 min son $\frac{20}{60}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ *de hora, la manecilla horaria está a* $\alpha=\frac{1}{3}(30^\circ)=10^\circ$ *en sentido de 3 hacia 4.*

Por lo tanto, $\beta=30^\circ-10^\circ=20^\circ$.

Respuesta: A las 3:20 las manecillas del reloj forman un ángulo de 20° (y uno de 340°). El ángulo agudo es 20°.

10.

$$2a+2b=20$$
$$2(a+b)=20$$
$$a+b=\frac{20}{2}$$
$$a+b=10$$
$$b=10-a$$



$$ab=21$$
$$a(10-a)=21$$
$$10a-a^2=21$$
$$0=a^2-10a+21$$
$$a^2-10a+21=0$$
$$(a-3)(a-7)=0$$
$$a_1=3, \qquad a_2=7$$
$$b_1=10-3=7, \quad b_2=10-7=3$$

Respuesta:

Las dimensiones del rectángulo son 3 cm x 7 cm

Actividad 1

1.

Datos: $\sec A=-\frac{\sqrt{29}}{5}$, $\cot A=\frac{5}{2}$.

Dado que $\sec A=\frac{r}{x}$ *entonces* $r=\sqrt{29}$, $x=-5$. *Dado que la cotangente es positiva,* $y=-2$.

El ángulo A pertenece al tercer cuadrante. Así:

$$\operatorname{sen} A=\frac{y}{r}=-\frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \cos A=\frac{x}{r}=-\frac{5}{\sqrt{29}} \quad y \quad \tan A=\frac{y}{x}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}.$$

Respuesta: $\operatorname{sen} A=-\frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos A=-\frac{5}{\sqrt{29}}$, $\tan A=\frac{2}{5}$

2.

Datos: $\tan\omega=-0.75$, $\omega\in CIV$, *donde* $P(+,-)$

Dado que $\tan\omega=\frac{y}{x}=-\frac{75}{100}=-\frac{3}{4}$, *tenemos que* $x=4$ *y* $y=-3$.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

$$\text{Así: } \operatorname{sen} A=\frac{y}{r}=-\frac{3}{5},\ \cos A=\frac{x}{r}=\frac{4}{5}$$

$$\text{Respuesta: } \operatorname{sen} A=-\frac{3}{5},\quad \cos A=\frac{4}{5}$$

3.

Datos: $x=-\sqrt{3}$, $\cos A=\frac{x}{r}=\frac{4}{5}$.

Dado que $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ se tiene que $y=1$ y $r=2$. El punto buscado es $P\left(-\sqrt{3},1\right)$.

Respuesta: La ordenada del punto es y = 1.

4.

Sabemos que $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}$ y que $\csc\theta=\frac{r}{y}$, por tanto $\operatorname{sen}\theta\cdot\csc\theta=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1$ para todo ángulo.
Entonces este producto no puede ser negativo.

Respuesta: No es posible encontrar un ángulo x para que el producto dado sea negativo.

5.

Sabemos que $\cos\theta=\frac{x}{r}$, donde x es cateto y y hipotenusa.

Si $\cos\theta=1.5=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}=\frac{x}{r}$ tendríamos que $x=3$ y $r=2$, que implica que $x>r$ que significa que un cateto es mayor que la hipotenusa, lo cual es un error.

Se sabe, por tanto, que el cociente no puede ser mayor que 1 ni menor que –1.

6.

Se desea demostrar que $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$.

Si en el círculo unitario se definen $\tan\theta=\frac{y}{x}$ y $\sec\theta=\frac{1}{x}$ y, además, por el teorema de Pitágoras: $x^2+y^2=1$, entonces

$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{y^2}{x^2}+1=\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{y^2+x^2}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$

Lo que lleva a $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}$*, que verifica la identidad.*

7.

Datos: $\csc\alpha=-\sqrt{5}$*,* $\tan\alpha>0$*.*
Se desea conocer el valor de las funciones seno, coseno y tangente y trazar la gráfica del triángulo de referencia.

Sabemos que $\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{5}}{-1}$ *(porque el radio no puede ser negativo). Si la tangente debe ser positiva, entonces x debe ser negativa (pues* $\tan\alpha=\frac{y}{x}$*); entonces, el ángulo pertenece al cuadrante III.*

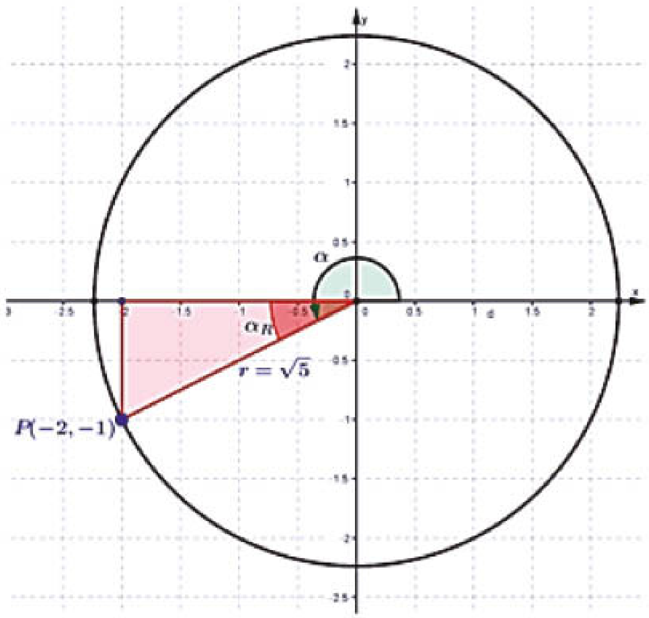
Por el teorema de Pitágoras: $x^2+y^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+(-1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+1=5$

$x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{4}$ *y* $x=-2$ *(cuadrante III).*

El ángulo α *está definido por el punto* $P(-2,-1)$ *de modo que:*

Respuesta: $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ *,* $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ *y* $\tan\alpha=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$*.*

La gráfica del triángulo de referencia es:



8.

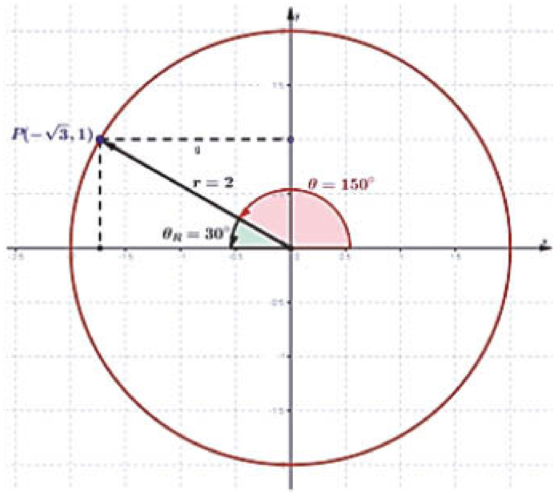
Datos: $\cot\theta = -\sqrt{3}$ *,* $\csc\theta = 2$*. Se desea conocer   y trazar la gráfica.*

Pues bien, sabemos que $\cot\theta = \dfrac{x}{y} = -\dfrac{\sqrt{3}}{1}$ *y* $\csc\theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{2}{1}$ *por lo que y debe ser positiva; entonces:*

$$x = -\sqrt{3}\ ,\ y = 1\ \text{ y }\ r = 2\ \text{ (se cumple el teorema de Pitágoras: } \left(-\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2 = (2)^2 \text{).}$$

Así, el punto que define al ángulo θ en el círculo trigonométrico es $P\left(-\sqrt{3},1\right)$*, que pertenece al cuadrante II, donde θ es obtuso.*

Tenemos que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$ *y* $\theta_R = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 30°$ *por lo que* $\theta = 180° - \theta_R = 180° - 30° = 150°$
Respuesta:
El gráfico correspondiente es: $\theta = 150°$ *(Cuadrante II)*



9. *Dado que los ángulos coterminales se definen en el círculo unitario por el mismo punto del plano, sus funciones trigonométricas son iguales.*

Respuesta: Es verdad.

10.

Dato: $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$.
Se pide determinar los ángulos para los cuales se cumple esto y trazar la gráfica.

Sabemos que $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{3}{5}$ *por lo que* $x = -3$ *y* $r = 5$ *(pues el radio no puede ser negativo). Dado que* x *es negativa, los ángulos posibles son de CII y CIII. Así:*

Por el teorema de Pitágoras: $(-3)^2 + y^2 = (5)^2 \quad \Rightarrow \quad 9 + y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 25 - 9 = 16$

$y = \sqrt{16}$ de donde los posibles valores de y son: -4 y 4. Los ángulos que cumplen la condición inicial están definidos por los puntos $P_1(-3, 4)$ (cuadrante II) y $P_2(-3, -4)$ (cuadrante III).

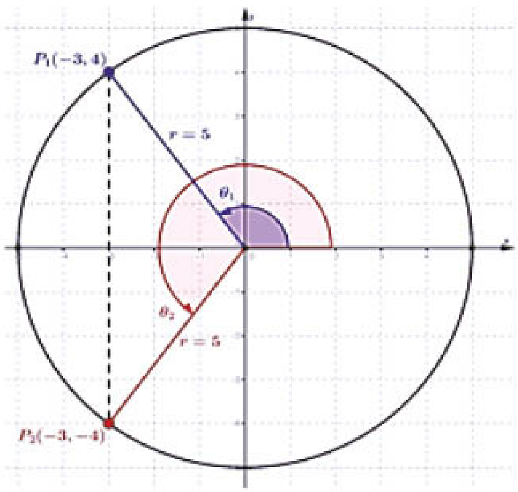
Para hallar los ángulos, usamos los ángulos de referencia:

$$sen\,\theta_{1,R} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta_{1,R} = sen^{-1}(0.8) \approx 53.13^\circ \text{ y } \theta_1 = 180^\circ - \theta_{1,R} = 180^\circ - 53.13^\circ = 126.87^\circ$$

$$\tan\theta_{2,R} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta_{2,R} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.13^\circ \text{ y } \theta_2 = \theta_{2,R} + 180^\circ = 53.13^\circ + 180^\circ = 233.13^\circ$$

Respuesta: Los ángulos que cumplen la condición son 126.87° (CII) y 233.13° (CIII).

La gráfica es:



11. Si el centro del radar representa una posición definida, se pueden determinar los radios de las circunferencias que pasan por los puntos que representan los objetos y sus coordenadas de modo que con esa información, sea posible determinar los ángulos que ayuden a determinar las posiciones de los objetos con respecto al centro del radar. Para ello si son importantes las definiciones trigonométricas estudiadas.

Actividad 2

1.

$$\frac{sen\ y}{ssc\ y}+\frac{cos\ y}{sec\ y}=\frac{\dfrac{sen\,y}{1}}{\dfrac{1}{sen\,y}}+\frac{\dfrac{cos\,y}{1}}{\dfrac{1}{Cos\,y}}=sen^2y+cos^2y=1$$

2.

$$\frac{tan\ x+cot\ x}{sec\ x}=\frac{\dfrac{sen\ x}{cos\ x}+\dfrac{cos\ x}{cen\ x}}{\dfrac{1}{cos\ x}}=\frac{\dfrac{sen^2x+cos^2x}{sen\ x\cos x}}{\dfrac{1}{cos\ x}}=\frac{\dfrac{1}{sen\ x\cos x}}{\dfrac{1}{cos\ x}}=\frac{\cancel{cos\ x}}{sen\ x\ \cancel{cos\ x}}=\frac{1}{sen\ x}=csc\ x$$

3.

$$cscA\left(1-cos^2A\right)=\frac{1}{sen\ A}\left(sen^2A\right)=\frac{sen^{\cancel{2}}A}{\cancel{sen\ A}}=sen\ A$$

4.

$$\left(sen\ \theta-cos\ \theta\right)^2=\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$$

$$\underline{sen^2\theta}-2sen\,\theta\cos\theta+\underline{cos^2\theta}=\frac{3}{4}$$

$$\underline{1}-2sen\,\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$$

$$1-\frac{3}{4}=2sen\,\theta\cos\theta$$

$$2sen\,\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$sen\,\theta\cos\theta=\frac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{2}{1}}=\frac{1}{8}$$

Ejercicio 5.

$$\left(tan\ u-cot\ u\right)^2=\left(2\right)^2$$

$$tan^2u-2tan\,u\cot u+cot^2u=4$$

$$tan^2u+cot^2u=4+2tan\,u\cot u$$

Pero

$$tan\ u-cot\ u=2$$

$$tan\ u-\frac{1}{tan\,u}=2$$

$$\frac{tan^2u-1}{tan\,u}=2$$

$$tan^2u-1=2tan\,u$$

Luego entonces

$$tan^2u+cot^2u=4+\left(tan^2u-1\right)cot\,u$$

$$tan^2u+cot^2u=4+tan^2u\cot u-cot\,u$$

$$tan^2u+cot^2u=4+tan\,u\left(tan\,u\cot u\right)-cot\,u$$

$$tan^2u+cot^2u=4+tan\,u\left(1\right)-cot\,u$$

$$tan^2u+cot^2u=4+\left(\underbrace{tan\,u-cot\,u}_{2}\right)$$

$$tan^2u+cot^2u=4+2$$

$$tan^2u+cot^2u=6$$

6.

$$tan\,r=2sen\,r$$

$$\frac{sen\,r}{cos\,r}=2sen\,r$$

$$\cancel{sen\,r}=2\,\cancel{sen\,r}\,cos\,r$$

$$1=2\,cos\,r$$

$$cos\,r=\frac{1}{2}$$

Por definición en el círculo trigonométrico:

$x=1,\ h=2\ \ y\ 1^2+y^2=2^2 \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{3}$
Así

$$sen\,r=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ y\ \ tan\,r=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\ \ por\ lo\ que$$

$$sen\,r\,tan\,r=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{3}{2}$$

7.

$$tan\ A+cot\ A=sec\ A\cdot csc\ A$$

$$\frac{sen\ A}{cos\ A}+\frac{cos\ A}{sen\ A}=sec\ A\cdot csc\ A$$

$$\frac{sen^2A+cos^2A}{sen\,A\,cos\,A}=sec\ A\cdot csc\ A$$

$$\frac{1}{sen\,A\,cos\,A}=sec\ A\cdot csc\ A$$

$$\frac{1}{sen\ A}\cdot\frac{1}{cos\ A}=sec\ A\cdot csc\ A$$

$$csc\ A\cdot sec\ A=sec\ A\cdot csc\ A$$

(Se verifica la igualdad inicial)

8.

$$cos^2u-sen^2u=1-2sen^2u$$

$$\left(1-sen^2u\right)-sen^2u=1-2sen^2u$$

$$1-sen^2u-sen^2u=1-2sen^2u$$

$$1-2sen^2u=1-2sen^2u$$

(Se verifica la igualdad inicial)

9.

$$\frac{csc\ \theta}{sen\ \theta}+\frac{sec\ \theta}{cos\ \theta}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$\frac{csc\ \theta\,cos\,\theta+sen\,\theta\,sec\ \theta}{sen\,\theta\,cos\,\theta}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$\frac{\frac{1}{sen\,\theta}cos\,\theta+sen\,\theta\frac{1}{cos\,\theta}}{sen\,\theta\,cos\,\theta}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$\frac{\frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}+\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}}{sen\,\theta\,cos\,\theta}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$\frac{\frac{cos^2\theta+sen^2\theta}{sen\,\theta\,cos\,\theta}}{sen\,\theta\,cos\,\theta}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$\frac{\frac{1}{sen\,\theta\,cos\,\theta}}{\frac{sen\,\theta\,cos\,\theta}{1}}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$\frac{1}{sen^2\theta\,cos^2\theta}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$\frac{1}{sen^2\theta}\cdot\frac{1}{cos^2\theta}=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$\left(\frac{1}{sen\,\theta}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{cos\,\theta}\right)^2=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$(csc\,\theta)^2\cdot(sec\,\theta)^2=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

$$csc^2\theta\cdot sec^2\theta=csc^2\theta\cdot sec^2\theta$$

(Se verifica la igualdad inicial)

10.

$$\frac{sen^3 u}{\tan u - sen\ u} = \cos u \cdot (1 + \cos u)$$

$$\frac{sen^3 u}{\dfrac{sen\ u}{\cos u} - sen\ u} = \cos u \cdot (1 + \cos u)$$

$$\frac{\dfrac{sen^3 u}{1}}{\dfrac{sen\ u - sen\ u \cos u}{\cos u}} = \cos u \cdot (1 + \cos u)$$

$$\frac{sen^{\cancel{3}} u \cos u}{\cancel{sen\ u}\,(1 - \cos u)} = \cos u \cdot (1 + \cos u)$$

$$\frac{sen^2 u \cos u}{(1 - \cos u)} = \cos u \cdot (1 + \cos u)$$

$$\frac{\left(\underbrace{1 - \cos^2 u}_{\text{Diferencia de cuadrados}}\right)\cos u}{(1 - \cos u)} = \cos u \cdot (1 + \cos u)$$

$$\frac{(1 + \cos u)\,\cancel{(1 - \cos u)}\cos u}{\cancel{(1 - \cos u)}}$$

$$= \cos u \cdot (1 + \cos u)$$

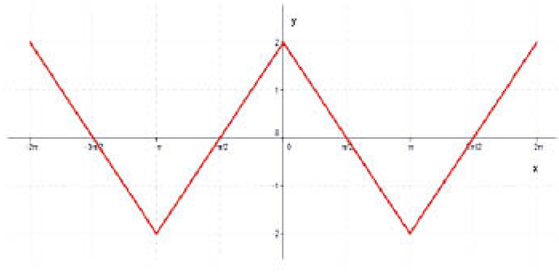
$$\cos u \cdot (1 + \cos u) = \cos u \cdot (1 + \cos u)$$

(Se verifica la igualdad inicial)

Actividad 3

1.

x	$y = 2 \bullet \cos x$
-2π	$y = 2 \bullet \cos(-2\pi) = 2$
$\frac{-3\pi}{2}$	$y = 2 \bullet \cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 0$
$-\pi$	$y = 2 \bullet \cos(-\pi) = -2$
$\frac{-\pi}{2}$	$y = 2 \bullet \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$
0	$y = 2 \bullet \cos 0 = 2$
$\frac{\pi}{2}$	$y = 2 \bullet \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
π	$y = 2 \bullet \cos(\pi) = -2$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = 2 \bullet \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
2π	$y = 2 \bullet \cos(\pi) = -2$



2. *Si* $\cos\theta = \frac{x}{r}$ *y* $-r \le x \le r$ *entonces* $\frac{-r}{r} \le \cos\theta \le \frac{r}{r}$*; es decir* $-1 \le \cos\theta \le 1$*, lo que no permite valores menores a -1, ni mayores a 1, para* $\cos\theta$*.*
Respuesta: Falso.

3.

$$\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) < 0 \Rightarrow \tan\left(\frac{4(180°)}{3}\right) < 0 \Rightarrow$$

$$\tan(240°) < 0$$

En el cuadrante III, la tangente es positiva.
Respuesta: Falso.

4.

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{3(180°)}{2} = 270°$$

$$y$$

$$2\pi = 2(180°) = 360°$$

Se trata de ángulos de cuadrante IV, donde la función seno toma valores desde -1 hasta cero, que describe un comportamiento creciente.
Respuesta: Verdadero.

5.
Es una línea recta que una función no puede cruzar, pero que lleva a la función hacia el infinito cuando ésta se aproxima a ella. Ejemplos de asíntotas los encontramos en la función tangente en los ángulos de 90° y 270°.

SOLUCIONES DEL BLOQUE VIII

Evaluación diagnóstica

1.

$$N: \frac{0.35^{\circ}}{x} = \frac{1^{\circ}}{60'}; \quad x = \frac{(60')(0.35^{\circ})}{1^{\circ}} = 21'$$

Respuesta: 55º 21´

2.

$$A = \frac{P \times a}{2} = \frac{Perímetro \times apotema}{2}, \quad P = n \cdot l$$

$$A = \frac{5(5\ cm)\cdot(3\ cm)}{2} = 37.5\ cm^2$$

3.

convertimos 21´ a grados :

$$21'\left(\frac{1^{\circ}}{60'}\right) = 0.35^{\circ}$$

convertimos 35¨ a grados :

$$35''\left(\frac{1^{\circ}}{3600''}\right) = 0.0097^{\circ}$$

Sumamos los resultados a los 45°

y obtenemos la función seno:

$$\sin(45.3597^{\circ}) = 0.7115$$

4.

Aplicando el teorema de Pitagoras :

$$h = \sqrt{(5.8\ cm)^2 + (6.4\ cm)^2} = \sqrt{74.6\ cm^2}$$

$$h = 8.6371\ cm$$

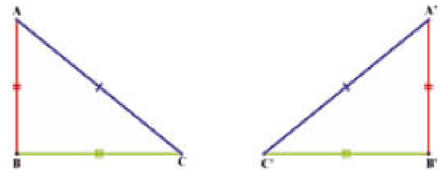
5.

$$\frac{5}{x} = \frac{45}{28}; \quad x = \frac{(5)(28)}{45} = \frac{28}{9}$$

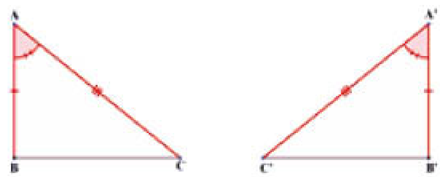
$$x = 3.1111$$

6. *Criterios de congruencia de triángulos:*

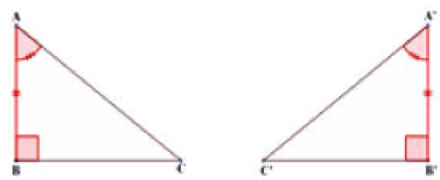
Criterio LLL: Este criterio se aplica cuando conocemos los tres lados de ambos triángulos (a, b y c del primero y a', b' y c' del segundo). Si los lados homólogos son congruentes entre sí, los triángulos son congruentes.



Criterio LAL: Si en ambos triángulos se conocen dos lados y el ángulo entre esos lados y se cumple que los lados homólogos son congruentes y así también los ángulos conocidos entonces ambos triángulos son congruentes.



Criterio ALA: Si en ambos triángulos se conoce un lado y, los ángulos adyacentes a él, y se cumple que los lados conocidos son congruentes entre sí, del mismo modo que los ángulos homólogos; entonces los triángulos son congruentes.



7.

Área del círculo $A = \pi r^2$

$$A = \pi\left(4cm\right)^2 = 50.2656\ cm^2$$

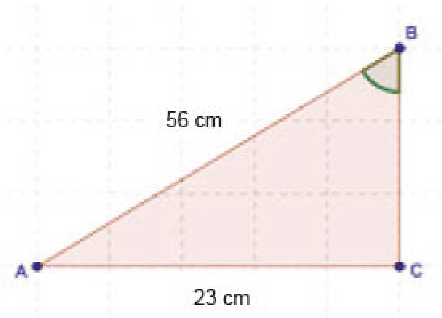
Área del icoságono $A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

$$A = \frac{(20)(4cm)(4cm)}{2} = 160\ cm^2$$

Se concluye que el de mayor área es el icoságono.

8. *Aplicamos la función trigonométrica del coseno y obtenemos el valor:*

$$\cos B = \frac{\sqrt{(56)^2 - (23)^2}}{56} = \frac{51.0588}{56}$$
$$\cos B = 0.9118$$



Actividad 1

a)

$$\frac{37}{sen 35.78} = \frac{56}{sen\ B} = \frac{c}{sen C} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ángulo } B = sin^{-1}\left[\dfrac{56 \times sen\ 35.78}{37}\right] = 62.24° \\ \text{Ángulo } C = 180° - \left(35.78° + 62.24°\right) = 81.98° \\ \text{Lado } c = \left[\dfrac{37 \times sen\ 81.98°}{sen\ 35.78°}\right] = 62.66\ cm \end{cases}$$

b)

$$\frac{18}{sen 58.54} = \frac{17}{sen B} = \frac{c}{sen C} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ángulo } B = sin^{-1}\left[\dfrac{17 \times sen 58.54}{18}\right] = 53.67° \\ \text{Ángulo } C = 180° - \left(58.54 + 53.67°\right) = 67.79° \\ \text{Lado } c = \left[\dfrac{17 \times sen 67.79°}{sen\ 53.67°}\right] = 19.54\ cm \end{cases}$$

c)

$$\frac{35\ in}{sen\ 97.21^\circ}=\frac{b}{senB}=\frac{15\ in}{senC}\Rightarrow\begin{cases}\text{Ángulo } C=sin^{-1}\left[\dfrac{15\times sen\,97.21}{35}\right]=25.16^\circ\\ \text{Ángulo } B=180^\circ-(97.21^\circ+25.16^\circ)=57.63^\circ\\ \text{Lado } b=\left[\dfrac{35\times sen57.63^\circ}{sen\ 97.21^\circ}\right]=29.8\ in\end{cases}$$

d)

$$\frac{7\ cm}{sen16.93^\circ}=\frac{5.83\ cm}{senC}=\frac{b}{senB}\Rightarrow\begin{cases}\text{Ángulo } C=sen^{-1}\left[\dfrac{5.83\times sen16.93^\circ}{7}\right]=14.04^\circ\\ \text{Ángulo } B=180^\circ-(14.04+16.93)=149.03^\circ\\ \text{Lado } b=\left[\dfrac{5.83\times sen149.03^\circ}{sen14.04^\circ}\right]=12.36\ cm\end{cases}$$

Actividad 2

1. *Se recomienda trazar una recta paralela al lado BC, que pase por el punto A, para poder afirmar que:*

$$\measuredangle ACD\cong\measuredangle CAB=33.4256^\circ$$
$$\therefore\ \measuredangle ACB=113.1488^\circ\ \text{ también se puede afirmar que } \overline{AC}=\overline{BC}=.398\ m$$

a) *la altura:* $\dfrac{h}{sen\,33.4256^\circ}=\dfrac{66}{sen\,23.1488^\circ}\rightarrow h=92.48\ m$

b) *la longitud:* $\dfrac{398}{sen\,33.4256^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{sen113.1488^\circ}\rightarrow\overline{AB}=664.34\ m$

Es la longitud de la carretera.

2. *Para determinar la distancia entre los dos aeropuertos A y D, que es igual a 17932.57 mi. Se deben realizar las siguientes operaciones:*

$$\frac{EF}{sen42.58^\circ}=\frac{10000}{sen80.81^\circ}\Rightarrow\quad EF=6854.17\ mi$$
$$\tan 43.39=\frac{10000}{AF};\Rightarrow\quad AF=\frac{10000}{\tan 43.39}=10578.401\ mi$$

3. *Aplicamos la ley de senos y encontramos los valores:*
Los ángulos que faltan se pueden calcular con base en el teorema "La suma de ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°".

$$\begin{array}{ll} \measuredangle AFB = 42.95° & \dfrac{AB}{sen42.95°} = \dfrac{45}{sen96.64} \Rightarrow \quad AB = 30.87\ m \\ \measuredangle AFE = 47.41° & \\ \measuredangle DCF = 23.7° & \dfrac{AE}{sen47.41°} = \dfrac{45}{sen89.64} \Rightarrow \quad AE = 33.13\ m \\ \measuredangle FEA = 89.64° & \end{array}$$

Actividad 3

1. *Aplicamos la ley de senos y encontramos los valores:*

$$\frac{\overline{BC}}{sen60°} = \frac{50m}{sen40°} = \frac{\overline{AC}}{sen80°} \Rightarrow \begin{cases} \overline{BC} = 67.37\ m \\ AC = 76.61\ m \\ conclusión: AC > BC \end{cases}$$

2. *Aplicamos la ley de senos y encontramos los valores:*

$$\frac{15}{sen30°} = \frac{\overline{AC}}{sen150°}; \frac{\overline{BC}}{sen30°} = \frac{20}{sen120°} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AC} = 15\ cm \\ BC = 11.55\ cm \\ conclusión: \overline{AC} \parallel \overline{BC} \end{cases}$$

3. *Aplicamos la ley de senos y encontramos los valores:*

$$a = \sqrt{(87.75)^2 + (65)^2 - 2(87.75)(65)(\cos 56.28°)} = 74.78\ cm$$
$$P = 65m + 87.75m + 74.78 = 227.53\ m$$

4. *Aplicamos la ley de senos y encontramos el valor:*

$$\frac{400\ km}{sen10°} = \frac{d}{sen16°} \Rightarrow d = 634.93\ km$$

5.

a) *Aplicamos la ley de senos y encontramos los valores:*

$$\frac{20}{sen84.02°} = \frac{b}{sen48.1°} = \frac{c}{sen47.88°}$$
$$b = 14.97\ cm \qquad c = 14.92\ cm$$
$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen\ \theta}{2} = \frac{(20)(14.97)(sen47.88°)}{2} = 111.03\ cm^2$$

b) *Aplicamos la ley de senos y encontramos los valores:*

$$\frac{17}{sen49.33°}=\frac{b}{sen99.58°}=\frac{c}{sen31.09°}$$

$b=22.1\ cm \quad c=11.57\ cm$

$$A=\frac{a\cdot b\cdot sen\,\theta}{2}=\frac{(17)(22.1)(sen31.09°)}{2}=97\ cm^2$$

c)

$$\frac{a}{sen49.33°}=\frac{b}{sen99.58°}=\frac{c}{sen31.09°}$$

$a=24.97cm \quad b=32.46\ cm$

$$A=\frac{a\cdot b\cdot sen\,\theta}{2}=\frac{(24.97)(32.46)(sen31.09°)}{2}=209.27\ cm^2$$

d) *Aplicamos la ley de senos y encontramos los valores:*

$$\frac{31}{sen67.06°}=\frac{b}{sen75.59°}=\frac{c}{sen37.35°}$$

$b=32.6\ cm \quad c=20.42\ cm$

$$A=\frac{a\cdot b\cdot sen\,\theta}{2}=\frac{(31)(32.6)(sen37.35°)}{2}=306.56\ cm^2$$

e)

$$\frac{41cm}{sen97.42°}=\frac{b}{sen42.4°}=\frac{c}{sen40.18°}$$

$b=27.88\ cm$

$c=26.68\ cm$

$$A=\frac{a\cdot b\cdot sen\,\theta}{2}=\frac{(41)(26.68)(sen42.4°)}{2}=368.75\ cm^2$$

f)

$$\frac{23}{sen55.7°}=\frac{b}{sen22.54°}=\frac{c}{sen101.76°}$$

$b=10.67\ cm$

$c=27.26\ cm$

$$A=\frac{a\cdot b\cdot sen\,\theta}{2}=\frac{(23)(27.26)(sen22.54°)}{2}=120.16\ cm^2$$

Actividad 4

a) *Aplicamos la ley de cosenos para encontrar los ángulos y con los valores obtenidos, calculamos el área.*

$$A = cos^{-1}(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}) = cos^{-1}\left(\frac{58^2 + 30^2 - 30^2}{2(58)(30)}\right) = 14º\,50'\,6''$$

$$B = cos^{-1}(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}) = cos^{-1}\left(\frac{30^2 + 30^2 - 58^2}{2(30)(30)}\right) = 150º\,19'\,47'$$

$$C = cos^{-1}(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab})\,cos^{-1}\left(\frac{58^2 + 30^2 - 30^2}{2(58)(30)}\right) = 14º\,50'\,6'$$

$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen\,\theta}{2} = \frac{(30)(30)(sen\ 150º19'48'')}{2} = 222.75\ cm^2$$

b) *Aplicamos la ley de cosenos para encontrar los ángulos y con los valores obtenidos, calculamos el área.*

$$D = cos^{-1}(\frac{f^2 + e^2 - d^2}{2fe}) = cos^{-1}\left(\frac{125^2 + 280^2 - 170^2}{2(125)(280)}\right) = 21.5094º$$

$$E = cos^{-1}(\frac{f^2 + d^2 - e^2}{2fd}) = cos^{-1}\left(\frac{125^2 + 170^2 - 280^2}{2(125)(170)}\right) = 142.8502º$$

$$F = cos^{-1}(\frac{d^2 + e^2 - f^2}{2de}) = cos^{-1}\left(\frac{170^2 + 280^2 - 125^2}{2(170)(280)}\right) = 15.6404º$$

$$A = \frac{d \cdot e \cdot sen\,F}{2} = \frac{(170)(280)(sen\ 15.6404)}{2} = 6416.4553\ cm^2$$

c) *Aplicamos la ley de cosenos para encontrar los ángulos y con los valores obtenidos, calculamos el área.*

$$G = cos^{-1}(\frac{59^2 + 57^2 - 58^2}{2(59)(57)}) = 60º$$

$$H = cos^{-1}(\frac{i^2 + g^2 - h^2}{2ig}) = cos^{-1}\left(\frac{59^2 + 58^2 - 57^2}{2(59)(58)}\right) = 58.3032º$$

$$I = cos^{-1}(\frac{g^2 + h^2 - i^2}{2gh}) = cos^{-1}\left(\frac{58^2 + 57^2 - 59^2}{2(58)(57)}\right) = 61.7263º$$

$$A = \frac{g \cdot h \cdot sen\,I}{2} = \frac{(58)(57)(sen\ 61.7263º)}{2} = 1455.79\ cm^2$$

SOLUCIONES DEL BLOQUE IX

PARA INICIAR, REFLEXIONA

Respuestas a las preguntas.

1. *Usuarios de redes sociales*
2. *Se elaboró una tabla de distribución de frecuencia y con estos datos organizados se sacaron porcentajes*
3. *Las cantidades en porcentajes se utilizan para definir relaciones entre dos cantidades.*

Evaluación diagnóstica

1. *Se realizan dos reglas de tres*

5.7 ---------- $2300.00
1 -------------- X

1 x 2300 = 2 300/ 5.7 = 403.50

1 -------- $4200.00
X --------- -$ 1400.00

1 x 1400 = 1400 / 4200 = 3

2.

$x^2 - 6x + 8 = 0$
$(x - 4)(x - 2) = 0$
Igualar a cero cada factor
$x - 4 = 0 \qquad x - 2 = 0$
$x=4 \qquad\qquad x= 2$

3.

93% de 50 kg frijol vendido equivale a 46.5.

25% de 70 kg de cebada a vender equivale a 17.5.

4. *Ecuación* $x^2 + 1 = 4x^2 - 3$

Despejando x:

$$5x^2 = 4$$
$$x^2 = \frac{4}{5}$$
$$x = \sqrt{\frac{4}{5}}$$
$$x = \pm 0.89$$

Actividad 1

1.

Variables para edad:
Niños
Adolescentes
Adultos
Ancianos

Variables para ingresos laborales (sueldo):
$ 1000.00 a $3000.00
$4000.00 a $5000.00

Variables para estatura:
Altos
Medianos
Bajos

2.

Variables cuantitativas:
Niños
Adolescentes
Adultos
Ancianos

Variables cualitativas:
$ 1000.00 a $3000.00
$4000.00 a $5000.00

Actividad 2

1. *Tabla de distribución de frecuencias.*

Días	**Frecuencias**
23	7
30	8
37	5
51	2
58	3
≥ 62	1

2.

Moda: es la del día 30.

Mediana (valores no agrupados por número de datos par): (3 + 5) / 2 = 4

Media: (7 + 8 + 5 + 2 + 3 + 1) / 6 = 4.3

Los paquetes de leche duran en promedio 4.3

Actividad 3

Desviación típica

$$\sigma = \frac{\sqrt{(7)^2 + (8)^2 + (5)^2 + (2)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (1)^2 - (media)^2}}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{152 - 18.48}}{6}$$

Rango

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{133.51}}{6}$$

8 −7 = 1

$$\sigma = 4.72$$

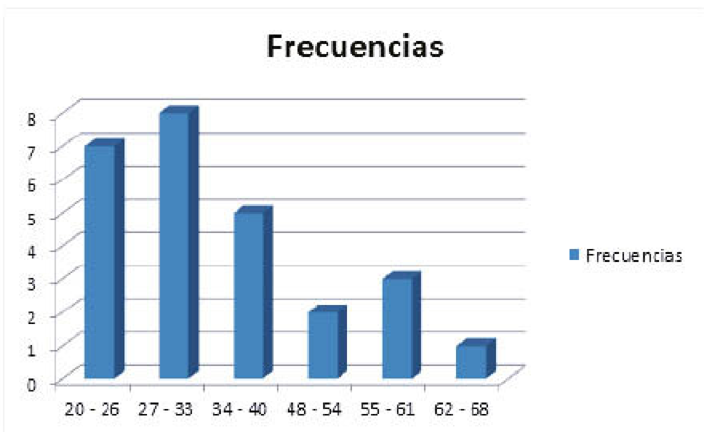
Varianza

$$\sigma = \frac{(7)^2 + (8)^2 + (5)^2 + (2)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (1)^2 - (media)^2}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{133.51}{6} = 22.25$$

$$\sigma^2 = 4.74$$

Presentación de gráficos



SOLUCIONES DEL BLOQUE X

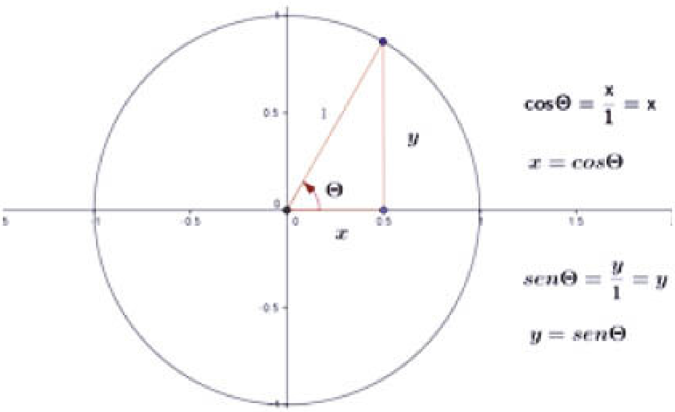
Evaluación diagnóstica

1. *Se ordenan los datos de mayor a menor en función de las ventas anuales para seleccionar la marca*

Marca	*Ventas anuales*
APPLE	*5500*
HP	*5400*
TOSHIBA	*5300*
ACER	*4320*
LANIX	*4090*

Las marcas de computadoras con mayor venta son APPLE, HP y TOSHIBA.

2. *Utilizando el círculo unitario y funciones trigonométricas podemos deducir que y = sen θ y x = cos θ , y si aplicamos el teorema de Pitágoras, se tiene que* $x^2 + y^2 = 1$ *y sustituyendo los valores de "x" y "y" , se tiene que* $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$; $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$.



3.

a) $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

b) $A \cap B = \{3,4,6,8\}$

c) $A - B = \{2,5,7\}$

d) $B - A = \{\ \}$ *ó* $\varnothing$

4.

El área total de la circunferencia es $A = \pi \times r^2 = (3.1416)(20)^2 = 1256.6371\ cm^2$

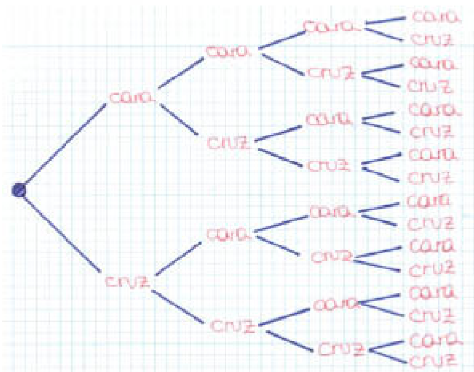
El área de cada espacio de los 104 de la ruleta circular es:

$$A = \frac{\pi \times r^2}{104} = \frac{(3.1416)(20)^2}{104} = 12.0830\ cm^2$$

5. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

6. *Espacio muestral para ganar cuatro volados consecutivos.*

$$E = \left\{ \begin{matrix} AAAA, AAAS, AASA, AASS, ASAA, ASAS, ASSA, ASSS, SAAA, \\ SAAS, SASA, SASS, SSAA, SSAS, SSAA, SSAS, SSSA, SSSS \end{matrix} \right\}$$



7. *La respuesta es a criterio de cada alumno y a consideración del maestro mediador del grupo*

8.

$$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$$

$$(2x + 3y)^3 = (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$$

$$(2x + 3y)^4 = (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$$

9.

a) *Números pares -->números nones*
b) *Las vocales --> las consonantes*
c) *La primavera--> Invierno*
d) *Los días: jueves, martes y domingo --> viernes, lunes y sábado*

10. *Encuentra los siguientes valores:*

a) $9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$

b) $12! = 4790001600$

c) $7! = 5040$

d) ¿Cuál sería la forma más simple de dividir 12! / 9!?

$$\frac{12 \times 11 \times 10 \times \cancel{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

Actividad 1

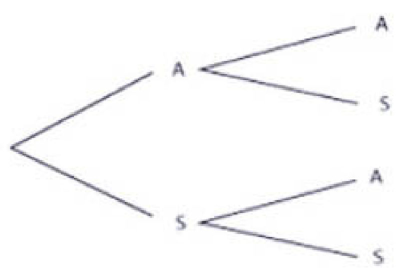
1. *Indica en cada inciso de a hasta g, escribe si se trata de un experimento aleatorio o determinista:*

a) *Aleatorio*
b) *Determinista*
c) *Determinista*
d) *Determinista*
e) *Aleatorio*
f) *Aleatorio*
g) *Determinista*

2. *La respuesta es a criterio de cada alumno y a consideración del maestro mediador del grupo.*

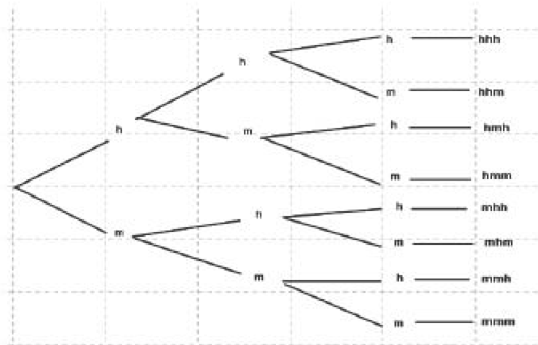
3. *Determina los espacios muestrales, por diagrama de árbol, de los siguientes experimentos aleatorios:*

a) *Lanzar una moneda 2 veces, utilizando los términos águila y sol.*



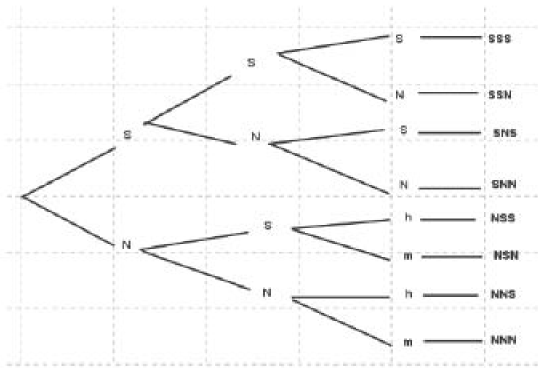
Con dos monedas

b) *Las formas en que una pareja puede tener 3 hijos.*

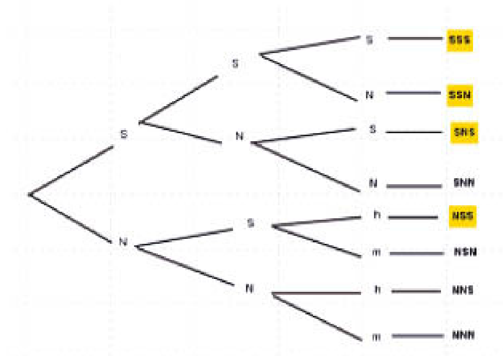


4. *Un experimento consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si emplean o no los servicios básicos de internet.*

a) *Elabora un diagrama de árbol que te ayude a determinar el espacio muestral asociado a dicho experimento.*

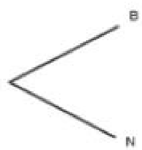


b) *¿Qué elementos del espacio muestral constituyen el suceso: "al menos dos de las personas emplean los servicios básicos de internet".*

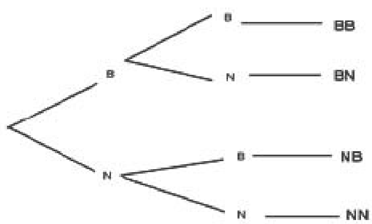


5. *Escribe el espacio muestral que se obtiene de los siguientes diagramas de árbol, que representan los sucesos elementales de extraer dos esferas de una urna.*

a) *Sin devolución de la esfera*



b) *Con devolución de la esfera*



6. *Elabora el diagrama de árbol para obtener los 36 elementos del espacio muestral de lanzar dos veces un dado.*

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Actividad 2

1. *Se lanzan dos dados comunes al mismo tiempo. Obtener el espacio muestral y los siguientes eventos.*

a) *Obtener un número par:*

$$\begin{Bmatrix} (1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4), \\ (4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6) \end{Bmatrix}$$

b) *Obtener un número primo:*

$$\begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4) \\ (4,1),(4,3),(5,2),(5,6),(6,1),(6,5) \end{Bmatrix}$$

c) *Obtener un número par o primo:*

$$\begin{Bmatrix} (1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4), \\ (4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6),(1,2),(1,4),(1,6),(2,1), \\ (2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(5,2),(5,6),(6,1),(6,5). \end{Bmatrix}$$

d) *Obtener un número par y primo: Solución = $\{(1,1)\}$*

e) *Obtener un número impar o no primo: solución =$\{(3,5),(5,3),(3,6),(6,3)\}$*

2.
a) Lanzar tres monedas. Solución:

$$\{(A,A,A),(A,A,S),(A,S,A),(A,S,S)(S,A,A),(S,A,S),(S,S,A),(S,S,S).\}$$

b) *Se sacan tres bolas, una tras otra, sin reemplazamiento, es decir, sin introducir de nuevo la que se saca, de una urna que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Solución:*

$$\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1)(3,1,2),(3,2,1).\}$$

c) *Se sacan dos bolas, una tras otra, con reemplazo, o sea introduciendo la que se saca, de una urna que contiene dos bolas numeradas con 1 y 2. Solución:*

$$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2).\}$$

Actividad 3

1.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.5 - 0.15 = 0.85$

b) $P\left[(A \cup B)^{C}\right] = P(A \cap B) = 0.15$

c) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.15 = 0.35$

d) $P(A^{C} \cup B^{C}) = (1 - P(A)) + (1 - P(B)) = (1 - 0.8) + (1 - 0.5) = 0.2 + .0.5 = 0.7$

2.

a) *Las tres sean verdes.(v/10)(v/10)(v/10)=*

b) *La primera sea verde y las demás rojas.(v/10)(r/10)(r/10)=*

3.

c) *La primera es azul y las demás amarillas.* $\frac{5}{8}.\frac{3}{7}.\frac{2}{6} = 0.089$

d) *Las tres sean azules.* $\frac{5}{8}.\frac{4}{7}.\frac{3}{6} = 0.17$

e) *La primera sea amarilla y las demás azules.* $\frac{5}{8}.\frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{5}{56}$

f) *Las tres sean amarillas.* $\frac{3}{8}.\frac{2}{7}.\frac{1}{6} = \frac{1}{28}$

4.

$$Probabilidad = = \frac{2\% \, x \, 90\%}{2\% \, x \, 90\% + 3\% x 20\%} = \frac{(0.02)(0.90)}{0.024} = 0.75 \Rightarrow 75\%$$

5.

a) *¿Son dos sucesos independientes "Aprobar Lengua" y "Aprobar Matemáticas"? Sí.*

b) *Calcula la probabilidad de que apruebe Matemáticas suponiendo que aprobó Lengua.*

$$Probabilidad = P(apruebe\ lengua) x P(apruebe\ matemáticas)$$
$$Probabilidad = (0.75)x(1-0.2) = 0.6 \Rightarrow 60\ \%$$

6.

a) *Probabilidad de que sea defectuoso:*

P(A) → Porcentaje de Producción de la maquina A
P(A') → Porcentaje de tornillos defectuosos fabricados por la maquina A

$$P(A)P(A') + P(B)P(B') + P(C)P(C') = (0.30)(0.01) + (0.45)(0.04) + (0.25)(0.03) = 0.028$$
$$P(A)P(A') + P(B)P(B') + P(C)P(C') = 0.028$$

b) $P(sea\ defectuoso) = 0.028,\ P(C) = 0.25,\ P(sea\ \ defectuoso/\ C) = 0.03$

$$\frac{P(sea\ defectuoso\ /\ C)xP(C)}{P(sea\ defectuoso)} = \frac{(0.03)(0.25)}{0.028} = 0.27$$

7. *En el juego de dominó qué probabilidad hay de:*

a) *Sacar la ficha cuatro, cinco.* $\frac{1}{28} = 0.035$

b) *Sacar una mula* $\frac{6}{28} = 0.21$

8. *La probabilidad de que un basquetbolista enceste un tiro libre es de 84%. Determina la probabilidad de que en tres tiros libres:*

a) *P(Enceste todos) =* $(.84)(.84)(.84) = 0.59$

b) *P(Falle el segundo) = (0.84)(1-0.84)(0.84) = 0.11*

9. *Al lanzar dos monedas, qué probabilidad hay de:*

a) *Obtener dos caras.* $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0.25$

b) *Obtener una cara y un sello.* $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0.25$

c) *Obtener lados iguales.* $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0.25$

10. *En el lanzamiento de un dado, cuál es la probabilidad de:*

a) *Obtener el número 5:* $\frac{1}{6}=0.16$

b) *No obtener el número 2:* $\frac{5}{6}=0.83$

c) *Obtener 3 ó 5:* $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0.33$

d) *Obtener un número menor que 5:* $\frac{2}{3}=0.66$

11. *En el lanzamiento de dos dados, cuál es la probabilidad:*

a) *Que la suma sea 11:* $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0.33$

b) *Que la suma sea mayor que 10:* $0.33+0.33=\ 0.66$

c) *Que la suma sea menor que 4:* $\frac{4}{6}=0.66$

d) *No salgan números iguales.* $1-\frac{1}{6}=0.83$

12. *En una caja hay 12 bolas negras y 8 rojas, qué probabilidad hay de:*

a) *Sacar una bola negra.* $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0.6$

b) *Sacar una bola roja.* $\frac{8}{20}=0.4$

c) *Sacar una bola negra y, sin reponerla, sacar luego una bola roja:* $\frac{3}{5}.\frac{8}{19} = 0.25$

d) *Sacar una bola negra y luego de reponerla, sacar una bola roja:* $\frac{3}{5}.\frac{8}{20} = 0.24$

Apéndice 2

LAS REGLAS DEL AJEDREZ

Introducción

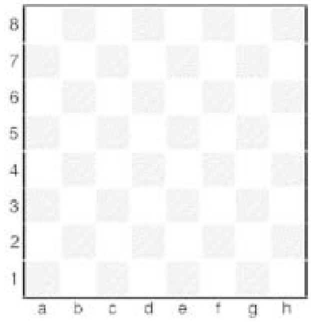
El **ajedrez** es un juego de ingenio entre dos bandos (blancas y negras) iguales en fuerzas y formación, regido por ciertas reglas preestablecidas. Comprende un tablero, que es propiamente el campo de batalla y 16 piezas por bando. La realización de las jugadas o movidas es alternada: juega primero el que tiene las piezas blancas y el objetivo final es llevar al rey enemigo a una posición especial conocida como jaque mate, en la que se encuentra sin escape posible. En este juego la suerte no tiene cabida, por lo tanto, es fundamental el estudio del mismo, complementando sus aspectos teóricos y prácticos para desarrollar la suficiente habilidad y destreza. El detectar y corregir sus propios errores debe ser un hábito importante para todo ajedrecista.

El tablero y las piezas

El ajedrez se juega en un tablero cuadrado de 64 casillas o escaques que se van alternando de colores claros y oscuros (cuadros blancos y negros). La colocación del tablero debe disponerse de forma tal que cada jugador tenga a su derecha una esquina de color claro. (Recuerden: “cuadro blanco a la derecha”). Es importante conocer algunos términos referentes al tablero:

Las ocho filas horizontales se llaman “líneas” y las ocho filas verticales se llaman “columnas”. Las cuatro primeras columnas, de izquierda a derecha del jugador de las piezas blancas, las conoceremos como “ala” o “flanco de dama” y las otras cuatro como “ala” o “flanco de rey”. Existen dos “grandes diagonales”, las que van de esquina a esquina.

Las cuatro casillas centrales conforman el “centro del tablero”. Las cuatro primeras líneas (de abajo hacia arriba del diagrama) forman el campo de las blancas y las otras cuatro, el campo de las negras.



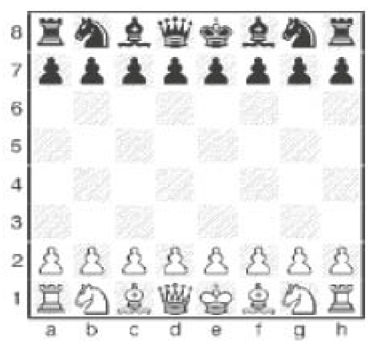
Cada bando posee 16 piezas: un rey, una dama, dos torres, dos alfiles, dos caballos y ocho peones.

♔	REY	♚
♕	DAMA	♛
♖	TORRE	♜
♗	ALFIL	♝
♘	CABALLO	♞
♙	PEÓN	♟

La colocación de las piezas

En el diagrama que se muestra a continuación se observa la forma en que se colocan las piezas en el tablero de ajedrez.

Se debe observar que la dama blanca va en casilla blanca y la dama negra en cuadro oscuro (“la dama siempre va en su color”).

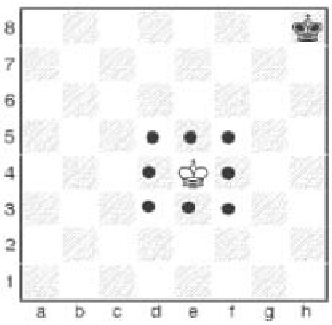


POSICIÓN INICIAL

El movimiento de las piezas

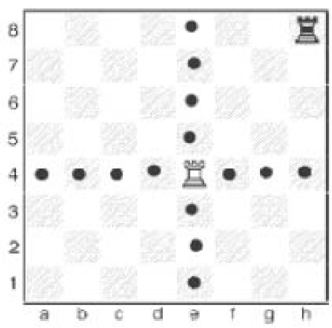
A continuación se explicará el movimiento de cada una de las piezas. Mostraremos una pieza blanca en el centro del tablero y una negra ubicada en la esquina. Compárese la diferencia de movimientos entre una y otra. Como podrás ver, las piezas centralizadas dominan el mayor número de casillas (salvo la torre).

-EL REY: Es la pieza más importante en el ajedrez, al que debemos proteger, pues si se le ataca y acorrala, el juego finaliza. Sólo puede mover a una casilla a su alrededor, ya sea en forma horizontal, vertical o diagonal. Se ubica, en la posición inicial, en la casilla “e1” (“e8” el rey de las negras).



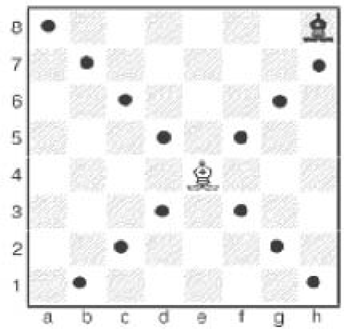
En el centro del tablero el rey dispone de ocho casillas mientras que en la esquina sólo puede mover a tres.

-LA TORRE: Su movimiento es en línea recta a cualquier número de casillas que se desee. Se colocan en las esquinas del tablero (escaques “a1” y “h1” de las blancas y “a8” y “h8” las torres negras).



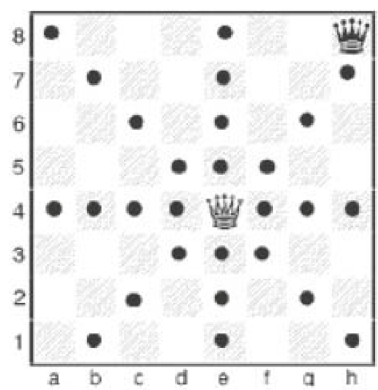
La torre, como puede observarse, domina el mismo número de casillas (14) estando en cualquier parte del tablero. Es la única pieza que tiene esta particularidad.

-EL ALFIL: Se mueve formando una diagonal el número de casillas que sea necesario. Se ubican en las casillas “c1” y “f1” los alfiles blancos y en “c8” y “f8” los negros. Obsérvese que cada bando posee un alfil que sólo domina cuadros blancos y otro que va únicamente por los negros.

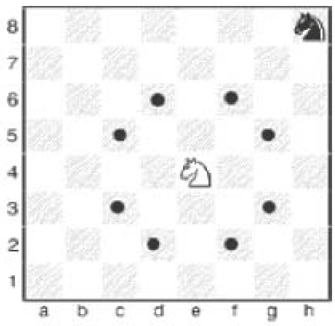


El alfil negro, ubicado en una esquina del tablero, domina la “gran diagonal”.Controlando siete escaques, mientras que el alfil blanco (que también domina la otra “gran diagonal”) puede mover a 13 casillas, al estar en el centro del tablero.

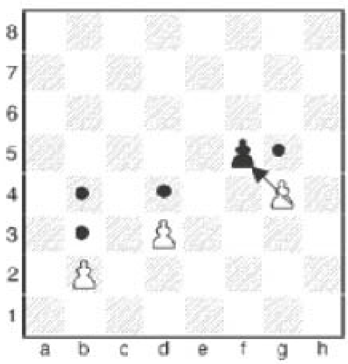
-LA DAMA: Es la pieza más poderosa en el juego por su gran movilidad. Combina los movimientos de la torre y el alfil, es decir, se mueve en línea recta o en diagonal. Se coloca en “d1” la dama blanca y en “d8” la negra.



-EL CABALLO: Se mueve realizando una letra "L" pasando por sólo tres casillas. Es la única pieza que puede "saltar" por piezas propias o rivales. Se colocan en "b1" y "g1" los caballos blancos en su posición inicial y en "b8" y "g8" los negros. El caballo ubicado en centro es superior al de la esquina, ya que domina mayor número de casillas y puede trasladarse más rápidamente a cualquier parte del tablero. El caballo blanco puede saltar a ocho escaques mientras que su contraparte negro tiene, exclusivamente, dos movimientos posibles.



-EL PEÓN: Cada bando tiene ocho peones y se colocan en la segunda línea los blancos y en la séptima los negros. Su movimiento es limitado, ya que se mueven una casilla hacia adelante, aunque en su posición inicial (en la segunda línea) pueden mover también dos cuadros. Es la única pieza que no puede retroceder, siempre va hacia adelante. El peón, cuando captura alguna pieza rival, lo hace en forma diagonal, una sola casilla. Es decir, sus movimientos de avance y de captura son diferentes.



Estudia las posibles jugadas de cada peón blanco. El primero (de izquierda a derecha) puede mover una o dos casillas, ya que se halla en su posición original. El segundo sólo puede jugar un escaque. El siguiente puede mover hacia adelante o capturar el peón enemigo en diagonal.

La captura de las piezas

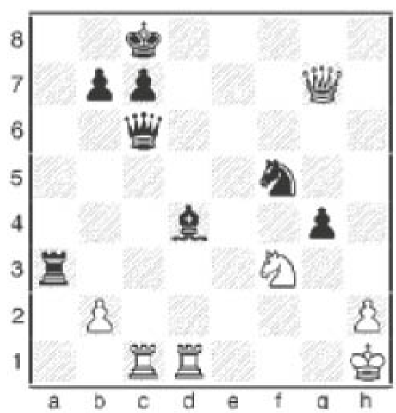
El movimiento de las piezas está limitado por dos factores:

1. Si encuentra en su camino piezas del mismo bando no podrán pasar. Sólo el caballo puede "brincar" las piezas. En la posición inicial es la única pieza que tiene posibilidad de moverse, las otras están encerradas por los peones.

2. Tampoco es posible pasar sobre las piezas rivales (salvo el caballo). Si una pieza ataca a una rival es posible "capturarla", es decir, instalarse en la casilla ocupada por la pieza enemiga y remover ésta del tablero. Las capturas en el ajedrez no son forzadas.

Nota importante: al rey nunca se le captura, sino se le acorrala (y llegar al jaque mate); esto se explicará un poco más adelante.

En el diagrama siguiente se deben observar los diversos movimientos de las piezas y las posibles capturas.



El valor de las piezas

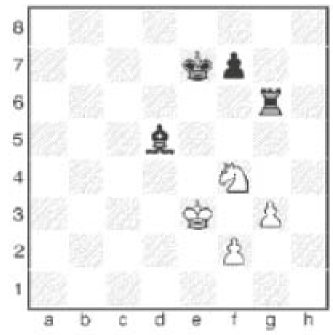
En el ajedrez cada pieza tiene un cierto valor de acuerdo con su capacidad de movimiento (tanto al número de casillas que logran dominar como a su respectiva velocidad de desplazamiento de un sector a otro del tablero). Por ejemplo, la torre que puede llegar a ocupar los 64 cuadros del tablero va a valer más que el alfil que sólo domina la mitad. El caballo, aunque es lento en su desplazamiento, tiene la cualidad especial de "brincar" las piezas con lo que su valor será semejante al alfil y así sucesivamente con cada una de las piezas. Con base en todo esto, se puede saber cuándo es favorable, en la mayoría de los casos, cambiar una pieza por otra, así como darnos una idea de quién tiene ventaja (o si existe equilibrio) en el factor material del juego. Es importante señalar que estos valores son relativos (se aplican de manera flexible de acuerdo con la situación concreta de cada posición) excepto el del rey, que tiene un valor absoluto (ya que es una pieza que no se puede capturar).

A continuación se muestran los valores de las piezas más aceptados por los expertos:

PEON = 1
CABALLO = 3
ALFIL = 3
TORRE = 5
DAMA = 9

Veamos dos sencillos ejemplos sobre el tema del valor de las piezas en el ajedrez.

En el diagrama anterior, la torre negra y la dama blanca se están atacando mutuamente. Si el turno de juego es del negro, les favorece capturar la dama rival, ya que ésta es más valiosa (9 puntos) que la torre, (5 puntos). En cambio, si les corresponde jugar a las blancas, no les conviene capturar la torre ya que está defendida por el rey y peón negros y perderían material. Por lo tanto, deben retirar la dama de la acción de la torre en su próxima jugada. (Observe y explique al alumno por qué las piezas de menos valor suelen ahuyentar a las de mayor valor).



En el diagrama anterior, el turno de juego es del blanco, que ataca con el caballo (3 puntos) a dos piezas enemigas. Puede capturar la torre (5 puntos) o el alfil (3 puntos). Si se captura la torre, sería a su vez capturado por el peón rival. La conclusión es que en este caso es más conveniente capturar el alfil, que no está defendido. Este tipo de análisis sobre el valor de las piezas y su posible intercambio (el aspecto material del ajedrez) se debe realizar de forma continua en cada partida.

Movimientos especiales

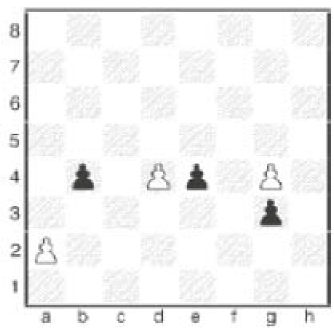
Antes de pasar a explicar el objetivo fundamental del juego (el jaque mate) conviene enseñar los tres movimientos especiales que tiene el ajedrez.

1. Coronación del peón

(También llamado promoción de peón). Una peculiaridad más del peón es que se transforma en otra pieza de mayor valor (salvo el rey) al llegar a su octava fila. El jugador debe sustituir el peón por la pieza que él elija: por una dama, torre, caballo o alfil. En la gran mayoríade los casos se cambia por la dama al ser la pieza de mayor movilidad, y por tanto, la más valiosa. Se puede pedir la dama incluso si está ya en el tablero (el límite de damas que puede tener un bando es nueve: la inicial y transformando los ocho peones).

2. La captura al paso

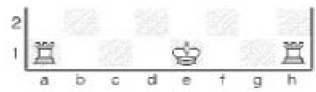
Los peones tienen una forma especial de capturar algún peón enemigo. Si tenemos un peón en la quinta línea y un peón rival en columna adyacente al nuestro, mueve dos casillas y se ubica a un lado de nuestro peón lo podemos “comer” en diagonal. Esta captura sólo puede realizarse a la jugada siguiente del movimiento del peón rival, y si no se efectúa la captura al paso, se pierde el derecho a hacerlo después.



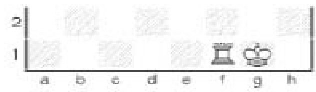
En la posición anterior se observan desde la izquierda tres momentos distintos en una captura “al paso”. El peón blanco avanza dos casillas, y es capturado en diagonal por el peón negro que está a su lado. El peón blanco es, desde luego, removido del tablero.

3. El enronque

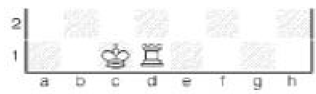
Este movimiento especial involucra al rey y a cualquiera de las dos torres. Se conoce como enroque corto cuando el rey, en su posición inicial, se mueve dos casillas y se coloca en “g1” y la torre de rey se translada a su lado, en “f1”. En el enroque largo el rey se mueve también dos cuadros, ubicándose en “c1” y la torre del ala de dama se coloca a su lado, en la casilla “d1”. Esta jugada se utiliza para dejar a nuestro rey mejor protegido atrás de sus peones y al mismo tiempo darle mayor actividad a las torres. El enroque se puede realizar una sola vez en la partida por cada bando.



posición inicial



enroque corto



enroque largo

En el primer diagrama vemos la posición del rey y de las torres dispuestas a enrocarse en cualquier flanco. En los dos siguientes encontramos realizados el enroque corto y el enroque largo.

Existen ciertas condiciones especiales para poder efectuar el enroque:

a) No es posible realizarlo si alguna pieza (propia o rival) se encuentra en el camino del rey y la torre.

b) Si el rey o la torre ya se han movido antes, tampoco es legal el enroque.

c) Para poder realizar el enroque, el rey no debe estar o pasar por jaque, o sea, por la acción de alguna pieza contraria.

El jaque y el mate

Se ha visto ya cómo se atacan y capturan las piezas. Los reyes también pueden ser atacados y esta acción de amenaza directa al rey se conoce como jaque. En vista de que los reyes no pueden ser capturados, es obligatorio oponerse al ataque rival, es decir, es ilegal ponerse o permanecer en jaque. Esto, desde luego, limita el movimiento del rey, ya que no puede ir a ninguna casilla dominada por alguna pieza rival. Existen tres maneras diferentes de combatir el jaque al rey:

1. Capturar la pieza que da jaque.

2. Mover el rey a una casilla disponible.

3. Interponer una pieza entre la acción de la pieza que da jaque y el rey.

El jaque al rey que no pueda ser contrarrestado por ninguna de las tres acciones anteriores se conoce por jaque mate. Así, el objetivo del juego se ha logrado y el jugador que logró el jaque mate es el vencedor. En los siguientes diagramas se verán algunas posiciones típicas de mate.

En las cuatro posiciones anteriores los reyes se encuentran en posición de jaque mate.

Reciben jaque por una pieza rival y no la pueden capturar ni tienen casilla disponible para escapar.

Se muestran otras situaciones de mate. Estudie cada posición y compruebe cómo las piezas propias y contrarias contribuyen a acorralar cada uno de los reyes.

Es importante visualizar rápidamente las posiciones de mate, ya que éste es el objetivo del juego.

Referencias

- CUÉLLAR, J., ANTONIO (2010). *Matemáticas II: Geometría y Trigonometría* (2ª ed.) México: McGraw-Hill
- BORNELL, C, (2000). *La divina proporción, las formas geométricas.* México: Alfa-Omega Grupo Editor. CONAMAT, (2009).
- *Geometría y Trigonometría* (1ª ed.). México: Pearson Prentice Hall.
- BASURTO HIDALGO E. Y CASTILLO PEÑA G. (2010). *Matemáticas 2: Competencias + Aprendizaje + Vida* (1ª ed.). México: Pearson Prentice Hall.
- GUZMÁN, H., A. (1999). *Geometría y Trigonometría*, (décima reimpresión). México: Publicaciones Cultural.
- JIMÉNEZ, I. (2007). *Geometría y Trigonometría*, (1ª ed.). México: Pearson Educación de México.
- MARTÍNEZ, A., M. (1997). *Geometría y Trigonometría* (1ª ed.). México: McGraw-Hill.
- MÉNDEZ, H., A. (2010). *Matemáticas 2*, (1ª ed.). México: Santillana.
- PÉREZ, M. J., (2010). *Matemáticas 2 para preuniversitarios.* (1ª ed.). México: Esfinge.
- SALAZAR, V., P. SÁNCHEZ, G., JIMÉNEZ, A., A. Y. (2006) *Matemáticas 2* (2ª ed.). México: Nueva Imagen.
- VELASCO, S., G. (2010). *Geometría y Trigonometría* (1ª ed.). México: Trillas.
- ZAMORA, M., S. (2007). *Geometría y Trigonometría* (1ª ed.). México: ST Editorial
- FUENLABRADA, De la Vega., S. (2008) *Probabilidad y Estadística.* (3ª ed.). México: McGraw-Hill.
- GAMIZ, E., B. (2008). *Probabilidad y Estadística con Prácticas con Excel* (2ª ed.). México: Just in Time Press.
- MAGAÑA, C, L. (1995) *Probabilidad y Estadística* (2ª ed.). México: Nueva Imagen.
- PORTA DE BRESSAN, A., M. (2008) *Probabilidad y Estadística: cómo trabajar con niños o jóvenes* (1ª ed.). México: EDC Novedades Educativas
- SÁNCHEZ, E. (2010). *Probabilidad y Estadística con CD* (3ª ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.

INSERTAR DATOS

DE COLOFÓN

PÁGINA 480

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Dirección General del Bachillerato

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEBACHILLERATO
COMUNITARIO