

Probabilidad y estadística II



Sexto semestre

Probabilidad y estadística II



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



Telebachillerato Comunitario. Sexto semestre.

Probabilidad y Estadística II

Autoras:

Cornelio Martínez López

Patricia Rivera Sánchez

Asesoría académica:

Cayetano Quincunx Avelleyra

Centro de Estudios y Acciones Públicas A.C.

Asesoría técnico-pedagógica:

Marisol López Hernández

Miguel Ángel Méndez Mandujano

Servicios editoriales:

Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (FLACSO)

Coordinación General: Lorenzo Gómez Morin Fuentes

Editores Responsables: José Ángel Quintanilla D'Acosta y Mónica Lobatón Díaz

Diseño y diagramación, material fotográfico e iconografía:

Instituto de Gestión e Innovación Educativa (IGIE)

José Pedro Cortés Xiqui, Maritza Sosa Ameneyro y Vanessa Alejandra Valadez Gutiérrez

Primera edición

Derechos Reservados. Secretaría de Educación Pública, 2016 ©

Argentina 28, Centro, 06020, Ciudad de México.

ISBN: 978-607-9463-15-1

Séptima reimpresión

Impreso en México

Prefacio

Estimado estudiante, el libro que tienes en tus manos fue elaborado pensando en ti, en tus necesidades e inquietudes, como un instrumento que te apoye ahora que estudias el bachillerato. En sus páginas encontrarás contenidos y actividades que son fundamentales para que paso a paso, puedas alcanzar las metas que la asignatura te propone para este semestre.

A ti te toca, ahora, sacarle el mayor provecho a este libro, que es fruto del esfuerzo de un grupo de profesores y especialistas. Si lo haces tu amigo, lo aprovechas al máximo y lo combinas con el apoyo de tu maestro y de los demás recursos didácticos que están a tu alcance, seguramente ampliarás tus competencias y habilidades para construir un mejor futuro para ti, y contribuir al desarrollo de tu comunidad, de tu estado y de nuestro México.

Te deseamos el mayor de los éxitos en esta importante etapa de tu formación, el bachillerato.

Tabla de contenido

Probabilidad y Estadística II

Presentación general	6
Enfoque para el desarrollo de competencias	7
¿Cómo está estructurado este libro?	9
Simbología.....	12
¿Con qué conocimientos cuento?.....	13

Bloque I. Aplicas las técnicas de conteo

Árbol de probabilidad	27
Conteo aditivo y multiplicativo	30
Permutación	32
Variaciones	34
Combinaciones	35

Bloque II. Aplicas la probabilidad conjunta

Regla de los eventos mutuamente excluyentes, no excluyentes e independientes	44
Reglas de probabilidad	51
Probabilidad condicional.....	52
Teorema de Bayes.....	56

Bloque III. Analizas las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas

Variables aleatorias continuas y discretas y su aplicación en las distribuciones de probabilidad	62
Función y distribución de probabilidad	64
Distribución de probabilidades	66
Distribución de probabilidad binomial	67
Distribución de probabilidad normal estándar.....	70
Parámetros (media y desviación estándar)	74

Bloque IV. Comprendes el comportamiento de los datos de dos variables

Representación y comportamiento de datos para dos variables	84
Representación tabular de contingencia	84
Análisis de correlación	90
Covarianza	90
Coefficiente de correlación lineal	96
Regresión lineal simple	103
El método de mínimos cuadrados	104

Glosario	110
Apéndice	112
Referencias.....	121

Presentación general

La asignatura Probabilidad y Estadística II es parte de tu formación propedéutica de bachillerato y pertenece al campo disciplinar de Matemáticas. Conforme al marco curricular común, tiene la finalidad de propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico, mediante procesos de razonamiento, argumentación y construcción de ideas que promuevan el desarrollo de distintas competencias para la resolución de problemas que trasciendan el ámbito escolar. Probabilidad y Estadística II es parte del mapa curricular del sexto semestre del plan de estudios de bachillerato general que ha establecido la Secretaría de Educación Pública (SEP). Es importante mencionar que dicha asignatura se asocia con otras, tal es el caso de Matemáticas I, II, III y IV; Probabilidad y Estadística I así como con el taller de Desarrollo Comunitario. También tiene relación con Sociología I, la cual pertenece al componente de formación propedéutica, donde se aborda la Estadística como herramienta metodológica para el estudio de los problemas sociales.

El libro está estructurado en cuatro bloques. En el primero aplicarás las técnicas de conteo, y analizarás los resultados posibles de un evento de probabilidad a través de la construcción de árboles de probabilidad e identificarás los principios fundamentales del conteo (aditivo y multiplicativo) como una herramienta en la solución de problemas. De igual manera se examinan las semejanzas y diferencias de las permutaciones y combinaciones al ponerlas en práctica. En el bloque II, aplicarás la probabilidad conjunta, y aprenderás a resolver problemas de probabilidad conjunta, condicional y teorema de Bayes en situaciones de tu propio interés a partir de la identificación del tipo de evento (mutuamente excluyentes y no excluyentes) y de las reglas de probabilidad, mediante la aplicación de las operaciones básicas de conjuntos.

En el bloque III, analizarás las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas. Resolverás problemas de probabilidad con variables aleatorias discretas y continuas a partir del conocimiento de una distribución de probabilidad, identificando el tipo de variable y su distribución; y emplearás el modelo de distribución de probabilidad binomial y normal, los parámetros de media, varianza y desviación estándar, con una actitud crítica, de tolerancia, respeto y capacidad de análisis. En el IV y último bloque, comprenderás el comportamiento de los datos de dos variables, en este apartado resolverás problemas que involucren el comportamiento de datos de un par de variables en situaciones de su propio interés, tras conocer la tendencia, el coeficiente de correlación lineal y la fórmula que relaciona las variables, mediante la representación tabular y gráfica.

Te invitamos a aprovechar al máximo este libro, el cual está integrado por una serie de contenidos y actividades de aprendizaje, a través de los cuales desarrollarás conocimientos, habilidades, actitudes y valores para crecer como persona y como ciudadano, capaz de resolver y comprender situaciones de la vida cotidiana a través del lenguaje científico y matemático, así como a construir nuevos conocimientos y compartirlos con quien te rodea.



¿Qué es una competencia?

La educación basada en competencias pretende que adquieras los conocimientos, desarrolles las habilidades y muestres las actitudes necesarias para resolver y enfrentarte a situaciones de la vida diaria de mejor manera.

En el telebachillerato comunitario, se consideran tres tipos de competencias: genéricas, disciplinares y profesionales. En ésta asignatura Probabilidad y Estadística I se promueve el desarrollo de las dos primeras que podrás observar; las competencias genéricas que se abordan se mencionan a continuación, y al inicio de cada bloque las disciplinares.

Competencias genéricas	Atributos
1. Te conoces y te valoras a ti mismo y abordan problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigues.	<ul style="list-style-type: none">Analizas críticamente los factores que influyen en la toma de decisiones.
2. Eres sensible al arte y participas en la apreciación e interpretación de expresiones en distintos géneros.	<ul style="list-style-type: none">Valoras el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.Experimentas el arte como un hecho histórico compartido que te permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrollas un sentido de identidad.Participas en prácticas relacionadas con el arte.
3. Eliges y practicas estilos de vida saludables.	<ul style="list-style-type: none">Reconoces la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.Tomas decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.Cultivas relaciones interpersonales que contribuyen a tu desarrollo humano y el de quienes te rodean.
4. Escuchas, interpretas y emites mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de códigos y herramientas apropiados.	<ul style="list-style-type: none">Expresas ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5. Desarrollas innovaciones y propones soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	<ul style="list-style-type: none">Sigues instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de tus pasos contribuyen a alcanzar un objetivo.Ordenas información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.Construyes hipótesis y diseñas y aplicas modelos para probar su validez.Sintetizas evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.

Enfoque para el desarrollo de competencias

<p>6. Sustentas una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Eliges las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discriminas entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.
<p>7. Aprendes por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Articulas saberes de diversos campos y estableces relaciones entre ellos y tu vida cotidiana.
<p>8. Participas y colaboras de manera efectiva en equipos diversos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Asumes una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuentas, en distintos equipos de trabajo.
<p>9. Participas con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Privilegas el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos. • Tomas decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad. • Conoces tus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoces el valor de la participación como herramienta para ejercerlos. • Contribuyes a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad. • Actúas de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y te mantienes informado. • Adviertes que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.
<p>10. Mantienes una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Reconoces que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechazas toda forma de discriminación. • Dialogas y aprendes de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio. • Asumes que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.
<p>11. Contribuyes al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Asumes una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional. • Reconoces y comprendes las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente. • Contribuyes al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.

¿Cómo está estructurado este libro?



Inicio de cada bloque

Cada bloque comienza con un esquema en el que se muestran los objetos de aprendizaje, los productos y las competencias disciplinares que se abordarán.

Posteriormente se presenta una breve introducción en donde se indica de qué trata y cómo vas a trabajar. Asimismo, se presenta el propósito del bloque, es decir, las metas y los desempeños que debes lograr.

Para identificar qué tanto sabes del tema y cuáles son las áreas por mejorar, se propone una evaluación diagnóstica, que además te permitirá conocer tu nivel en las competencias a desarrollar durante el curso.

¿Qué aprenderás y cómo organizarás tu estudio?

Bloque I

10 HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

- Árbol de probabilidad
- Principios y técnicas fundamentales del conteo
 - Conteo aditivo
 - Conteo Multiplicativo
- Permutaciones y combinaciones: semejanzas y diferencias

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Argumenta el uso del árbol de probabilidad en la solución de un problema, con métodos numéricos, gráficos, análisis variacionales, mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación
- Identifica las ideas clave en un texto sobre las técnicas de conteo e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética sobre cómo se construye un árbol de probabilidad, interpretando tablas, gráficos, mapas, diagramas, y textos con símbolos matemáticos y científicos.
- Propone maneras de solucionar un problema en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos, asumiendo una actitud constructiva y aportando puntos de vista con apertura, considerando los de otras personas de manera reflexiva.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes.

Desempeños esperados al concluir el bloque

- Analiza los resultados posibles de un evento de probabilidad a través de la construcción de árboles de probabilidad.
- Identifica los principios fundamentales del conteo (aditivo y multiplicativo) como una herramienta en la solución de problemas.
- Analiza y clasifica las semejanzas y diferencias de las permutaciones y combinaciones, al ponerlas en práctica en la solución de problemas en diversos contextos.

Productos de aprendizaje

- Problemas específicos de la comunidad analizados con árbol de problemas.
- Mapa conceptual de combinaciones y permutaciones.

Aplicas las técnicas de conteo

Introducción

En este bloque aplicas las técnicas de conteo. Conocerás, cuáles son estas técnicas, y las aplicaciones que puede tener en tu vida cotidiana.

Primero analizarás los resultados posibles de un evento de probabilidad a través de la construcción de árboles de probabilidad. Posteriormente identificarás los principios fundamentales del conteo aditivo y multiplicativo, como herramientas en la solución de problemas. Y por último analizarás y clasificarás las semejanzas y diferencias de las permutaciones y combinaciones, al ponerlas en práctica en la solución de problemas en diversos contextos.

Uno de los temas más importantes en la estadística son los métodos de inferencia basados en las probabilidades, es decir, obtener respuestas de problemas concretos a partir de la inferencia. Los ejercicios que aquí se presentan tienen como objetivo que aprendas los conceptos y su aplicación a problemas concretos. Por ello le ponemos énfasis a que desarrolles tu intuición en su solución más que al uso de calculadoras, hojas de cálculo, etc., su uso es opcional y, seguramente le servirán para desarrollar tus habilidades y reforzar tu conocimiento. Por lo anterior, en el texto de cada bloque anexamos algunas referencias que podrás consultar y utilizar para profundizar el conocimiento de los temas.

Mapa de objetos de aprendizaje

```
graph TD; A[Bloque I Técnicas de conteo] --> B[Árbol de Probabilidad]; A --> C[Conteo aditivo y multiplicativo]; C --> D[Permutaciones]; C --> E[Combinaciones];
```

¿Cómo está estructurado este libro?



Desarrollo del bloque

Esta parte es fundamental, pues aquí encontrarás el contenido general y disciplinar que necesitas para acercarte al tema de la Estadística.

A lo largo del bloque se intercalan estrategias didácticas de aprendizaje, actividades acompañadas de imágenes, ejemplos, preguntas detonadoras y evaluaciones. Todo está relacionado con los contenidos y las competencias a desarrollar. También encontrarás algunos apoyos de estudio como cápsulas con datos interesantes y cuadros al margen del texto para reforzar tu aprendizaje; por ejemplo:

Bloque II *Aplica la probabilidad conjunta*

Actividad de aprendizaje 1

Retoma el ejercicio del bloque IV de la curso Probabilidad y Estadística I en que definiste algunas probabilidades a partir de eventos de los 50 habitantes de la comunidad.

Abra que ya sabes en qué consisten los eventos mutuamente excluyentes y no excluyentes, aplica lo aprendido, primero realiza un cuadro y define las características de la población por cada caso. Después utiliza la siguiente tabla de contingencia para codificar los datos que obtienes.

Eventos:

- A: Es mujer
- B: Es hombre
- C: Es un habitante que sabe a la escuela
- D: Es un habitante que habla lengua indígena

	Habitante que sabe a la escuela	Habitante que habla lengua indígena	Habitante que sabe a la escuela y habla lengua indígena
Mujer			
Hombre			

Coméntalo:

- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A y B, y qué tipo de evento es?
- ¿Qué probabilidad hay de que ocurra el evento A y D, y qué tipo de evento es?
- ¿Asumo existe probabilidad de que ocurra el Evento B, C y D, y qué tipo de evento es?

Conecta las respuestas obtenidas con las compañeras y compañeros de clase e incluye los resultados en la portafolio de evidencias.

48

1. **Glosario**, definiciones y términos para apoyar la comprensión del texto.

2. **Imágenes**, que te ayudarán a una mejor comprensión de los conceptos.

3. **Figuras**, que te permitirán realizar las actividades de aprendizaje.

4. **Datos interesantes**, que facilitan la relación de los contenidos con tu vida diaria.

Analiza las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta se presenta como la lista de los distintos valores x_i que puede tomar la variable aleatoria X , junto con sus probabilidades asociadas $P(X = x_i) = P_i(x_i)$, esto es, el conjunto de parejas $(x_i, P_i(x_i))$.

Cuando determinamos los valores de la variable aleatoria, le asignamos una probabilidad, y a esto se le llama distribución de probabilidad.

Actividad de aprendizaje 2

Realiza una búsqueda bibliográfica que incluya conceptos básicos y ejemplos de variables aleatorias discretas y continuas.

Al encontrar el significado de estos conceptos, sintetízalos y desarrolla un esquema en que así que relacionen cada uno de ellos. Pueden usar otros libros de texto o páginas de internet. El objetivo es desarrollar un esquema conceptual para reforzar el contenido de los conceptos y su vinculación.

Al finalizar comenta tus resultados con tu profesor (a) y compañeros (as). Recuerda integrar tus documentos en el portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Define con el número 1 las variables que consideres ser aleatorias discretas, y con el número 2 las que sean aleatorias continuas. Comparte con tus compañeros (as) y tu profesor(a) las respuestas.

- Número de páginas de un libro _____
- Tiempo que tarda en fundirse una bombilla _____
- Número de preguntas en una clase de una hora _____
- Cantidad de agua consumida en un mes _____
- La edad de las mujeres en tu localidad _____
- La estatura de los hombres de tu salón _____
- El tiempo que tarda en madurar una manzana _____
- Número de pastores por familia en tu población _____

65



Cierre de bloque

Al terminar cada tema se te pedirá una actividad y un producto final para que puedas evaluar cuánto has avanzado y qué áreas de oportunidad tienes; asimismo se te pedirá analizar, investigar, reflexionar y argumentar acerca de los temas señalados.

El libro incluye actividades de aprendizaje para que evalúes tu desempeño en el logro de las competencias. Al finalizar cada actividad puedes consultar la retroalimentación de la misma en el apartado *Apéndice* al final del libro. Ten presente que cada actividad debe concretarse en una evidencia que irás recopilando en tu cuaderno y concentrando para la evaluación del curso.

Aplica la probabilidad conjunta

Autoevaluación

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una X en el nivel de avance que consideres que has logrado a lo largo del bloque II.

Interpretación del nivel de avance:

100-90% = lo logré el aprendizaje de manera independiente.
 80-70% = me quedé espacio para construir mi aprendizaje.
 60-50% = fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente.
 40% o menos = no logré el aprendizaje.

Competencia	Nivel de avance			
	100-90%	80-70%	60-50%	40% o menos
Identifica tipos y características de distintos eventos.				
Hace la diferenciación entre eventos mutuamente excluyentes y no excluyentes e independientes.				
Sabes lo que es probabilidad condicional.				
Sabes en qué consiste el teorema de Bayes.				
Usando la lógica, tienes la capacidad de reconocer un evento mutuamente excluyente de uno que no lo es.				
Aplicas la probabilidad y resultados de cuestionamientos a través del árbol de probabilidad.				
Resuelves cuestiones probables a partir de fórmulas específicas.				
Interpretes y compares resultados del árbol de probabilidad y cálculos con los fórmulas correspondientes.				
Interpretes los resultados obtenidos.				
Reflexionas acerca del uso de los procedimientos matemáticos en la vida cotidiana.				
Sabes resolver cuestiones de probabilidad utilizando las reglas de éste.				
Reflexionas sobre el uso de la probabilidad en la vida diaria.				
Potenencias la capacidad de analizar el utilizar las herramientas aprendidas en el presente bloque.				

57

Bloque II Aplica la probabilidad conjunta

Cuestionario

Instrucciones: Lee, reflexiona y responde los cuestionamientos que a continuación se presentan.

- ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué lo consideras de esta manera?

- ¿Cuáles son las ideas y los conceptos mediante representaciones lingüísticas y matemáticas que identificas de manera inmediata y puedes aplicar en tu vida diaria?

- ¿Consideras que con lo que has aprendido hasta ahora, puedes proyectar maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo?

58

Los contenidos y las actividades se presentan de una manera atractiva. Aprovecha cada pregunta, contenido y actividades, ya que incidirán en tu crecimiento personal, familiar y social.

Trabaja con tu profesor y con tus compañeros; acércate a ellos, resuelvan dudas y aprendan juntos; date la oportunidad de construir con ellos este viaje.

Esperamos que el curso te sea interesante y fructífero.



Simbología que facilitará tu proceso de aprendizaje

Diseño Instruccional



Para iniciar, reflexiona



Aprende más



Actividad de aprendizaje

Aposos para reforzar el aprendizaje



Glosario



Reflexionemos sobre la actividad



Sabías que...

¿Con qué conocimientos cuento?

Para que se te facilite la comprensión de los contenidos que estamos por mostrar, te proponemos hacer un breve repaso de lo que aprendiste en Matemáticas II, sobre Estadística y Probabilidad I, Matemáticas III, Matemáticas IV sobre ecuaciones lineales simples, así como elementos de aritmética básica, como la regla de tres y los porcentajes. A continuación te presentamos algunos ejercicios de diagnóstico con el propósito que repases un poco antes de iniciar.

Como recordarás existen diferentes procedimientos para resolver un mismo problema, en el curso de Probabilidad y Estadística I, estudiaste las bases de la estadística descriptiva y la introducción a la teoría de conjuntos y probabilidad. Con el conocimiento que tienes responde las siguientes preguntas. Recuerda que al finalizar puedes obtener las respuestas en el anexo respectivo. La intención de este apartado es que sepas qué es lo que te hace falta repasar para iniciar el curso eficientemente.

Esta evaluación tiene 7 reactivos, si aciertas entre 7 y 6 tu nivel es excelente y puedes iniciar el estudio de la asignatura. Si obtienes entre 5 y 4 tu nivel es muy bueno pero sería importante que repasaras tus clases de matemáticas, referente a las que no acertaste. Si obtienes 3 o menos, tu nivel es regular por lo que será necesario hacer un repaso general de los temas que se tratan en esta evaluación.

¿Estás listo?

Evaluación diagnóstica

1. Explica con tus palabras ¿qué es estadística?

2. ¿A qué nos referimos cuando hablamos de probabilidad?

3. Con la finalidad de contar con un alimento para animales con un valor nutritivo más alto que el maíz común, un grupo de expertos comparan dos nuevas variedades de maíz con un contenido de aminoácidos modificado llamadas opaca-2 y harinoso-2, con maíz común. Los investigadores mezclan maíz y soya para alimentar animales, con 12%, 16% y un 20% de proteína. Suministran diariamente este alimento compuesto a 10 pollos machos y anotan su aumento de peso al cabo de 21 días. El aumento de peso de los pollos es una medida de valor nutritivo del contenido del alimento, que se suministra. De acuerdo a lo anterior identifica ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿Cuál es la variable independiente?, y el aumento de peso ¿qué sería?

¿Con qué conocimientos cuento?

Variable	Respuesta
Independiente	
Dependiente	

4. Se está realizando una evaluación del Seguro Popular en el Estado de Puebla, ya que se quiere saber si el sistema está logrando sus objetivos. Gran parte de la información sobre el Seguro Popular proviene de las historias clínicas de los enfermos, pero esa fuente de información no permite comparar a las personas que utilizan los servicios de quienes no lo hacen, aun cuando cuenten con el Seguro Popular. Así es que, se realizó una encuesta basada en una muestra aleatoria de 150,000 Poblanos que cuentan con este Seguro de Salud, considerando que en el 2012 se habían afiliado al Sistema de Protección Social en Salud 3,141,164 personas.

En los resultados de la encuesta se encontró que el 76% de los hombres y el 86% de las mujeres de la muestra habían visitado algún médico de medicina general como mínimo una vez durante el último año. De acuerdo con la información anterior responde las siguientes preguntas:

- 1) ¿A cuántas personas se entrevistó en el estado de Puebla?
- 2) ¿Cuál es la población que representa?
- 3) ¿Crees que estas estimaciones se aproximan a la realidad de toda la población?

¿Por qué? _____

5. El gobierno de Nuevo León realizó una encuesta acerca de la productividad de las empresas en la ciudad de Monterrey. Se envió un cuestionario a 200 empresas pequeñas 200 medianas y 200 grandes. La proporción de no respuesta es importante para decidir la confiabilidad de los resultados obtenidos. Los datos sobre las respuestas a esta encuesta son:

	Empresas Pequeñas	Empresas Medianas	Empresas Grandes
Respuesta	125	81	40
No Respuesta	75	119	160
Total	200	200	200

Tomando en cuenta la información anterior responde las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es el porcentaje de empresas (total) de la encuesta con No respuesta y, ¿Cuál es el resultado para cada grupo de empresas analizadas por separado (pequeñas, medianas y grandes)?

- b) Después de considerar tu respuesta, a ¿Qué conclusiones se pueden obtener de este ejercicio?

6. Completa el siguiente párrafo con la palabra o palabras correctas:

La probabilidad de un (1) _____, se denota como (2) _____, siendo A el evento simple en cuestión.

El (3) _____ es una técnica de muestreo probabilístico en las que todos los sujetos tienen una probabilidad, (4) _____ de cero, de ser seleccionados.

7. Anota en los siguientes renglones, 5 temas que en tu vida cotidiana puedas utilizar las probabilidades. Especifica cómo usarías el tema de probabilidades.

Tema	¿Como utilizaría las probabilidades?
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Una vez que hayas terminado la evaluación, puedes consultar los resultados en el apéndice al final del libro.

Verifica tus respuestas en el *apéndice* de retroalimentación al final del libro.

BLOQUE I

Aplicas las técnicas de conteo



Bloque I

10
HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

- Árbol de probabilidad
- Principios y técnicas fundamentales del conteo
 - Conteo aditivo
 - Conteo Multiplicativo
- Permutaciones y combinaciones: semejanzas y diferencias

Desempeños esperados al concluir el bloque

- Analiza los resultados posibles de un evento de probabilidad a través de la construcción de árboles de probabilidad.
- Identifica los principios fundamentales del conteo (aditivo y multiplicativo) como una herramienta en la solución de problemas.
- Analiza y clasifica las semejanzas y diferencias de las permutaciones y combinaciones, al ponerlas en práctica en la solución de problemas en diversos contextos.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Argumenta el uso del árbol de probabilidad en la solución de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos variacionales, mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación
- Identifica las ideas clave en un texto sobre las técnicas de conteo e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética sobre cómo se construye un árbol de probabilidad, interpretando tablas, gráficas, mapas, diagramas, y textos con símbolos matemáticos y científicos.
- Propone maneras de solucionar un problema en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos, asumiendo una actitud constructiva y aportando puntos de vista con apertura, considerando los de otras personas de manera reflexiva.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes.

Productos de aprendizaje

- Problemas específicos de la comunidad analizados con árbol de problemas.
- Mapa conceptual de combinaciones y permutaciones.

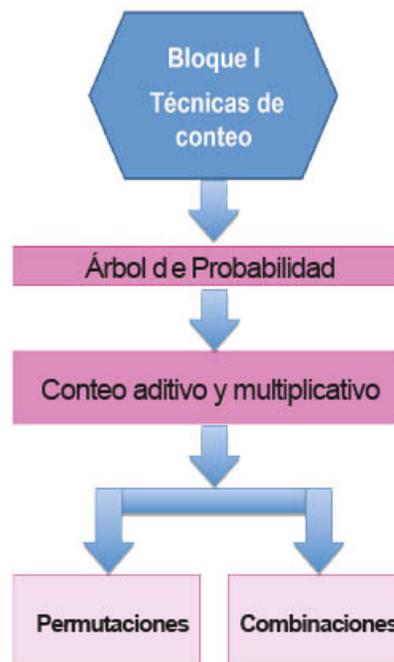
Introducción

En este bloque aplicas las técnicas de conteo. Conocerás, cuáles son estas técnicas, y las aplicaciones que puede tener en tu vida cotidiana.

Primero analizarás los resultados posibles de un evento de probabilidad a través de la construcción de árboles de probabilidad. Posteriormente identificarás los principios fundamentales del conteo aditivo y multiplicativo, como herramientas en la solución de problemas. Y por último analizarás y clasificarás las semejanzas y diferencias de las permutaciones y combinaciones, al ponerlas en práctica en la solución de problemas en diversos contextos.

Uno de los temas mas importantes en la estadística son los métodos de inferencia basados en las probabilidades, es decir, obtener respuestas de problemas concretos a partir de la inferencia. Los ejercicios que aquí se presentan tienen como objetivo que aprendas los conceptos y su aplicación a problemas concretos. Por ello le ponemos énfasis a que desarrolles tu intuición en su solución mas que al uso de calculadoras, hojas de cálculo, etc., su uso es opcional y, seguramente te servirán para desarrollar tus habilidades y reforzar tu conocimiento. Por lo anterior, en el texto de cada bloque anexamos algunas referencias que podrás consultar y utilizar para profundizar el conocimiento de los temas.

Mapa de objetos de aprendizaje





Para iniciar, reflexiona

Para que un informe basado en una muestra tenga valor, debe utilizar una muestra representativa, en que se hayan eliminado todos los posibles factores de influencia. En este punto (...) muchas de las cosas que usted lee en los periódicos y en las revistas revelan su inherente falta de significado.

Un psiquiatra informó una vez que prácticamente todo el mundo está neurótico. Aparte del hecho de que tal uso de la palabra “neurótico” destruye todo su significado, vamos a examinar la muestra utilizada por el doctor. Es decir, ¿a quién observó el psiquiatra? Resulta que llegó a esta edificante conclusión partiendo del estudio de sus pacientes, que distan mucho de representar una muestra de la población. Si una persona no tuviera algún problema no hubiera acudido a un psiquiatra.

Examine dos veces lo que lea, y evitará creer una cantidad enorme de cosas que no son verdad. Vale la pena tener en cuenta también que la representatividad de una muestra puede ser destruida con la mayor facilidad, tanto por influencia de factores visibles como invisibles.

Es decir, como menciona Huff incluso en el caso de que no pueda demostrarse que existe un factor de influencia apreciable, conserve cierto grado de escepticismo sobre los resultados, siempre que haya una posibilidad de influencia en alguna parte. Y siempre la hay.

Con base en el texto anterior y en equipo con tus compañeros, respondan las siguientes preguntas:

1.- ¿Cuáles son los elementos que definen que una muestra sea representativa y ¿cuáles no?

2.- ¿Por qué es importante que conozcamos la representatividad de los datos que nos muestran en las noticias o en los estudios de mercado?

Si tienes duda o quieres saber como se resuelve este ejercicio, consulta el apéndice al final del libro.



Sabías que...

Los juegos de azar son probablemente tan antiguos como el deseo humano de obtener algo a cambio de nada; pero sus implicaciones matemáticas no llegaron a apreciarse hasta que Fermat y Pascal redujeron a leyes el azar en 1654.



Aprende más

Una de las aplicaciones de las probabilidades más importantes en estadística es la inferencia estadística, que se liga a las formas en que podemos predecir que ocurra un evento teniendo información de cómo ha sucedido en una determinada población. Podemos hacer inferencia en un experimento determinado, cuando obtenemos datos a partir de muestras aleatorias o a partir de experimentos al azar. La razón es que cuando utilizamos el azar para escoger a los individuos de una población para hacer una muestra o para proporcionar a determinados sujetos que están en un experimento, un tratamiento determinado, cada elemento o individuo de la población de que se trata tiene la misma probabilidad de ser elegido.

Las leyes de la probabilidad nos permitirán responder a la pregunta ¿qué ocurriría si lo repitiéramos muchas veces?, por lo que desarrollaremos algunos experimentos para comprender su aplicación. En tu curso de Probabilidad y Estadística I, conociste algunos de los elementos que componen una muestra. Las muestras son partes de una población, y deben seguir determinadas reglas para poder ser representativas. Utilizamos muestras porque en general no podemos entrevistar a todas la población ya que sería muy difícil y caro. Por ejemplo cuando queremos saber la opinión de determinadas acciones del gobierno, conocer las tendencias electorales, o cuando realizamos un experimento de un medicamento.

Si elegimos los elementos integrantes de una muestra al azar, esto nos permitirá inferir resultados y considerar la opinión de quienes entrevistamos como si fuera la opinión de toda la población bajo ciertos parámetros que analizaremos más adelante. A esta muestra se denomina muestreo aleatorio simple, donde todos los elementos de la población estudiada tienen una misma probabilidad distinta de cero de ser seleccionados. Si lanzamos una moneda 10 veces, seguramente no salieron 5 águilas y 5 caras de la moneda. Sin embargo si lanzas una moneda muchas más veces, lo más probable es que obtengamos la proporción aproximada de una cara y de otra, aunque no exactamente en la misma proporción.

Esta posibilidad de obtener de una muestra al azar una aproximación de resultados a los resultados esperados que, en teoría deberían ser iguales, se denomina error aleatorio o de muestreo. Recordaremos también otros conceptos que nos permitirán comprender mejor la inferencia estadística.

Población en términos estadísticos la definimos como la totalidad del conjunto de nuestro interés y que es finita. La muestra es un subconjunto seleccionado de esta.

Por ejemplo, si quisiéramos saber la preferencia en el Distrito Federal (D.F.) por cada uno de los partidos políticos, ante la imposibilidad de encuestar a todos los habitantes del D.F., lo que podemos hacer es una encuesta entre las personas de ambos sexos con 18 años y más, y entre ellos seleccionaremos una muestra al azar con base en el padrón electoral.

La intención de esta selección es para que nos proporcione información relativa a la preferencia de esta población por los distintos partidos políticos.

La medición de la preferencia o no, es obtener una medida que sería en este caso = 1; donde supondríamos que cada una de las respuestas tienen la misma probabilidad 0.5 en caso de que se prefiera y 0.5 cuando no se prefiere. Al realizar la encuesta obtendremos la medición total de la preferencia de la muestra de la población tal y como se definió.

Para saber cuál es la estimación más precisa, tenemos lo que se llama grado de certidumbre, y se refiere a la diferencia existente entre lo que observamos y lo que en realidad se da en la población analizada. Es decir, en el ejemplo analizado más arriba, conforme mayor sea el número de votantes seleccionados en la muestra, mayor será la certidumbre que tendremos de que el resultado obtenido sea acertado.

En resumen, cuando consideramos el muestreo nos interesa conocer la probabilidad que tiene un subconjunto de una población de aparecer en una muestra o, lo que es lo mismo, la probabilidad de que un grupo de personas con ciertas características se encuentren en una muestra obtenida de éste universo, y al definir un estudio o **experimento** determinado conocer lo acertado de nuestra hipótesis o la negación de ésta.



Experimento: es el proceso por medio del cual se realiza una observación. Ejemplo es tirar un dado, o dos, medir y determinar el número de bacterias por centímetro cúbico en un alimento determinado



Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones:

En cada una de las siguientes situaciones identifica la población de interés que representaría la muestra y explica como harías la recolección de una misma:

- Un político quiere saber si la mayoría de los habitantes de un Municipio está de acuerdo con la legislación relativa a las pensiones de adultos mayores.

- Un investigador quiere saber cuál es el promedio de consumo de agua para los hogares en una localidad.

- Un empresario quiere saber cuál es el tiempo promedio en que se mantienen prendidos los focos que se producen en su fábrica.

Si tienes duda o quieres saber cómo se resuelve este ejercicio, consulta el apéndice al final del libro.



Aprende más

Cuando hablamos de una medida nos referimos a la relación que se establece entre los elementos de un conjunto de valores (conjunto que constituye una variable) es decir, a la relación entre los valores de la variable. Esto es, a los niveles de medida y características de aquello que representan las variables: (nominal, ordinal, de intervalo y de razón) y según las relaciones que se establecen entre esos valores.

Como recordarás de tu curso de Probabilidad y Estadística I, una variable es un conjunto de valores que califican a todos los elementos de una determinada población, lo que permite la clasificación de éstos. Una variable V es un conjunto de k valores ($V = v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$) en el que agrupamos los N elementos de una determinada población P . Cada uno de los valores constituye un grupo de elementos de una población.

El conteo básico proporciona el número de elementos que encontramos en cada uno de los valores: la frecuencia de cada valor indica el número de veces que éste se repite en una población.

El próximo verano, el Presidente de México entregará un reconocimiento a los alumnos del Telebachillerato comunitario. Se seleccionaron los telebachilleratos que ya conoces el de Loma Bonita y de El Platanar. En la tabla siguiente se tiene la distribución del número de alumnos por semestre en que están inscritos. Cada categoría de la variable semestre que cursan, representa las frecuencias absolutas para cada categoría, y se cuenta son 278 alumnos entre los dos telebachilleratos, 125 pertenecen al de Loma Bonita y 153 alumnos del Telebachillerato “El Platanar”.

Alumnos	Telebachillerato Loma Bonita	Telebachillerato El Platanar
Primer semestre	18	14
Segundo semestre	14	20
Tercer semestre	24	20
Cuarto semestre	32	35
Quinto semestre	16	29
Sexto semestre	21	35
Total	125	153

Como recordarás, en esta tabla las columnas que representa al número de alumnos por semestre, en cada uno de los telebachilleratos representan las frecuencias y representan el número de veces que se repite cada valor en la población por categorías, en este caso el número de alumnos por semestre y por Telebachillerato. Estos elementos deben tomarse en cuenta si queremos elegir para la ceremonia un alumno como representante de cada Telebachillerato, independientemente del semestre que los alumnos cursen.

Ahora bien, si queremos saber qué alumnos, que cursan cuál semestre tienen la mayor probabilidad de ser elegidos de cada Telebachillerato para la ceremonia, para saberlo, calcularemos la distribución de la frecuencia relativa igual que como la calculaste en tu curso de Probabilidad y de Estadística anterior, como recordarás, esto se logra dividiendo el total de alumnos en cada uno de los telebachilleratos entre el número de alumnos que se encuentran en cada semestre. Así obtenemos las dos siguientes columnas:

Alumnos	Tele- bachillerato Loma Bonita	Tele- bachillerato El Platanar	Frecuencia relativa Loma Bonita fr	Frecuencia relativa El Platanar fr
Primer semestre	18	14	0.144	0.092
Segundo semestre	14	20	0.112	0.131
Tercer semestre	24	20	0.192	0.131
Cuarto semestre	32	35	0.256	0.229
Quinto semestre	16	29	0.128	0.190
Sexto semestre	21	35	0.168	0.229
Total	125	153	1	1

Por lo tanto estas dos columnas muestran que los alumnos que se encuentran en el cuarto semestre tanto en el Telebachillerato de Loma Bomita y de El Platanar tienen alta probabilidad de ser elegidos (0.256 y 0.229 respectivamente). También quienes se encuentran en sexto semestre de este último telebachillerato (0.229). En cambio, los que tienen menos probabilidad de ser elegidos son quienes están en el primer semestre de ambas comunidades.

Otro ejemplo lo tenemos en la tabla siguiente la cual contiene la distribución por edad de la comunidad de Loma Bonita. Esta distribución por edad es la variable y , el total en cada una de las categorías es decir los grupos de edad representan las frecuencias. Si queremos elegir al azar a las personas de esta comunidad que participarán en la organización de la fiesta comunitaria, y queremos saber quiénes tienen mayor probabilidad de ser elegidos, realizamos el mismo ejercicio anterior: calculamos la frecuencia relativa (fr) de la distribución por grupo de edad de la comunidad como sigue:

Edad (años)	f	Frecuencia relativa fr
Menos de 10	135	0.165
De 10 a 19	101	0.124
De 20 a 29	139	0.170
De 30 a 39	203	0.248
De 40 a 49	132	0.161
De 50 a 59	54	0.066
De 60 a 69	27	0.033
De 70 a 79	18	0.023
De 80 y más	7	0.009
Total	820	1

En este caso, la probabilidad de elegir un individuo (al azar) perteneciente al grupo de personas que tienen entre 10 y 19 años de edad y por separado aquellos que tienen 80 años y más, se obtiene dividiendo el tamaño del grupo al que pertenecen entre el tamaño de la población:

$$\text{En el primer caso: } P(x = 10 \text{ a } 19 \text{ años}) = 1017/8202 = 0.12399$$

$$\text{En el segundo caso: } P(x > 80) = 74 / 8202 = 0.0090$$

En este ejemplo, notarás que el valor de la frecuencia relativa, correspondiente al primer caso, es mayor que la del grupo de 80 años y más. Esto es debido a que en el grupo de 10 a 19 años lo componen un mayor número de personas que el de 80 y más. Pero quienes tienen mayor probabilidad de ser elegidos para la organización de la fiesta son quienes se encuentran en el grupo de 30 a 39 años de edad.

Por lo tanto, este ejercicio nos permite obtener dos conclusiones: uno al calcular la probabilidad de elegir al azar un evento, primero estaremos atentos a la distribución de frecuencia de la variable que vamos a analizar, para posteriormente calcular, a partir de ésta la frecuencia relativa, la cual se aproxima a la probabilidad mayor o menor de ocurrencia del evento que estamos buscando. En este ejemplo, al calcular la probabilidad de elegir al azar, a una persona perteneciente a la comunidad de un grupo de edad determinado, observamos que algunos grupos de edad tienen una mayor probabilidad de ser elegidos que otros.

Ahora bien, de las técnicas de conteo seguramente conoces la suma o adición, que representa la operación más elemental. La multiplicación (o producto) es una adición de grupos o conjuntos con el mismo número de elementos o una adición repetida un determinado número de veces de todos los elementos de un mismo grupo (o conjunto). Estas son técnicas fundamentales de conteo algebraico. Estas técnicas de conteo básicas, permiten saber el número de elementos en un conjunto determinado, son así las frecuencias de alumnos en cada semestre de los telebachilleratos y, cuando consideramos la distribución de frecuencias por grupos de edad en una comunidad.

A partir de los cálculos que hicimos de la frecuencia relativa podemos saber quién de qué grupos tienen mayor probabilidad de ser elegidos, del conjunto de las personas mayores de edad que se encuentran en la comunidad.

Este cálculo de probabilidad de que un evento sea igual a la medida entre el número total del **espacio muestral** o *del universo* de elementos en el que se inscribe el conjunto analizado se denomina *regla de Laplace*.

Lo anterior significa que si buscamos la probabilidad de elegir a una persona, un número, etc., en general un **evento** dentro de un espacio muestral o del universo de elementos, ésta estará determinada por el peso relativo de ese grupo en la población total (fr) y para ello calculamos la proporción de ese grupo en la población, es decir, dividiendo el tamaño del grupo entre el tamaño de la población de que se trate.



Espacio muestral: asociado a un experimento determinado representa el conjunto formado por todos los puntos o elementos muestrales. Un espacio muestral estará denotado por **S**. Los espacios muestrales tienen la propiedad de que están formados ya sea por un número finito o por uno contable de elementos muestrales. Cuando lanzamos un dado tenemos solamente un número finito de posibilidades : seis y éstas representan el espacio muestral

Evento: en un espacio muestral discreto **S** es un conjunto de puntos muestrales, es decir, cualquier subconjunto de **S**.



Aprende más

Árbol de probabilidad

Cuando realizamos un experimento en el que lanzamos un dado, y calculamos el número de casos posibles es sencillo, sabemos los resultados posibles son 6, es decir obtener 1,2,3,4,5 o 6. Si el objetivo del experimento es obtener “par”, podemos calcular mentalmente cuantos de los eventos esperados serían “favorables”: 2, 4, 6.

Es decir, al calcular la probabilidad de un evento **A**, que en este caso sería obtener un “par” al lanzar un dado tenemos:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5 \text{ igual a } 50\%$$

Sin embargo, el problema puede complicarse, cuando el número de posibilidades de obtener un evento esperado, por ejemplo cuando lanzamos 2 dados. En este caso buscar un “par” es más complicado que el ejemplo anterior y es cuando aplicamos las combinaciones y las permutaciones. Si quisiéramos obtener número par al lanzar estos dos dados, nos podemos preguntar ¿cuántos eventos posibles esperados obtendremos al lanzar los 2 dados? Es así que según lo que estamos buscando, aplicaremos una técnica que ya conoces, la del árbol de probabilidad pero ahora aplicada a las combinaciones y permutaciones.

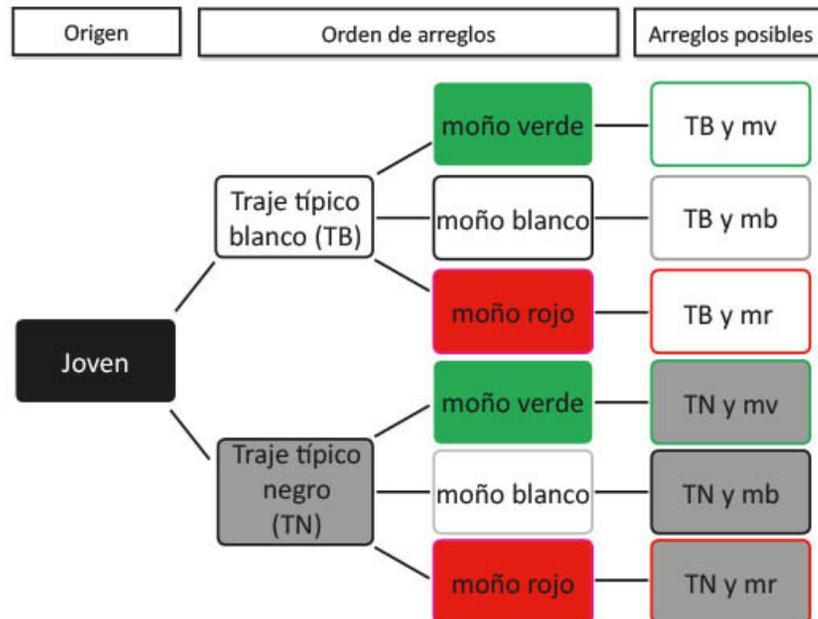


Imaginemos que para el 15 de septiembre se realizará una noche mexicana en tu comunidad y te corresponde a ti encargarte del vestuario de tus compañeros. Para esto, contamos con dos trajes típicos, uno blanco y otro negro, los cuales pueden combinarse con moños verde, blanco y rojo. ¿Cuáles son los posibles arreglos que se pueden realizar?

Como lo viste en tu curso de Desarrollo Comunitario, una de las técnicas para realizar un diagnóstico comunitario es el llamado árbol de problemas. Esta es una técnica que nos permite establecer de manera visual la relación entre las causas, problemas y consecuencias de una situación negativa. La aplicación de esta técnica en lo que llamamos árbol de probabilidad es porque nos permite también visualizar las posibles combinaciones en los eventos que estamos analizando y con ello tener una mejor organización de los datos que vamos a utilizar.

Representa los arreglos posibles que podemos obtener elementos en un conjunto, y representa que a partir de los datos proporcionados por los cálculos de la probabilidad.

En el siguiente esquema podemos darnos idea de los distintos arreglos que pueden realizarse a partir del árbol de problemas o de probabilidad que conoces:



Como podrás darte cuenta, los posibles arreglos a realizar son 6.

Estos 6 posibles arreglos representan el marco muestral, que no resulta, sino de multiplicar el número de elementos por la cantidad de los complementos a combinar.

En este caso serían 2 los colores de los trajes de charro (TB Y TN); los moños serían los objetos a utilizarse como complementos en distintas combinaciones: (1) TB y moño verde, (2)TB y moño blanco y (3) TB y moño rojo, y (4) TN y moño verde, (5) TN y moño blanco y (3) TN y moño rojo. Todas hacen un total de 6 combinaciones

Pensando en otros casos con mayor cantidad de datos hay otras opciones de cálculo, aunque el árbol de probabilidades siempre será útil para saber cuál es la cantidad de arreglos cuando queremos saber -de un conjunto de elementos distintos-, cuantos arreglos podemos obtener.

Para tener en cuenta los tipos de arreglos cuando el conjunto tiene un número importante de elementos a considerar podemos utilizar el conteo multiplicativo y el aditivo.



Actividad de aprendizaje 2

Formen equipos de aproximadamente 4 personas. Planteen un problema de tu comunidad y elaboren un árbol de problemas para su solución.

Como sabrás, algunos problemas pueden ser solucionados de una manera más fácil siguiendo este procedimiento. Ahora, discutan y realicen en el mismo equipo los siguientes ejercicios:

1. Pedro es un escritor y además trabaja en un periódico como redactor. Por la mañana trabaja en el periódico y por la tarde escribe e investiga sobre los temas que le interesan. ¿De cuántas maneras puede utilizar el día?
2. En la comunidad se va a realizar un maratón donde participarán tanto hombres como mujeres. Andrés y María están haciendo un programa de entrenamiento a partir de ejercicios en dos actividades principalmente correr y andar en bicicleta. Durante los días de la semana puede correr o andar en bicicleta., pero durante los fines de semana, pueden jugar fútbol o voleibol. ¿Cuántos programas de ejercicio pueden realizar cada uno de ellos?
3. Diana se viste para ir al trabajo. Se va a poner una falda negra. No sabe si combinarla con una blusa rosada, blanca o azul. También podría usar zapatos negros, blancos o rosados. ¿Cuántos trajes posibles puede formar?

Si tienes duda o quieres saber cómo se resuelve este ejercicio, consulta el apéndice al final del libro. Incluye en tu portafolio de evidencias la solución de estos ejercicios.



Aprende más

Conteo multiplicativo

El próximo 29 de Septiembre se organizará un evento por el “Día nacional del maíz”. Guadalupe es la encargada recoger y llegar al evento con dos de los productores más reconocidos del estado. Este evento se llevará a cabo en la plaza principal de la capital del Estado.



Guadalupe tiene que recoger a Ramón y a Lorenzo. A Ramón lo recoge en el municipio llamado “La Loma” (lugar A) y a Lorenzo en “Rosales” (lugar B); Para llegar con Ramón a “La Loma” (lugar A) puede tomar 3 transportes distintos, y para ir por Lorenzo (al lugar B, los Rosales) hay 4 opciones para transportarse. En el momento en el que Guadalupe se encuentra reunida con Ramón y Lorenzo se dan cuenta que existen 2 alternativas para llegar a la capital del estado (Lugar C), ir en camión o en taxi comunitario, entonces la pregunta es ¿Cuántas maneras diferentes u opciones de transporte tiene Guadalupe para llegar al evento?

Guadalupe se encuentra en su municipio y tiene que llegar por Ramón a A (La Loma) tiene que elegir entre 3 posibilidades, para llegar por Lorenzo B (Rosales) 4 y para llegar al evento en la capital del estado 2 entonces tenemos $= 2 \times 3 \times 4 \times 2 = 48$. 48 son las posibilidades que tiene Guadalupe para llegar con Ramón y Lorenzo a la capital del estado al evento del Día del maíz.

Comenta con tus compañeros el ejercicio.

Lo que acabamos de realizar, se le conoce como **conteo multiplicativo**, el cual te permitirá realizar una contabilidad del número posible de arreglos de los elementos dentro de uno o varios conjuntos. Dicho conteo se basa en una regla la cual consiste en lo siguiente:

El principio de multiplicativo, muestra que cuando tenemos dos conjuntos, y queremos extraer por ejemplo dos elementos uno de cada uno de ellos, y queremos conocer el número de extracciones o muestras posibles que obtendríamos al considerar todas las combinaciones posibles.

Es el caso de los dos telebachilleratos, Loma Bonita y el Platanar. Si en la Ceremonia que habrá para la entrega de diplomas elegimos 4 alumnos de Loma Bonita y 3 de El Platanar para que digan el discurso, cuál es el número de muestras posibles que podemos obtener al considerar a todos ellos. De Loma Bonita = (mujer,hombre,hombre,mujer) y de El Platanar (hombre,hombre,mujer). ¿Cuál será el número de posibles muestra, que contengan un individuo del grupo del Telebachillerato de Loma Bonita y otro del Telebachillerato El Platanar?

Si las enumeramos una a una tenemos el conjunto de estas muestras será: {mh,mh,m-m,hh,hh,hm,hh,hh,hm,mh,mh,mm} lo cual representa un total de 12 muestras . Para calcular este número directamente solo tendríamos que multiplicar 4.3 (4 estudiantes del Telebachillerato de Loma Bonita) y 3 que corresponden a los estudiantes del Telebachillerato El platanar= 12. Este número 12 representa el número de muestras posibles con los alumnos.

Otra forma de conteo son las permutaciones y combinaciones, donde aplicaremos el conteo multiplicativo.

Permutación

Un caso particular del principio multiplicativo es el que se da cuando calculamos el número de permutaciones que podemos realizar con los elementos de un conjunto.

Una permutación es una determinada ordenación de todas las que se pueden hacer con los elementos de un conjunto. En cada una de estas ordenaciones entrarán todos los elementos del conjunto considerado sin repetirse ninguno de ellos. En cada permutación para un conjunto de n elementos tendremos que cubrir n posiciones.

Así el número de permutaciones posibles para un conjunto de n elementos, aplicando el principio multiplicativo será:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

En la primera posición en esta fórmula podemos colocar n elementos (cualquiera de los elementos del conjunto), pero en la segunda posición podremos colocar un elemento menos ($n-1$), ya que el que hemos colocado en la primera no puede aparecer ya en la segunda, y así sucesivamente, hasta cubrir las n posiciones: en la última posición solo podremos colocar el último elemento que nos queda.

El número que nos resulta, es el producto de los n primeros números naturales que se llama factorial de n y se escribe $n!$

Por lo cual tenemos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Como la multiplicación es una operación conmutativa, es decir, el orden de los factores no altera el producto, también podemos expresar $n!$ De la siguiente manera:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Con lo que tenemos que el número total de permutaciones de n elementos será

$$P_n = n!$$

Pondremos un ejemplo:

Si tenemos un conjunto de 8 elementos $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ para extraer sucesivamente los cinco elementos estos nos darán distintas combinaciones de los elementos del conjunto. Por lo que obtendremos distintas extracciones sucesivas con los cinco elementos.

Si aplicamos la regla multiplicativa de cálculo, el número de todos los modos posibles en este caso será:

$$P_8 = n!$$

o cual significa :

$$P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

Es decir: $8 \cdot 7 = 56$; $56 \cdot 6 = 336$; $336 \cdot 5 = 1680$; $1680 \cdot 4 = 6720$; $6720 \cdot 3 = 20160$; $20160 \cdot 2 = 40320$; $40320 \cdot 1 = 40320$

Por lo tanto estaremos ante un caso de permutaciones cuando queramos calcular el número de modos en que podemos extraer uno a uno, y sin reposición, todos los elementos de una población con un tamaño n .



Actividad de aprendizaje 3

Imagina que el Presidente Municipal está enterado de los proyectos que tú y tus compañeros realizaron a lo largo del 5º y 6º semestre en la materia Desarrollo Comunitario, y quiere que 5 equipos le expongan los proyectos en la sesión del próximo mes. Por lo anterior, queremos saber cuál es el número de permutaciones del conjunto de los 5 equipos, para saber el orden de exposición y realizar el evento lo mas organizado posible, por lo que tenemos los equipos {a,b,c,d,e}

¿Cuántas permutaciones podemos identificar?

Realiza el ejercicio de manera individual utilizando el árbol de probabilidad y después coméntalo con tus compañeros y asesor.

Si tienes duda o quieres saber cómo se resuelve este ejercicio, consulta el apéndice al final del libro.

Variaciones

Otra técnica de conteo para las probabilidades son las llamadas variaciones. Utilizamos las variaciones cuando no queremos extraer todos los elementos n del conjunto, sino solamente una parte de ellos (r), los modos en que podemos extraerlos se conoce como variaciones.

En este caso, si tenemos un conjunto de n elementos, a una ordenación de un número r de estos la llamamos variación de r elementos de un conjunto de n . Con lo cual r es menor que n y puede denotarse: $r < n$ ya que no estamos extrayendo todos los elementos, sino una parte de ellos.

Si en el ejemplo anterior, nos dice el coordinador que el Presidente Municipal solamente cuenta con 10 minutos para atender a 3 de los 5 equipos, por lo cual 2 equipos no podrán exponer por falta de tiempo y deberán dejar su trabajo escrito.

Es decir, solamente tenemos 3 posiciones para cubrir. En la primera posición podemos colocar a cualquiera de los 5 equipos, en la segunda cualquiera de los 4 elementos restantes y en la tercera cualquiera de los 3 que nos quedan.

Si aplicamos el principio multiplicativo, el número de maneras de ordenar 3 elementos de un conjunto de 5, por lo que tenemos:

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Es decir, de manera general, el número de variaciones de r elementos de un conjunto de n será:

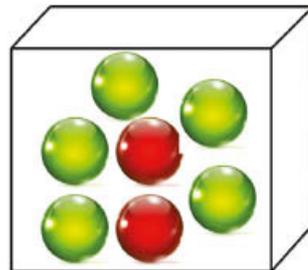
$$V_{n,r} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+2) \cdot (n-r+1)$$



Actividad de aprendizaje 4

En una caja hay dos canicas rojas y cinco verdes, si se extraen cuatro de ellas de la caja ¿en qué orden puede aparecer?

Elabora un árbol de problemas para solucionar estas permutaciones. Discute los resultados con tus compañeros



Combinaciones

Una combinación es la manera en que pueden presentarse objetos o eventos de un conjunto, donde el orden de aparición no importa. Por ejemplo cuando multiplicamos $7 \times 8 \times 5 = 280$, o bien $5 \times 8 \times 7 = 280$ ó $8 \times 5 \times 7 = 280$ obtenemos el mismo resultado, no importa el orden en que multipliquemos siempre obtenemos el mismo resultado. La fórmula general de las combinaciones:

Combinaciones de n objetos tomados de r en $r =$

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Donde:

n es el número total de objetos o eventos y
 r es el número de objetos que se desea considerar .

Aquí, n puede ser cualquier valor entero positivo y r puede ser cualquier valor entero positivo desde 1 hasta n .

Si observamos que para cualquier pareja de números enteros positivos n y r , excepto $r=1$, el número de permutaciones es mayor que el de combinaciones. Por ejemplo, si $n=7$ y $r=4$ entonces ${}_7P_4 = 840$ y ${}_7C_4 = 35$.

Es decir, en el caso de la permutación si tenemos $n=7$ y solamente queremos sacar 4 elementos del conjunto tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} {}_7P_4 &= 7*6*5*4 = 840 \\ {}_7C_4 &= \frac{7*6*5*4}{4*3*2*1} = 35 \end{aligned}$$

En una caja tenemos 6 cartas, marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, y 6. Se quieren sacar al azar cuatro cartas. ¿De cuantas formas se pueden sacar las cartas de la caja?

En este caso sacaremos cuatro cartas de las 6 que tenemos en la caja y debemos realizar. Las combinaciones de n objetos tomados de r en $r =$

$$C_{n,r} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \quad C_{n,r} = \frac{6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1(6-4)} = \frac{720}{48} = 15$$

Es decir, las monedas seleccionada podrían ser las siguientes: 1234,1235,1236, 1245,1246,1256,1345, 1346, 1356,1456,2345,2346,2356,2456 y 3456 es decir 15 maneras distintas en las que pueden combinarse las cartas al sacarlas de la caja.

Una combinación no representa una ordenación, es un subconjunto de elementos. En este caso no estamos ante *extracciones sucesivas* de los elementos de un conjunto sino ante una *extracción simultánea* de un grupo de elementos de este conjunto.

En el ejemplo que hicimos mas arriba. La combinación de letras abcd es el conjunto constituido por los elementos {a,b,c,d}, y significa que abcd , es igual que bcad, bcda, cdab, dcba, etc., ya que contienen todas las combinaciones los mismos elementos, en este caso el *orden* en que los coloquemos es indiferente, ya que estamos ante una extracción simultánea de todos ellos.

El número de combinaciones de n elementos tomados de r en r, es decir, el número de subconjuntos de r elementos que podemos extraer de un conjunto de tamaño n, decíamos que era:

Si volvemos al ejemplo de los equipos para exponer los trabajos, y la organización del evento con el Presidente Municipal, las combinaciones posibles del conjunto de equipos {a, b, c} tomadas dos a las vez.

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

n = el número total de objetos en un conjunto dado

r = el número de objetos, tomados a la vez para cada combinación

$C_{n,r}$ = el número total de combinaciones de n objetos, tomado r a la vez

$$C_{n,r} = \frac{nPr}{r!}$$

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \quad \rightarrow \quad C_{3,2} = \frac{3*2*1}{2*1(3-2)} = \frac{6}{2} = 3$$



Actividad de aprendizaje 5

Elabora un mapa conceptual donde diferencias las combinaciones de las permutaciones y variaciones. Adicionalmente propón un ejemplo cercano utilizando estas técnicas de conteo. Comenta con tu asesor y compañeros de clase. Discutan sobre las diferencias existentes y los ejemplos.

El siguiente esquema permite conocer las diferencias entre las permutaciones y las combinaciones, en las primeras el interés se centra en contar todas las posibles selecciones y todos los posibles arreglos entre éstas, mientras las segundas el interés es contar las selecciones diferentes.

Cierre de bloque I

Durante el desarrollo de este bloque pudiste recordar lecciones de cursos anteriores, así como nuevos métodos para analizar las probabilidades. Particularmente nos dirigimos en comprender distintas técnicas de conteo en particular técnicas aditivas y multiplicativas que te permitirán aplicarlas a las combinaciones y permutaciones. Estas técnicas seguramente te servirán para resolver problemas y situaciones que se presentan en tu vida cotidiana

Para aprender más:

- En Geogebra, encontrarás una calculadora donde directamente puedes obtener las combinaciones y permutaciones. Únicamente sustituyendo los valores de n y r <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/155519>
- Geogebra. La calculadora gráfica para geometría, cálculo, estadística y 3D: <https://www.geogebra.org>
- Técnicas de conteo. Combinaciones y permutaciones: http://www.slideshare.net/valentintrs/tcnicas-de-conteo-10538178?next_slideshow=2 y en http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/sabaticorita/_private/01Concepto.htm
- El uso de árbol de probabilidad . Probabilidades condicional e independencia http://www.zweigmedia.com/MundoReal/tutorialsf15e/frames7_5B.html

Autoevaluación

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una X en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque I.

Interpretación del nivel de avance:

100-90% = lo logré el aprendizaje de manera independiente.

89-70% = requerí apoyo para construir mi aprendizaje.

69-50% = fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente.

49% o menos = no logré el aprendizaje.

Contenidos		Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Identificas los conceptos probabilidad				
	Distingues las características de técnicas de conteo				
	Reconoces la importancia de Árbol de probabilidades				
	Conoces la aplicación de las combinaciones y permutaciones				
Procedimentales	Utilizas adecuadamente el concepto de probabilidad				
	Explicas con sus propias palabras la importancia de las técnicas de conteo como la aditiva y multiplicativa				
	Utilizas y aplicas el concepto de combinaciones				
	Utilizas y aplicas el concepto de permutaciones				
	Argumentas la importancia de utilizar las probabilidades en tus estudios y la vida cotidiana				
Actitudinales	Reflexionas sobre la importancia de las técnicas de conteo				
	Muestras interés en los conceptos de combinaciones y permutaciones				
	Te involucras en el conocimiento de la probabilidad y estadística				

Una vez que hayas dado lectura a las preguntas que se te presentan enseguida, responde en forma breve a cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

2. ¿Cómo puedes hacer uso de lo aprendido de manera inmediata, en el presente y futuro?

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

BLOQUE II

Aplicas la probabilidad



Bloque II

16
HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

Eventos mutuamente excluyentes, no excluyentes e independientes.
Reglas de la probabilidad
Probabilidad condicional
Teorema de Bayes

Desempeños esperados al concluir el bloque

- Sintetiza los elementos de la probabilidad conjunta para la solución de problemas de su vida cotidiana.
- Analiza las características de una representación de forma tabular, gráfica y funciones de probabilidad mediante gráficas de árbol.
- Describe las características de los eventos mutuamente excluyentes e independientes para su aplicación en la solución de problemas.
- Aplica las características de la probabilidad en los diagramas de árbol para la solución de problemas.
- Explica las condiciones del cálculo de la probabilidad analizando el teorema de Bayes dentro de la solución de problemas.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con los modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficas, analíticos o variaciones, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos y científicos.

Productos de aprendizaje

- Tabla de contingencia y cuestionario.
- Tabla de resolución sobre probabilidad condicional; árbol de probabilidad y Entrevista "condicional".
- Árbol de probabilidad, teorema de Bayes y cuestionario

Introducción

El propósito de este bloque es ir más allá y ver la probabilidad como un instrumento esencial en tu día a día, pues es un elemento que de manera directa o indirecta (según sea el caso) influye en la toma de decisiones, por ejemplo ¿Cuántas veces no te has preguntado si lloverá, con el fin de tomar la decisión sobre qué ropa y zapatos que usarás ese día?, o quizá ¿cuál es la ruta y transporte que debes elegir para llegar a un destino con el fin de ahorrar tiempo e inclusive, dinero? y/o ¿cuál es la posibilidad de aprobar o no, alguna materia? En efecto el hecho de predecir futuros eventos demuestras la capacidad de entenderlos.

Es elemental que hagas uso de las bases teóricas y prácticas como la teoría de la probabilidad (probabilidad clásica, simple y el muestreo aleatorio) y técnicas de conteo (árbol de probabilidad, conteo multiplicativo, combinaciones, permutaciones) estudiadas tanto en el curso de Probabilidad y Estadística I, como en el bloque anterior. En un primer momento identificarás eventos mutuamente excluyentes, no excluyentes e independientes, a partir de sus características específicas y posteriormente dar un tratamiento específico para aplicar la probabilidad que más convenga.

En un segundo momento te adentrarás en la resolución de problemas de probabilidad a partir de algunas reglas como la condicional y teorema de Bayes, haciendo uso del árbol de probabilidad. Al concluir el bloque te darás cuenta de que los conocimientos con los que trabajarás te permitirán reconocer que la probabilidad se hace presente en tu vida cotidiana más de lo que te imaginas y que darle sentido al uso de ésta, completará tu habilidad analítica.

Mapa de objetos de aprendizaje





Para iniciar, reflexiona

El futuro es impredecible, todo se basa en probabilidades (Richard Phillips Feynman, físico teórico y premio Nobel estadounidense en 1965).

Siempre me recuerdo a mí mismo que lo que se observa es como mucho una combinación de probabilidades y resultados, no sólo resultados (Nassim Taleb, ensayista, investigador y financiero).

Para que sean útiles, nuestras creencias deben someterse a la lógica de la probabilidad (Daniel Kahneman, psicólogo, matemático, Premio Nobel de Economía en 2002).

Respecto a las frases anteriores, es posible tener una noción sobre los alcances de la probabilidad. Y después de conocer bases importantes de ésta en el primer bloque, es momento de aplicarla ¿con cuál de las frases te identificas más al valorar el uso de la probabilidad?

En este bloque se presentarán reglas específicas para determinar las categorías de probabilidad, la finalidad es que puedas identificar las condiciones en que es posible el uso de cada una de las opciones de aplicación y a partir de ello puedas generar el grado de confianza en su uso al momento en que tengas que emplearlo en la toma de decisiones.



Aprende más

Regla de los eventos mutuamente excluyentes, no excluyentes e independientes

Después de lo expuesto en el último bloque del curso Probabilidad y Estadística I y en el primero de este libro de texto, seguramente recordarás que en el ámbito de la probabilidad existen los denominados *eventos*, que en términos más simples, son los posibles resultados que pueden presentarse en un experimento aleatorio en determinada situación.

Recurriremos a una de las actividades del libro Probabilidad y Estadística I, específicamente, una en que pusiste en práctica el juego tradicional de “los volados” ¿la recuerdas? Ahí se ubicaron dos eventos A (cae águila) y B (cae sol).

Paso 1	Paso 2	PAso 3
“Un volado”	Retomando el cálculo de la probabilidad clásica $P = \frac{\# \text{ de casos posibles}}{\# \text{ total de casos}}$	Al sustituir, tenemos que...
Evento A: cae águila		La probabilidad de que “caiga” águila es: $A = 1/2$, es decir, 0.5 y;
Evento B: cae sol		La probabilidad de que “caiga” sol es: $B = 1/2$ que también es 0.5



Todo esto parece confirmar que la probabilidad de que caiga águila o sol (evento A o B) al lanzar una moneda es igual al 50% siempre y cuando se cumpla la condición de que sea al azar.

Dicho todo esto, es momento de abordar qué sucede cuando dos eventos ocurren al mismo tiempo. La pregunta obligada es ¿cuál es la probabilidad de que ocurran los dos eventos al mismo tiempo?, es decir, $P(A \text{ y } B)$.

Escribe tu resultado y coméntalo con tus compañeros (as) y tu profesor (a).

Lo que acabamos de hacer es identificar si un evento es mutuamente excluyente.

¿Qué implicaciones tiene esto?

Si se lanza una sola moneda a la vez, únicamente obtendremos un resultado, es decir, o sale águila o sol. Por lo anterior, si tenemos dos o más eventos que pertenecen a un universo (S), al realizar el experimento solo puede ocurrir uno u otro resultado, pero no ambos al mismo tiempo.



Excluyente: significa que puede separar definitivamente. Refiere a términos como apartar, separar, descartar al que no sea poseedor de dicho requisito.



Sabías que...

La fórmula para eventos mutuamente excluyentes es:

La cual se explica de la siguiente manera: "si A y B son evento mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de que A o B suceda es equivalente a la probabilidad del evento A más la probabilidad del evento B".

Y que al calcular si un evento A y uno B son mutuamente excluyentes, el resultado siempre será "0" (cero), pues esto sucede si esperamos que A y B ocurran de manera simultánea.

Quando se trata de eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Simultánea: acciones, sucesos o procesos, ocurren o se desarrollan al mismo tiempo.

Nota: es de suma importancia que recuerdes los símbolos de unión (U) e intersección (\cap) estudiados en el bloque IV de tu curso de Probabilidad y Estadística I, puesto que serán de gran utilidad para comprender la probabilidad de los eventos.

A su vez se llaman eventos no excluyentes o conjuntos, cuando dentro del universo es posible que ocurran dos o más eventos conjuntamente al mismo tiempo ¿Notas la diferencia?

A detalle, tendremos lo siguiente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

La anterior es una forma de expresar la ocurrencia de eventos no excluyentes y se lee: “sean dos eventos A y B. La probabilidad de la unión de estos eventos, $P(A \cup B)$, se define como la probabilidad de que ocurra A, de que ocurra B, o de que ocurran ambos eventos”. Una explicación con ejemplos aclarará las cosas.

En el Telebachillerato comunitario “El platanar” se hace un estudio sobre la aprobación de dos asignaturas: Ecología del Medio Ambiente (E) y Filosofía (F), las cuales pertenecen a 6° semestre. Los resultados demuestran que la probabilidad de que un estudiante apruebe Ecología del Medio Ambiente 0.6. La probabilidad de aprobar filosofía es de 0.54. Y la de aprobar ambas es de 0.36. La pregunta de eventos no excluyentes corresponde a: ¿cuál es la probabilidad de que un o una estudiante apruebe Ecología del Medio Ambiente o Filosofía?

¡Nota importante! Resulta relevante subrayar que los eventos no necesariamente deben nombrarse con las letras A y B, sino que en algunos casos se les designa con la inicial del suceso en cuestión, como en el siguiente caso:

Evento (E) = aprobar ecología y medio ambiente

Evento (F) = aprobar filosofía

Otra forma de presentar el problema puede ser de la siguiente forma:

$$P(E) = 0.6$$

$$P(F) = 0.54$$

$$P(E \cap F) = 0.36$$

Al utilizar la fórmula del recuadro anterior, obtenemos lo siguiente:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.6 + 0.54 - 0.36 = 0.78$$

A partir de los resultados anteriores, es posible definir que la probabilidad de que un estudiante de 6° semestre del Telebachillerato “El Platanar” apruebe Ecología y Medio ambiente o Filosofía es de 0.78.



Actividad de aprendizaje 1

Retoma el ejercicio del bloque IV de tu curso Probabilidad y Estadística I en que definiste algunas probabilidades a partir de eventos de los 50 habitantes de tu comunidad.

Ahora que ya sabes en qué consisten los eventos mutuamente excluyentes y no excluyentes, aplica lo aprendido, primero realiza un cuadro y define las características de la población por cada caso. Después utiliza la siguiente tabla de contingencia para codificar los datos que obtuviste.

Eventos:

A: Es mujer

B: Es hombre

C: Es un habitante que asiste a la escuela

D: Es un habitante que habla lengua indígena

	Habitante que asiste a la escuela	Habitante que habla lengua indígena	Habitante que asiste a la escuela y habla lengua indígena
Mujer			
Hombre			

Cuestionario:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A y B, y qué tipo de evento es?

2. ¿Qué probabilidad hay de que ocurra el evento A y D, y qué tipo de evento es?

3. ¿Acaso existe probabilidad de que ocurra el Evento B, C y D, y qué tipo de evento es?

Comenta las respuestas obtenidas con tus compañeras y compañeros de clase e incluye los resultados en tu portafolio de evidencias.

Ahora veamos los eventos independientes. En lenguaje probabilístico esta independencia ocurre cuando A y B son dos eventos con probabilidades positivas.

Cuando se tiene la igualdad: $P(B|A) = P(B)$ quiere decir que el evento B no depende de A, o que es independiente del evento A; no importa si ocurrió o no el evento A, puesto que la ocurrencia o no de A no afecta la ocurrencia del evento B.

De la definición de probabilidad condicional se tiene

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B.

Armando entrevistó a 150 personas (60 mujeres y 90 hombres) sobre el calzado que utilizan. De los resultados que obtuvo que 90 personas usan zapatos tenis, mientras que 60 no usa zapatos tenis.

De este levantamiento, supongamos que el evento A es ser mujer, y que el evento B es usar zapatos tenis. La información completa del levantamiento se puede presentar de la siguiente forma:

- 90 mujeres
- 60 hombres
- 54 mujeres usan zapatos tenis
- 36 hombres usan zapatos tenis.
- 90 personas en total usan zapatos tenis.

Al organizar en una tabla de contingencia, la información se puede presentar de la siguiente manera:

Tipo de calzado	Hombre	Mujer	Total
Usa zapatos tenis	36	54	90
No usa zapatos tenis	24	36	60
Total	60	90	150

De la cual se pueden derivar los siguientes cálculos:

La probabilidad de que una persona (sin distinción de sexo) use zapatos tenis es de $90/150 = 0.60$

En este caso $P(B) = 90/150 = 0.6$

La probabilidad de que una persona use zapatos tenis dado que es mujer es: $54/90 = 0.6$

Esto es:
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{54/150}{90/150} = 0.6$$

De manera similar, la probabilidad de que una persona sea use zapatos tenis dado que es hombre es: $36/60 = 0.60$

Esto es:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{36/150}{60/150} = 0.6$$

Como se puede observar, el hecho de ser hombre o mujer no afecta la probabilidad de usar zapatos tenis.

Otra forma de abordar el tema de eventos independientes es a partir del siguiente ejemplo:

En un salón de clase, los estudiantes con los 5 mejores promedios podrán participar en una rifa de dos kits de útiles escolares.

Los seleccionados serán los alumnos que saquen fichas rojas de una caja, la cual contiene 2 fichas rojas, 2 fichas, y 1 verde.

Al sacar una ficha roja en el primer intento, observas el color y la pones de nuevo en la bolsa.

En un segundo intentas sacar una ficha roja.

¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica roja ambas veces?

En el cálculo de probabilidades, hay que considerar que los eventos son independientes porque se regresa la primera ficha a la caja y en el segundo intento, las probabilidades de que salga una ficha roja ocurren en condiciones en que la caja contiene el mismo número y tipo de fichas que en su estado original.

Analizando con cálculo de probabilidades, sabemos que en el primer intento, la probabilidad de sacar una ficha roja es $\frac{2}{5}$, porque hay 5 fichas y 2 de ellas son rojas.

Si volvemos a poner la ficha roja dentro de la caja, la probabilidad de sacar una ficha roja en un segundo intento sigue siendo $\frac{2}{5}$, y eso se liga a que los dos eventos son independientes.

El resultado de un experimento no afecta el resultado del otro.

Al proyectar ¿qué hubiera pasado si no pones la primera ficha de nuevo en la caja? La probabilidad de sacar una ficha roja será diferente para el segundo intento. Si una ficha roja es eliminada, en el segundo intento la probabilidad será ahora de $\frac{1}{4}$ porque sólo quedan 4 canicas y una es roja.

Situación	Probabilidad del 1er evento	Probabilidad del 2do evento	Probabilidad de ambos eventos
Sacar fichas	$P(\text{rojo}) = \frac{2}{5}$	$P(\text{rojo}) = \frac{2}{5}$	$P(\text{ambos rojos}) = \frac{4}{25}$

Si A y B son eventos independientes, $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$.

En general, para *cualquier* número de eventos independientes, la probabilidad de que todos los eventos sucedan es el producto de las probabilidades de que sucedan los eventos individuales.



Aprende más

Reglas de probabilidad

En el ámbito de la probabilidad existen variadas reglas que responden a diversos cuestionamientos. Entre dichas reglas se encuentran la probabilidad de la unión; del complemento; de la diferencia; conjunta, condicional y Teorema de Bayes, por mencionar algunos. Es importante recalcar que en lo que respecta a este curso, nos centraremos en las dos últimas de las cuales ubicarás sus principales características e identificarás los elementos de un conjunto a partir de los tipos de eventos que ahí encuentres.

Probabilidad condicional

En ocasiones sucede que un evento influye en que otro se pueda presentar.

¿Recuerdas si has estado en una situación con esas características? En estadística se podría hacer referencia a la probabilidad condicional.

De manera formal, la probabilidad condicional se interpreta de la siguiente manera:

- Si se sabe que ya ocurrió el evento B, la probabilidad de que también haya ocurrido A se escribe: $P(A|B)$ y se lee “la probabilidad de A dado B”.
- $P(A|B)$ equivale a calcular la probabilidad de A cuando el espacio muestral se reduce a B.

Y la fórmula para calcularla es la siguiente:

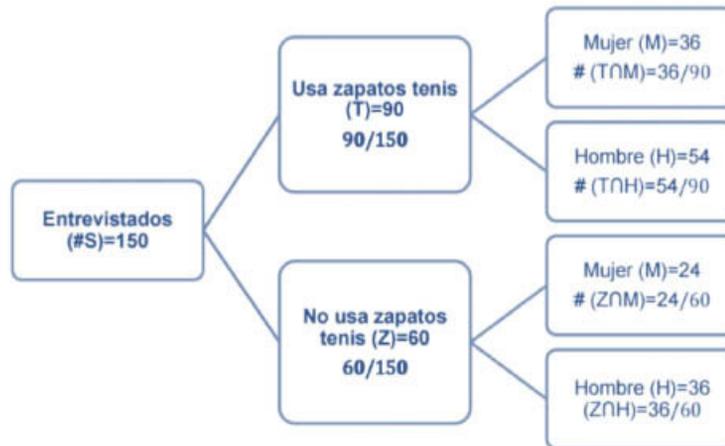
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Aplicando este concepto a los datos que obtuvo Armando y retomando que como su nombre lo indica, esta regla de probabilidad parte de una condición que puede ser: “seleccionar al azar a una mujer que usa zapatos tenis”, la finalidad de esta condición puede ser de que Armando entreviste a la mujer para conocer su opinión sobre otros gustos en el ámbito del consumo.

Tipo de calzado	Hombre	Mujer	Total
Usa zapatos tenis	36	54	90
No usa zapatos tenis	24	36	60
Total	60	90	150

Haremos uso del árbol de probabilidad, el cual tuviste oportunidad de estudiar en el bloque anterior. Es importante destacar que se realiza a partir de la tabla de contingencia previa:

Árbol de probabilidad condicional



En cada caso, y una vez que están claras las condiciones para formular la probabilidad, es posible calcular:

$$\text{Es mujer dado que usa tenis} = \frac{36}{90} = 0.4$$

$$\text{Es hombre dado que usa tenis} = \frac{54}{90} = 0.6$$

$$\text{Es mujer dado que no usa zapatos tenis} = \frac{24}{60} = 0.4$$

$$\text{Es hombre dado que no usa zapatos tenis} = \frac{36}{60} = 0.6$$

Como habrás podido observar, hay dos maneras para identificar la probabilidad condicional, una con la construcción del árbol de probabilidad, y la segunda a partir de la fórmula del recuadro.

Para desarrollar ésta última, tomaremos como condición la probabilidad de elegir a una mujer al azar dado que usa tenis (condición 1). Y tenemos lo siguiente:

$$P(T \cap M) = (P(T \cap M)) / P(M) = P(T \cap M) = \frac{36}{90} = 0.4$$

Al comparar el resultado anterior con la primera condición resultante del árbol de probabilidad de arriba, podemos concluir que coinciden. Por tanto, la interpretación es que la probabilidad de que una mujer elegida al azar use tenis es de 40%.



Actividad de aprendizaje 2

Para que tu aprendizaje sea más significativo, en este apartado podrás aplicar la probabilidad condicional, a partir de la siguiente tabla de datos:

	Deportes	Artes y Humanidades	Total
Hombre	46	4	50
Mujer	14	26	40
Total	60	30	90

Como puedes ver, se relaciona con las preferencias y gustos de jóvenes de una universidad, específicamente con los deportes, las artes y humanidades.

¡Demuestra tus conocimientos!

Instrucciones: Primero observa los datos de la tabla de contingencia. Posteriormente visualiza los posibles eventos que se pueden llevar a cabo y; construye el árbol de probabilidad en el espacio destinado para el mismo.

Para concluir contesta y argumenta los cuestionamientos de abajo e incluye los resultados en tu portafolio de evidencias.

Aquí desarrolla tu árbol de probabilidad condicional:

Entrevista condicional: Supón que realizarás una entrevista a profundidad a uno de los o las jóvenes en cuestión.

1. ¿Cuál es la probabilidad de elegir a un hombre dado que su gusto y preferencia es el deporte?

2. ¿Cuál es la probabilidad de elegir a una mujer al azar, dado prefiere las artes y humanidades?

3. Menciona la probabilidad de seleccionar a un hombre dado que centra su atención en el arte y humanidades.

4. Se requiere entrevistar a una mujer dado que le gusta el deporte ¿cuál es la probabilidad de elegirla al azar?

Ahora elige y escribe en la siguiente tabla de control una condición y resuelve con la fórmula pertinente, posteriormente compara tus resultados e interpreta.

Tabla de resolución: probabilidad condicional	
Condición	
Calcular	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Resultado	
Interpretación	

Algo que ha faltado mencionar, es que la probabilidad condicional también es conocida como probabilidad a priori, pues al suceder un evento prosigue el interés de conocer cuál es la probabilidad de su efecto.

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes es una forma especial de conteo. Es un tema que se desarrolla cuando es difícil obtener de forma completa los puntos muestrales de un espacio, ya que no es posible realizar la numeración directa para obtener las probabilidades. En estos casos se emplea el análisis combinatorio.

Esta posibilidad simplifica el cálculo de las probabilidades con condicionales. Permite calcular la probabilidad de que ocurra un evento B si se sabe que ya ha ocurrido un evento A.

Se puede formalizar de la siguiente manera: $P(B/A)$

Y para calcularla es importante que sigas 3 pasos fundamentales:

1. Conocer la probabilidad como frecuencia relativa de que ocurra el suceso A, o sea $P(A)$.
2. La probabilidad de que ocurra el suceso B es $P(B)$.
3. La probabilidad de que ocurra el suceso A, si sabemos que ya ocurrió el suceso B, es $P(A/B)$.

Cierre de bloque II

En este bloque diferenciaste los eventos en mutuamente excluyentes, no excluyentes e independientes, y con ello los caracterizaste para la resolución de problemas en donde en su momento el azar jugó un papel esencial.

Asimismo, tuviste la oportunidad de responder a diversos cuestionamientos a partir del uso de la probabilidad y sus distintas reglas con el fin de obtener y potencializar tu capacidad de crítica, análisis e iniciativa.

Autoevaluación

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una X en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque II.

Interpretación del nivel de avance:

100-90% = lo logré el aprendizaje de manera independiente.

89-70% = requerí apoyo para construir mi aprendizaje.

69-50% = fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente.

49% o menos = no logré el aprendizaje.

Contenidos		Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Identificas tipos y características de distintos eventos				
	Haces la diferenciación entre eventos mutuamente excluyentes y no excluyentes e independientes				
	Sabes lo que es probabilidad condicional				
	Sabes en qué consiste el teorema de Bayes				
Procedimentales	Usando la lógica, tienes la capacidad de reconocer un evento mutuamente excluyente de uno que no lo es				
	Aplicas la probabilidad y resolución de cuestionamientos a través del árbol de probabilidad				
	Resuelves cuestiones probables a partir de fórmulas específicas				
	Reconoces y comparas resultados del árbol de probabilidad y cálculos con las fórmulas correspondientes				
	Interpretas los resultados obtenidos.				
Actitudinales	Reflexionas acerca del uso de los procedimientos matemáticos en tu vida cotidiana				
	Sabes resolver cuestiones de probabilidad utilizando las reglas de ésta.				
	Reflexionas sobre el uso de la probabilidad en tu vida diaria				
	Potencializas tu capacidad de análisis al utilizar las herramientas aprendidas en el presente bloque				

Cuestionario

Instrucciones: Lee, reflexiona y responde los cuestionamientos que a continuación se presentan.

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué lo consideras de esta manera?

2. ¿Cuáles son las ideas y los conceptos mediante representaciones lingüísticas y matemáticas que identificas de manera inmediata y puedes aplicar en tu vida diaria?

3. ¿Consideras que con lo que has aprendido hasta ahora, puedes proponer maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo?

BLOQUE III

Analizas las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas



Bloque III

18
HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

- Variables
 - Variables aleatorias discretas
 - Variables aleatorias continuas
- Distribución de probabilidades
 - Distribución de probabilidad binomial
 - Distribución de probabilidad normal
- Parámetros
 - Media
 - Desviación estándar

Desempeños esperados al concluir el bloque

- Identifica y analiza elementos de una variable aleatoria, discreta y continua para su aplicación en la solución de problemas de diversos contextos.
- Explica las características de una representación de forma tabular, gráfica y funciones de probabilidad mediante la media y la desviación estándar, que le permite interpretar soluciones a problemas de su entorno para su autoevaluación.
- Identifica el área bajo la curva normal estandarizada a partir de la distribución de probabilidad normal.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científico.

Productos de aprendizaje

- Mapas conceptuales
- Esquemas
- Guión de exposición

Introducción

¡Bienvenido al bloque III!

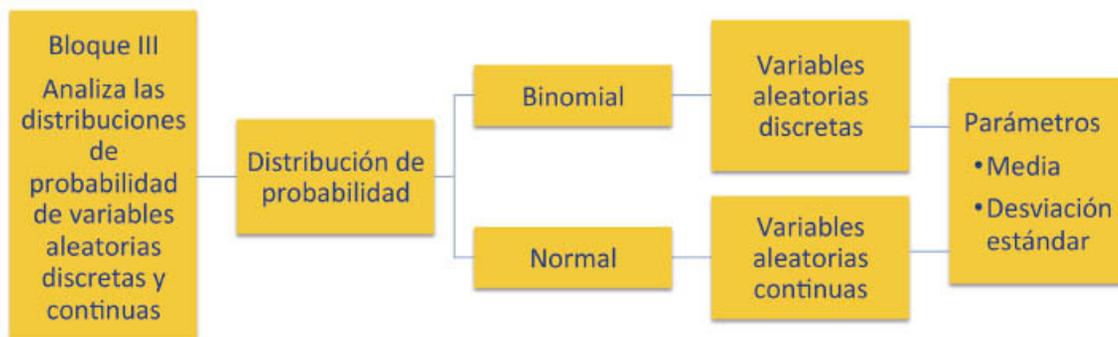
Habrás notado durante el desarrollo de los bloques anteriores que la estadística y la probabilidad forman parte de las acciones que realizas en tu vida diaria.

Durante el desarrollo de este penúltimo bloque, tendrás la tarea de analizar problemas de probabilidad apegados a las variables aleatorias discretas y continuas; el objetivo es examinar las distribuciones de probabilidad, comenzando por identificar los diferentes tipos de variables aleatorias, sus características y la relación con las diferentes distribuciones, así como los parámetros que los integran.

Como parte de tu aprendizaje identificarás y analizarás los elementos de una variable aleatoria discreta y continua para su aplicación en la solución de problemas de diversos contextos.

Finalmente comprenderás y aplicarás diferentes técnicas de recopilación, organización y representación de datos; asimismo te introducirás a la resolución de problemas utilizando distintos enfoques de estudio para entender otros conceptos que nos ayudarán a asociar la estadística y la probabilidad.

Mapa de objetos de aprendizaje





Para iniciar, reflexiona

Las distribuciones de probabilidad son herramientas que ayudan a comprender los valores que pueden tener como resultados de un experimento. En otras palabras, nos ayudan a representar la probabilidad de que un suceso se lleve a cabo en un momento futuro.

Las variables aleatorias toman un papel esencial debido a que toda distribución de probabilidad es generada por una variable (porque puede tomar diferentes valores) aleatoria x (porque el valor tomado es totalmente al azar), y puede ser de dos tipos: variable aleatoria discreta y continua.

En este bloque haremos hincapié en resolver problemas de probabilidad con variables aleatorias discretas y continuas a partir del conocimiento de una distribución de probabilidad, identificando el tipo de variable, y empleando los modelos binomial y normal, así como sus parámetros más relevantes: media y desviación estándar.



Aprende más

Variables aleatorias continuas y discretas y su aplicación en las distribuciones de probabilidad

Seguramente recordarás, que en el bloque I de este texto se planteó que una variable aleatoria es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral, entendiendo este último como el conjunto de soluciones posibles de un experimento. A partir de esta posibilidad es posible cuantificar los resultados posibles de un evento.

Un juego de fútbol puede ser considerado como un experimento aleatorio, en que solo existen dos posibles resultados: ganar o perder. Retomando la definición de variable aleatoria, asignamos un valor a los posibles resultados con el objetivo de establecer una probabilidad.

Asimismo una variable aleatoria debe tener conjunto de valores posibles y una probabilidad definible asociada con valor. En general, representamos la variable aleatoria por X , y un valor determinado del dominio de la variable aleatoria X por una x .

Debemos tener presente que las variables aleatorias se representan usualmente con las últimas letras del alfabeto mayúsculas (X , Y , Z) y los valores que puede tomar se reconocerán con minúsculas (x , y , z). De la misma forma, identificaremos el espacio muestral con la letra S , y definiendo este último como la serie de resultados individuales en un experimento.

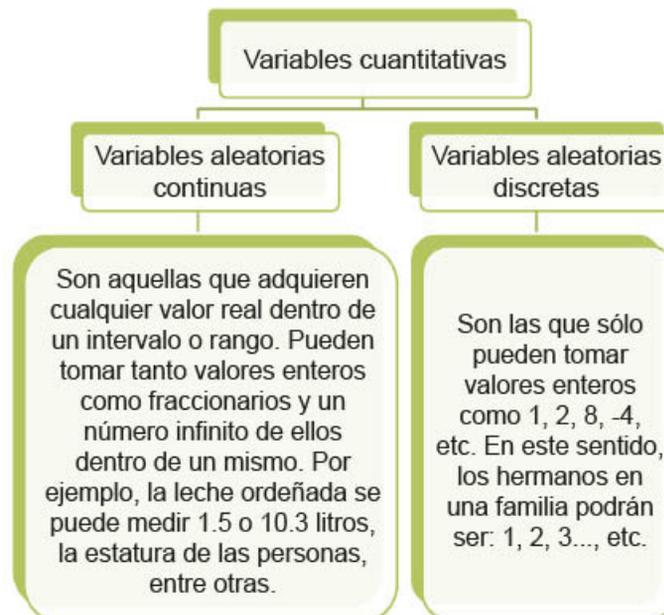


Sabías que...

Las variables aleatorias pueden ser cuantitativas y cualitativas por sus resultados en un espacio muestral.

```
graph LR; A[Tipos de variables] --- B[Variables cualitativas]; A --- C[Variables cuantitativas]; B --- D[\"Son distintas a las numéricas y se utilizan para categorizar un fenómeno o estudio.\"]; C --- E[\"Se ligan a información numérica que asumen determinados valores al momento de obtenerlos.\"];
```

Como recordarás, las variables aleatorias se clasifican en dos tipos: discretas y continuas:



Las variables aleatorias (discretas y continuas) se hacen presentes al ocurrir, una distribución como parte de un comportamiento matemático, es decir, se especifican los valores posibles y el de las respectivas probabilidades asociadas a un espacio muestral.

Es común que el valor de una variable dependa del de otra. Por ejemplo, el ingreso de un trabajador puede depender del tiempo que trabaje; la producción de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen; la distancia recorrida por un objeto puede depender de la velocidad con que se desplace.

La relación entre este tipo de cantidades de variables, suele expresarse mediante una función:

Si a cada valor "x" que puede tomar una variable X le corresponde un valor "y" de otra variable Y, decimos que "y" es función de "x", donde el número "y" es único para cada valor de "x".

El conjunto de todos los valores que puede tomar x se le llama dominio de la función y al conjunto de todos los valores resultantes de y se le denomina contradominio de la función.

Función y distribución de probabilidad

La función de los valores numéricos de x la representamos por $f(x)$, $g(x)$, $r(x)$, etc. y la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor x con $P(X = x)$.

Así, sean x_1, x_2, \dots, x_n (espacio muestral de X), los valores para los cuales X tiene probabilidad y sean p_1, p_2, \dots, p_n las probabilidades correspondientes.

Entonces $P(X = x_1) = p_1$.

Bajo este criterio podemos decir que:

$$\text{Si } f(x_i) = \begin{cases} p_i & \text{cuando } X = x_i \\ 0 & \text{cuando } X \neq x_i \end{cases} \quad \text{donde } (i = 1, 2, 3, \dots)$$

A $f(x_i)$ se le llama función de probabilidad.

La función de probabilidad debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. $f(x_i) \geq 0$
2. $\sum f(x_i) = 1$

A partir de la función de probabilidad podemos establecer el concepto de distribución de probabilidad en la forma siguiente:

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta se presenta como la lista de los distintos valores x_i que puede tomar la variable aleatoria X , junto con sus probabilidades asociadas $f(x_i) = P(X = x_i)$, esto es, el conjunto de parejas $\{x_i, f(x_i)\}$.

Cuando determinamos los valores de la variable aleatoria, le asignamos una probabilidad, y a esto se le llama **distribución de probabilidad**.



Actividad de aprendizaje 2

Realiza una búsqueda bibliográfica que incluya conceptos básicos y ejemplos de variables aleatorias discretas y continuas.

Al encontrar el significado de estos conceptos, sintetízalos y desarrolla un esquema en que sé que relacionen cada uno de ellos. Puedes usar otros libros de texto o páginas de internet. El objetivo es desarrollar un esquema conceptual para reforzar el contenido de los conceptos y su vinculación.

Al finalizar comenta tus resultados con tu profesor (a) y compañeros (as). Recuerda integrar tus documentos en el portafolio de evidencias.



Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Señala con el número 1 las variables que consideres son aleatorias discretas, y con el número 2 las que sean aleatorias continuas. Comparte con tus compañeros (as) y tu profesor(a) las respuestas.

1. Número de páginas de un libro _____
2. Tiempo que tarda en fundirse una bombilla _____
3. Número de preguntas en una clase de una hora _____
4. Cantidad de agua consumida en un mes _____
5. La edad de las mujeres en tu localidad _____
6. La estatura de los hombres de tu salón _____
7. El tiempo que tarde en madurar una manzana _____
8. Kilowatts gastados por familia en tu población _____

Distribución de probabilidad

Las distribuciones de probabilidad revelan un gran número de valores que pueden constituirse como el resultado de un experimento. En otras palabras, nos ayudan a describir la probabilidad de que un evento se realice a futuro; esto involucra el diseño de escenarios de acontecimientos futuros posibles.

Comúnmente son utilizadas como parte de las tendencias posibles en que ocurran distintos resultados, como en el caso de algunos fenómenos naturales, como la situación del clima en un día, si llueve o será soleado, por ejemplo.

En el apartado anterior analizaste una clasificación en distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas.

A su vez, existe la posibilidad de que como parte de la distribución de probabilidad, las variables discretas sean clasificadas como:

- Distribución uniforme
- Simétrica
- Binomial hipergeométrica y,
- de Poisson.

En cambio otras posibilidades de clasificar la distribución de probabilidad de variables continuas son dos:

- Distribución normal y,
- Exponencial

Para efectos de este curso, de las opciones mencionadas, únicamente estudiaremos la distribución binomial y la distribución normal debido a sus amplias posibilidades de aplicación; sin que esto signifique renunciar al hecho de ampliar tu manejo de estas herramientas en otros textos o consultando los sitios de internet sugeridos al final del libro.

Una manera común de enfocar a partir de la distribución de probabilidad es a través de enumerar los posibles resultados que pudieran resultar de la elaboración de un experimento.

No olvides que una distribución de probabilidad siempre es la suma de todas las funciones posibles ($f(x) = 1$), por lo que la sumatoria siempre tiene que ser igual al espacio muestral; esto es ($f(x) = 100\%$).



Sabías que...

En el siglo XIX se realizaron valiosas contribuciones en los campos de las Matemáticas, la Probabilidad y la Mecánica; esto debido a las aportaciones de los matemáticos Pierre-Simon Laplace y Siméon Denis Poisson.

La primera aportación es la Teoría de Poisson que permite contar el número de sucesos que en un periodo, lugar o espacio ocurren se trata de la modelización de situaciones en las que nos interesa determinar el número de hechos para medir, por ejemplo, el número de llamadas realizadas en una hora, el número de personas que entran y salen de un edificio al día, entre algunos otros.

La segunda teoría es la distribución de Doble Exponencial o distribución de Laplace que puede ser considerada como la relación de las densidades de dos distribuciones exponenciales adyacentes. Resulta de la diferencia de dos variables exponenciales aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas.

Distribución de probabilidad binomial

A lo largo de este curso se ha reiterado que una distribución de probabilidad indica toda la gama de valores que pueden representarse como resultado de un experimento si éste se llevase a cabo, es decir, describe la probabilidad de que un evento se realice en el futuro, y por ello constituye una herramienta fundamental para diseñar un escenario de acontecimientos próximos a suceder, considerando las tendencias actuales de diversos fenómenos naturales.

En el estudio de la *Probabilidad y la Estadística* es común asociar el tema de la distribución binomial o distribución de Bernoulli con el matemático suizo Jacobo Bernoulli quien hizo grandes aportaciones a finales del siglo XVII. Una de las más importantes tiene que ver con el método que mide el número de éxitos que tendrá una secuencia de ensayos (n).

Su relevancia se liga a las múltiples áreas de aplicación de ésta distribución, por ejemplo, en la inspección de calidad de productos, ventas, mercadotecnia, medicina, investigación de opiniones y otras.

Cuando realizamos esta clase de mediciones se puede planear un experimento en que el resultado es la ocurrencia o la no ocurrencia de un evento. También se denomina éxito a la ocurrencia del evento y fracaso a la no ocurrencia del mismo.

Para poder denominarse como binomial, una distribución de eventos debe cumplir con algunas condiciones:

- Se asocia frecuentemente con variables aleatorias discretas en que se determina el número de éxitos de una muestra compuesta; por ende, las observaciones, resultados, éxitos son representados a través de la letra n que significa el número de veces que se realiza un experimento.
- La información con variables aleatorias debe componerse de números fijos, es decir enteros.
- Cuando tenemos una serie de datos, estos pueden ser clasificados en dos distintas categorías: **mutuamente excluyentes** y **colectivamente exhaustivos**.
- La probabilidad de que el número de éxitos, resultados u observaciones se clasifique como un éxito es constante entre un resultado al otro. Por otra parte, la probabilidad de que un resultado sea un fracaso es constante en todos los resultados.



Mutuamente excluyentes: es la clasificación que se otorga al número de eventos que no pueden ocurrir de manera simultánea; es decir, la ocurrencia de uno prohíbe la ocurrencia del otro. La ocurrencia de cualquier evento implica que ningún otro puede ocurrir al mismo tiempo. Por ejemplo, sacar un sol o un águila al lanzar una moneda, sacar una reina o un as al jugar con una baraja.

Colectivamente exhaustivos: son todos los posibles resultados de un experimento y constituyen su espacio muestral. Por ejemplo, los eventos colectivamente exhaustivos de lanzar un dado son 1,2,3,4,5 y 6.

Ejemplo

La fórmula que utilizaremos para obtener la distribución binomial es la siguiente:

$$p(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

Donde:

n es el número de ensayos o pruebas

x es el número de éxitos

p es la probabilidad de éxito

q es la probabilidad de fracaso

Anteriormente se mencionó que las distribuciones de probabilidad siempre son la suma de todas las funciones posibles ($f(x) = 1$), por lo que su sumatoria siempre tiene que ser igual al espacio muestral; esto es ($f(x) = 100\%$).

Comprobemos si esta regla se cumple al analizar el siguiente ejercicio:

Distribución binomial	
Ejemplo 1	Valores
<p>La probabilidad de que un estudiante del Telebachillerato "Loma Bonita" obtenga su certificado es 0.3.</p> <p>Indicaciones: Hallar la probabilidad de que un grupo de siete alumnos de reciente ingreso finalicen sus estudios de telebachillerato.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Todos los alumnos finalicen sus estudios. 2. Que ningún alumno finalicen sus estudios. 	<p>$x = 7$</p> <p>$n = 7$</p> <p>$p = 0.3$</p> <p>$q = 0.7$</p>
<p>1. Que todos los alumnos finalicen sus estudios.</p> <p>Adaptando los valores a la fórmula se representa de la siguiente manera:</p> $p(x = 7) = \binom{7}{7} (0.3)^7 (0.7)^0 =$ <p>Encontraremos que la probabilidad de que todos los alumnos que finalicen sus estudios es de:</p> <p style="text-align: center;">0,0002%</p>	
<p>2. Que ningún alumno finalicen sus estudios.</p> <p>Ahora veamos la probabilidad de que ningún alumno finalice sus estudios:</p> $p(x = 0) = \binom{7}{0} (0.3)^0 (0.7)^{7-0} =$ <p>La probabilidad de que ningún estudiante termine sus estudios en el Telebachillerato es de:</p> <p style="text-align: center;">0,0824%</p>	



Actividad de aprendizaje 2

Reúnete en equipo y construye un mapa conceptual en el que sintetices la distribución binomial, sus áreas de aplicación, y los elementos que la componen.

Realiza junto con tus compañeros (as) una exposición en el que presenten un mapa conceptual y determinen, a partir de su exposición frente a grupo, cuál de los mapas presentados por los equipos reúne los elementos con mayor claridad y relaciones entre sus elementos.

¡No olvides incluir tu mapa en el portafolio de evidencias!

Distribución de probabilidad normal estándar

La normal estándar, es de las distribuciones de probabilidad, la más importante, ayuda a administrar muchos fenómenos, pues varias poblaciones tienen distribución normal o pueden ajustarse muy bien a ella. Esta clase de distribución es comúnmente utilizada en el campo de la industria cuando se tiene una muestra grande.

Se identifica a través de una curva simétrica. Esta gráfica también recibe el nombre de distribución o campana de Gauss, pues al representar su función de probabilidad, tiene forma de campana.

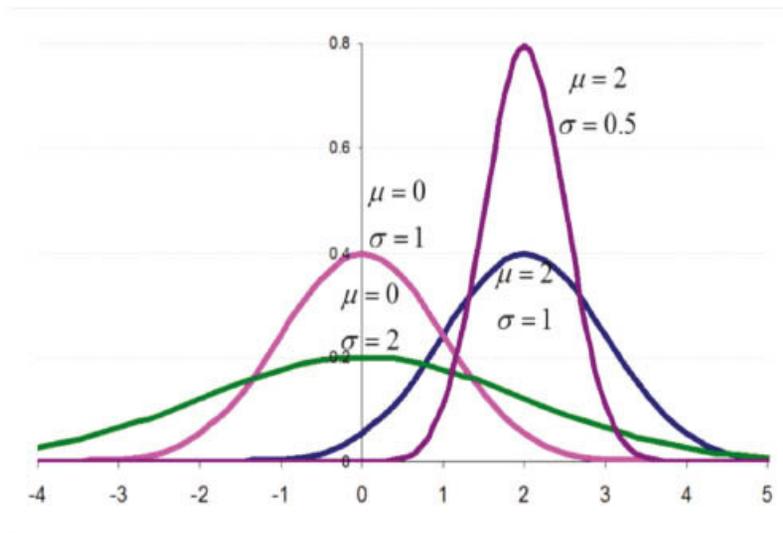


El profesor Julio Vargas (2010) afirma que esta distribución nos da la probabilidad de que al elegir un valor, éste tenga una medida contenida en unos intervalos definidos. Esto permitirá predecir de forma aproximada, el comportamiento futuro de un proceso, mediante los datos del presente.

La distribución normal es utilizada comúnmente cuando es relevante considerar:

- Características de forma, figura o configuración de personas, animales, planta, tales como las tallas, pesos, perímetros, etc.
- Particularidades fisiológicas, como pueden ser, los efectos de una misma dosis de un fármaco o de una misma cantidad de abono para las plantas.
- Corregir errores que pueden presentarse al realizar medidas en determinadas magnitudes.
- Elementos escolares como promedios, calificaciones, desempeño, etc.

Todos los tipos de distribución normal se representan en curvas simétricas, cada una de ellas con su respectiva media y desviación estándar.



Para poder estudiar este tipo de distribuciones fue creada la distribución normal estandarizada, llamada así por que utiliza las puntuaciones estándar Z , que en el gráfico aparece en color magenta.

La representación gráfica se caracteriza por ser:

- Una distribución simétrica.
- Es asintótica, es decir, sus extremos nunca tocan el eje horizontal, cuyos valores tienden a infinito.
- En el centro de la curva se encuentran la media, la mediana y la moda.
- El área total bajo la curva representa el 100% de los casos.
- Los elementos centrales del modelo son la media y la varianza.
- Debido a que una distribución normal es simétrica, debido a que el eje que pasa por $x = \mu$, deja un área igual a 0.5 de lado izquierda y otro igual a 0.5 a la derecha.

Una variable aleatoria continua, x debe seguir una distribución normal de media μ con valor cero y desviación estándar σ con valor de 1 es decir $N(0,1)$ o $N(\mu,\sigma)$. Dicho en otras palabras, necesitamos conocer la media, y las desviación estándar o la varianza para tener definida la distribución normal.



Sabías que...

La distribución normal es también un caso particular de probabilidad de variable aleatoria continua, fue reconocida por primera vez por el francés Abraham de Moivre (1667-1754). Posteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) elaboró desarrollos más profundos y formuló la ecuación de la curva; de ahí que también se le conozca, más comúnmente, como la “campana de Gauss”.

Para poder utilizar la gráfica tenemos que transformar la variable x que sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$ en otra variable Z que siga una distribución $N(0,1)$.

Es decir, utilizaremos la fórmula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

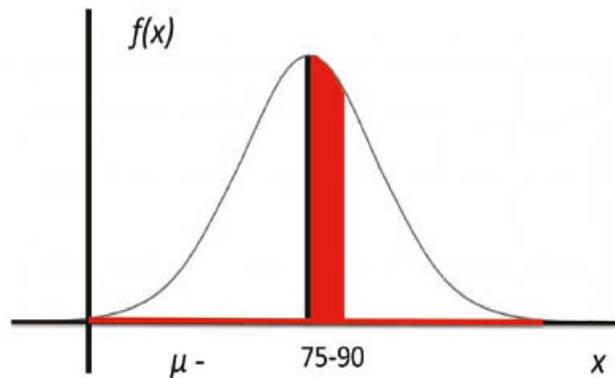
Distribución binomial		
Ejemplo 1	Valores	Fórmula
<p>1. Una población normal tiene una media de 80 y una desviación estándar de 14.0</p> <p>Calcula la probabilidad de un valor localizado entre 75.0 y 90.0 , es decir, $p(75 \leq x \leq 90)$</p>	<p>$\mu = 80$</p> <p>$\sigma = 14.0$</p>	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Distribución binomial

$$Z = \frac{90-80}{14} = \frac{10}{14} = 0.71 = \begin{matrix} \text{probabilidad acumulada} \\ 0.7611 \end{matrix}$$

$$Z = \frac{75-80}{14} = \frac{-5}{14} = -0.36 = \begin{matrix} \text{probabilidad acumulada} \\ 0.3594 \end{matrix}$$

$$p(75 \leq x \leq 90) = 0.7611 - 0.3594 = 0.4017$$



Actividad de aprendizaje 3

En equipo de al menos tres integrantes, determinen dos ejemplos que tengan relación con las distribuciones binomial y normal. Expliquen las condiciones que cumplen cada uno de los ejemplos para ser aplicables las distribuciones binomial y normal.

Organiza con tu equipo una exposición en la que presenten los resultados de su investigación. Redacten en no más de dos cuartillas sus conclusiones. Integren sus documentos en el portafolio de evidencias.



Aprende más

Parámetros (media y desviación estándar)

Los parámetros son conceptualizados como los valores que se calculan para resumir la información recogida en un experimento aleatorio o en las distribuciones de probabilidad.

Como recordarás en tu libro anterior de Probabilidad y Estadística I existen medidas de tendencia central por ejemplo la media, y la moda; así como las de dispersión como la varianza y la desviación estándar; las cuales funcionan como herramientas que ayudan a obtener valores que representan el punto central de los datos, es decir determinar el valor más representativo de la variable que estamos analizando; asimismo nos permiten analizar qué tan cercano o lejano están los datos respecto, por ejemplo, al valor medio.

Para las distribuciones de probabilidad binomial y normal, la media aritmética concurrirá en el centro la distribución; asimismo la desviación estándar será el parámetro de dispersión que nos indique si los datos estudiados están más concentrados o más dispersos, por ejemplo en una campana de Gauss.



Media y desviación estándar en distribuciones binomiales

La media de una distribución binomial es nombrada como valor esperado o esperanza matemática; este es el número de ensayos por la probabilidad de éxito, es decir, el valor que se espera obtener de un experimento estadístico.

La **desviación estándar** como recordarás es una medida de dispersión para variables; se integra mediante un conjunto de datos que se traducen como una medida de dispersión y nos ayuda a indicar cuánto puede dejarse los valores respecto al promedio (media), por tanto es útil para buscar probabilidades de que un evento ocurra; en los casos de una distribución binomial se calcula como la raíz cuadrada del número de ensayos por la probabilidad de éxitos por la probabilidad de fracasos.

Parámetro	Fórmula en la distribución binomial
Media	$\mu = nP$
Desviación estándar	$\sigma = \sqrt{nPQ}$

Veamos el siguiente ejemplo:

Media y desviación estándar en la distribución binomial		
Ejemplo 3	Valores	Fórmula
1. Se sabe que x es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial, con $n = 5$ y $p = 0.4$. Determina su media y desviación estándar.	$n = 5$ $p = 0.4$	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
$Media = np = 5[0.4] = 2$ $Desviación\ estándar = \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5(0.4)(0.6)} = 1.0954$		



Sabías que...

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la **varianza por lo que son medidas que van en conjunto**. La **varianza** es una medida de tendencia central, esto significa que te servirá para obtener la perspectiva de que tan cercanos se encuentran tus datos del centro, es decir, de la media.

Ésta es representada por la letra s^2 al cuadrado o el símbolo σ^2 (sigma) elevado también al cuadrado.

La fórmula que se utiliza en esta medida es:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Media y desviación estándar en distribuciones normal

Como ya sabes, la media es definida como la suma de los valores de cierto número de cantidades divididas entre su número; asimismo que es significativa entre algunas, medidas de tendencia central, puesto que, intervienen en operaciones algebraicas.

Por su parte la desviación estándar, también considerada como una de las más importantes en las medidas de dispersión incluye aproximadamente el 68% de los términos de una distribución normal. Por sus propiedades, se utiliza con facilidad en el análisis estadístico.

En los casos de las distribuciones normal estándar, siempre tendrá una media (μ) igual a cero y una desviación estándar (σ) igual a uno.

Parámetro	Símbolo en la distribución normal
Media	μ
Desviación estándar	σ

La distribución normal se representa con la siguiente fórmula: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Sin embargo, la distribución normal que es el resultado de dividir la desviación de un dato con respecto a la media aritmética entre la desviación estándar. También se le denomina variable Z.

$$\text{Calificación } Z = \frac{\text{Desviación respecto a la media aritmética}}{\text{desviación estándar}}$$

Media y desviación estándar en la distribución binomial		
Ejemplo 4	Valores	Fórmula
<p>Después de promocionar una campaña de salud en el Telebachillerato en la comunidad de Loma bonita, se presentaron los siguientes datos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Para la estatura media (μ) =164.2, desviación estándar (σ)= 8.34 • Para los pesos, la media (μ) =60.2, desviación estándar (σ)= 12.4 <p>La estatura de José Juan es de 1.69 y pesa 65 kg.</p> <p>Calcula calificación Z para cada medida y determina cuál es la medida que tiene mayor desviación.</p>	<p>Estatura:</p> <p>$\mu = 164.2$</p> <p>$\sigma = 8.34$</p> <p>Peso:</p> <p>$\mu = 60.2$</p> <p>$\sigma = 12.4$</p>	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
<p>Calificación Z</p> <p>Estatura $Z = \frac{169-164.2}{8.34} = 0.57$</p> <p>Peso $Z = \frac{65-60.2}{12.4} = 0.38$</p> <p>La mayor desviación es la que corresponde a la estatura</p>		

Cierre de bloque III

Durante tu recorrido por este bloque observaste cómo las distribuciones de probabilidad funcionan a través del reconocimiento de los valores de una variable aleatoria. Como pudiste apreciar, al inicio, reconociste algunos elementos que ayudaron a reforzar tus conocimientos aprendidos en el curso anterior de Estadística y Probabilidad I y, que fueron útiles en desarrollo de los temas de distribución binomial y distribución normal.

Comprender las distribuciones de probabilidad te permitirá tener una precepción más completa, la cual te ayudará a distribuir de manera numérica las probabilidades de acontecimientos futuros. Te recomendamos recordar y aplicar cada uno de los temas aprendidos, ya que, serán herramientas de apoyo no solo en tus estudios, sino en actividades cotidianas.

Autoevaluación

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una X en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque III.

Interpretación del nivel de avance:

100-90% = lo logré el aprendizaje de manera independiente.

89-70% = requerí apoyo para construir mi aprendizaje.

69-50% = fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente.

49% o menos = no logré el aprendizaje.

		Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Contenidos				
	Distingues la diferencia entre variable aleatoria continua y variable aleatoria continua.				
	Diferencias entre las variables cualitativas y cuantitativas.				
	Sabes que es una espacio muestral				
	Conoces el uso de la desviación estándar.				

Analizas las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas

		Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Contenidos					
Procedimentales	Conoces los procedimientos para clasificar las variables aleatorias discretas y continuas.				
	Puedes hacer una explicación personal del uso de la distribución binomial y normal.				
	Sabes diferenciar una función de la distribución binomial de la distribución normal.				
	Comparas los procesos de media, varianza y desviación estándar.				
Actitudinales	Cuál es uso de las medidas de tendencia central y de dispersión.				
	Reflexionas acerca del uso de los procedimientos matemáticos en la vida cotidiana				
	Muestras interés en el uso de la Probabilidad y la Estadística.				
	Quieres realizar procedimientos que te ayuden a conocer distintos acontecimientos en tu comunidad.				

Una vez que hayas dado lectura a las preguntas que se te presentan enseguida, responde en forma breve a cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

2. ¿Cómo puedes hacer uso de lo aprendido de manera inmediata, en el presente y futuro?

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

BLOQUE IV

Comprendes el comportamiento
de los datos de dos variables



Bloque IV



Objetos de aprendizaje que se abordan

- Representación y comportamiento de datos para dos variables
- Representación Tabular y Gráfica
- Coeficiente de Correlación Lineal, de Determinación y Regresión Lineal.

Desempeños esperados al concluir el bloque

- Resuelve problemas que involucran el comportamiento de datos de dos variables en situaciones de su propio interés en el ámbito escolar o personal.
- Representa datos de dos variables, mediante la elaboración de tablas de contingencia y diagramas de dispersión.
- Analiza la representación tabular y gráfica del comportamiento de dos variables.
- A partir del análisis de la tendencia, utilizando el diagrama de dispersión y el cálculo del coeficiente de correlación, resuelve los problemas de tu entorno.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Productos de aprendizaje

- Recordemos los bloques anteriores.
- Ejercicio de representación tabular de contingencia.
 - Realiza ejercicio de representación gráfica
 - Identifica el tipo de relación entre dos variables a través de tablas de solución de problemas y de interpretar los valores de su coeficiente de correlación, de determinación y regresión, según sea el caso.

Introducción

En tu curso de Probabilidad y Estadística I comprendiste el uso, además de los instrumentos y técnicas para recolectar datos, la naturaleza y clasificación de las variables. Al entender su naturaleza, ahora sabes que pueden ser continuas y discretas; dependientes e independientes.

Es elemental que para este bloque retomes, tales conocimientos, puesto que serán útiles para adentrarnos a conocer de qué manera se comportan los datos de dos variables específicas no sólo en la investigación, sino incluso en la vida diaria.

Mapa de objetos de aprendizaje





Para iniciar, reflexiona

Una de las cuestiones que más frecuentemente se presentan en estudios comerciales, estudios de ciencias de la salud, o temas de carácter cotidiano es el determinar qué relación de dependencia existe entre dos variables que se analizan.

Por ejemplo:

- ¿Qué relación existe entre el aumento del precio del aceite de oliva y la variación en su nivel de consumo?
- ¿Y entre la variación del nivel de precios del aceite de oliva y el de girasol?

Para estudiar la relación o dependencia entre variables se pueden utilizar algunas técnicas estadísticas como la regresión y la correlación, pero ambas pasan por el adecuado manejo de tablas y diagramas de dispersión.



Aprende más

Representación y comportamiento de datos para dos variables

Para describir el comportamiento de datos para dos variables, en este bloque se presentarán técnicas para describir su representación tabular y gráfica; posteriormente se calculan mediciones que revelen su grado de relación, así como la fuerza y porcentaje explicativo de su comportamiento. El apartado concluye con la explicación de una técnica útil para modelar una recta de regresión lineal.

Representación tabular de contingencia

Si se sortea un viaje a la playa entre los 120 compradores de boleto de una rifa, que tiene como objetivo final obtener fondos para financiar la construcción de un aula escolar, podemos definir que se dispone de dos variables; la primera, el sexo (hombre o mujer) y la segunda recoge si el individuo es casado o soltero. Del total de compradores, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas.

La descripción de los compradores de boleto se puede organizar en una **tabla de contingencia** para expresar la relación entre las dos variables en una muestra aleatoria de 120 individuos y nos ayuda a organizar la información que se puede presentar de la siguiente forma:

	Hombres	Mujeres	
Casados	35	45	80
Solteros	20	20	40
	55	65	120



Tablas de contingencia: son arreglos que se emplean para registrar y analizar la relación entre dos o más variables, por lo regular, de naturaleza cualitativa (nominales u ordinales)

En estadística las tablas de contingencia se emplean para registrar y analizar la relación entre dos o más variables, que habitualmente son de naturaleza cualitativa (nominales u ordinales).

Para un ordenamiento de más variables y datos podemos retomar el cuadro sobre el Telebachillerato comunitario “Loma Bonita” que conociste en tu libro de Probabilidad y Estadística I, y que a continuación se presenta con algunos cambios ante la necesidad de procesar la información de forma más consistente.

Podrás percartarte que al inicio de cada fila hay una característica sobre los alumnos y alumnas de dicho bachillerato, éstas pueden considerarse variables, si atendemos a que una variable puede definirse como el aspecto relevante que se considera para cada elemento de la muestra y puede tomar diferentes valores.

Telebachillerato comunitario de "Loma Bonita"									
Alumnos	Número de alumnos	Edad promedio	Horas promedio de estudio	Promedio de calificaciones	Número de alumnos unidos (casados, unión libre)	Número de alumnos que son padres o madres	Número de estudiantes que trabajan	Estatura promedio de los varones	Estatura promedio de las mujeres
Primer semestre	18	14	1 ½	10	3	0	1	1.68	1.50
Segundo semestre	14	15	½	7	5	0	1	1.70	1.50
Tercer semestre	24	15	2	7	5	1	2	1.70	1.53
Cuarto semestre	32	17	1 ¾	7	2	1	1	1.65	1.55
Quinto semestre	16	17	1	9	-	1	4	1.72	1.60
Sexto semestre	21	18	3	7	5	2	2	1.72	1.60

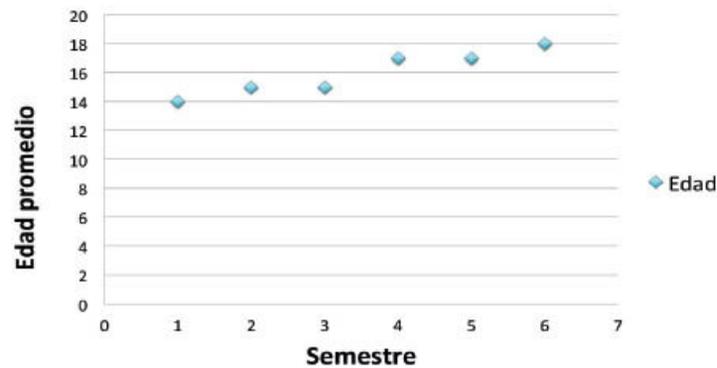
Fuente: Tomado del libro *Probabilidad y Estadística I*, p.29

En el bloque anterior analizaste los tipos de variables, ahora es posible llegar a determinar qué tanta relación tienen o pueden llegar a tener un par de variables entre sí. A esto se le denomina análisis bivariado.

Representación por medio de diagramas de dispersión

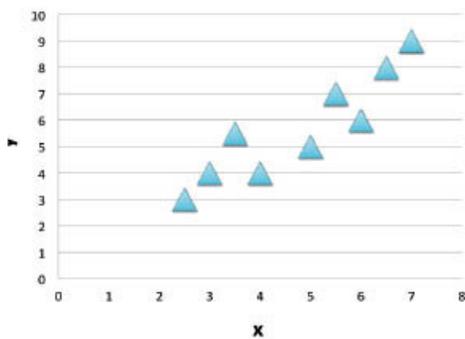
Los datos de las variables seleccionables se muestran como un conjunto de puntos, cada uno con el valor de una variable que determina la posición en el eje horizontal (x) y el valor de la otra variable determinado por la posición en el eje vertical (y).

Para el caso de la tabla de las variables "edad promedio" y "semestre", la nube de puntos puede presentarse de la siguiente forma:

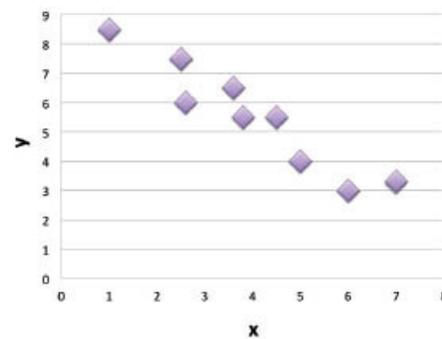


Como se puede observar en la gráfica anterior, podría presumirse la existencia de una relación lineal de tipo positivo entre las variables relacionadas, ya que existe claramente la posibilidad de configurar una recta trazable a partir de los datos, que sería creciente, esto es, con pendiente positiva. Esto significa, en los hechos, algo muy lógico: entre mayor es el semestre analizado es mayor la edad de los grupos de telebachillerato comunitario "Loma Bonita". La construcción de este tipo de diagramas es un primer paso para investigar la relación entre dos variables, porque en el diagrama se muestra visualmente la forma y grado de la relación.

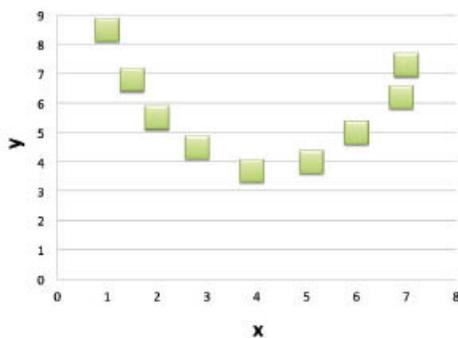
Por ejemplo, los diagramas A y B siguientes, indican relación en forma de línea recta y el diagrama C, sugiere una relación curvilínea.



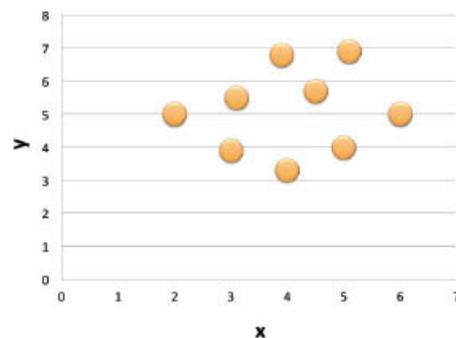
A



B



C



D

Los diagramas A y B muestran también un alto grado de dependencia de las relaciones. Sin embargo, el diagrama C muestra una relación que no es estrecha en sentido lineal.

El diagrama D indica en cambio, que no hay relación entre las variables, puesto que no hay línea o curva adecuada para describir la relación promedio entre ambas variables.

Estos diagramas de dispersión también indican si la relación entre las dos es positiva o negativa, como en los casos A y B, respectivamente.



Sabías que...

Para analizar las relaciones bivariadas existen tres tipos de enfoques:

1. Prueba de la diferencia de medias: se comparan las medias de una variable entre las categorías o grupos de una variable nominal u ordinal.
2. Conteo de las frecuencias de ocurrencias conjuntas de atributos de dos variables nominales: en que dos variables para cada individuo, con parejas de atributos de las dos variables.
3. Medición de la correlación entre dos variables de intervalo o de razón.

Para efectos de este curso, estudiaremos el último enfoque descrito.

Existen cuatro aspectos que debes tomar en cuenta para caracterizar la relación entre variables.

Caracterización de la relación entre dos variables



Fuente: Elaboración propia a partir de Ritchey, F. (2008) Estadística para las ciencias sociales. México, McGrawHill.



Actividad de aprendizaje 1

Instrucciones: La primera actividad de este bloque consistirá en reunirse en equipos mixtos para realizar una investigación documental de datos en que se representen dos variables cualitativas y su importancia en el estudio de situaciones reales; por ejemplo, en el estudio de edad y estatura entre los grupos de educación pública, estudios de contaminación o drogadicción, entre otros.

Representa en una tabla de contingencia y un diagrama de dispersión los datos de las variables asociadas. Incluyan la información recabada en su portafolio de evidencias.



Aprende más

Análisis de correlación

Con frecuencia, los diagramas de dispersión no muestran claramente si existe relación lineal entre dos variables. En razón de ello, puede ser necesario medir el grado de asociación entre ellas, a partir de calcular un valor numérico que indique el tipo de relación existente.

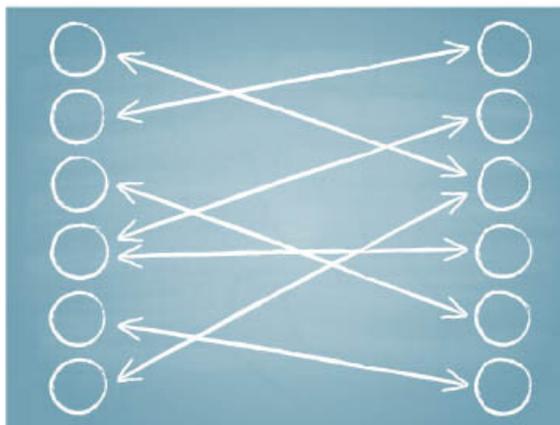
Las posibilidades se acotan a tres tipos de relación lineal:

- Directa, si la línea recta es creciente y se advierte una pendiente positiva, como en el anterior diagrama A.
- Inversa, Si la línea recta es decreciente y se advierte una pendiente negativa, como en el diagrama B.
- Inexistente, que ocurre si la relación entre variables es inexistente como en el diagrama D.

Covarianza

La covarianza es una medida descriptiva de variación simultánea de las variables que permite determinar el tipo de asociación entre ellas.

Es una forma de conocer sí entre dos variables existe alguna relación, y con ello es posible realizar análisis, llegar a ciertas conclusiones e incluso comprobar hipótesis.



Telebachillerato comunitario de "Loma Bonita"									
Alumnos	Número de alumnos	Edad promedio	Horas promedio de estudio	Promedio de calificaciones	Número de alumnos unidos (casados, unión libre)	Número de alumnos que son padres o madres	Número de estudiantes que trabajan	Estatura promedio de los varones	Estatura promedio de las mujeres
Primer semestre	18	14	1 ½	10	3	0	1	1.68	1.50
Segundo semestre	14	15	½	7	5	0	1	1.70	1.50
Tercer semestre	24	15	2	7	5	1	2	1.70	1.53
Cuarto semestre	32	17	1 ¾	7	2	1	1	1.65	1.55
Quinto semestre	16	17	1	9	-	1	4	1.72	1.60
Sexto semestre	21	18	3	7	5	2	2	1.72	1.60

Fuente: Tomado del libro *Probabilidad y Estadística I*, p.29

El director del Telebachillerato "Loma Bonita" requiere de un análisis sobre el rendimiento de las y los alumnos inscritos en los seis semestres de dicha institución educativa.

Para definir la asociación de las variables disponibles con la más cercana al rendimiento, es necesario establecer cuáles variables podrían ser las asociadas.



Actividad de aprendizaje 2

Instrucciones:

Otra actividad de este bloque consistirá en escoger y argumentar por equipos, a partir de la anterior tabla de contingencia, tres variables que puedan estar asociadas al rendimiento de los alumnos, que aquí se asumirá como promedio de calificaciones.

Argumenta la razón por la que crees que existe una relación entre ambas variables.

Dibuja un diagrama de dispersión para cada una de las variables identificadas y coméntalas. Incluye la información recabada en tu portafolio de evidencias. Contrasta los pasos aplicados para desarrollar tus respuestas con la información que aparece en el apéndice al final del libro.



Tablas de contingencia: son arreglos que se emplean para registrar y analizar la relación entre dos o más variables, por lo regular, de naturaleza cualitativa (nominales u ordinales)

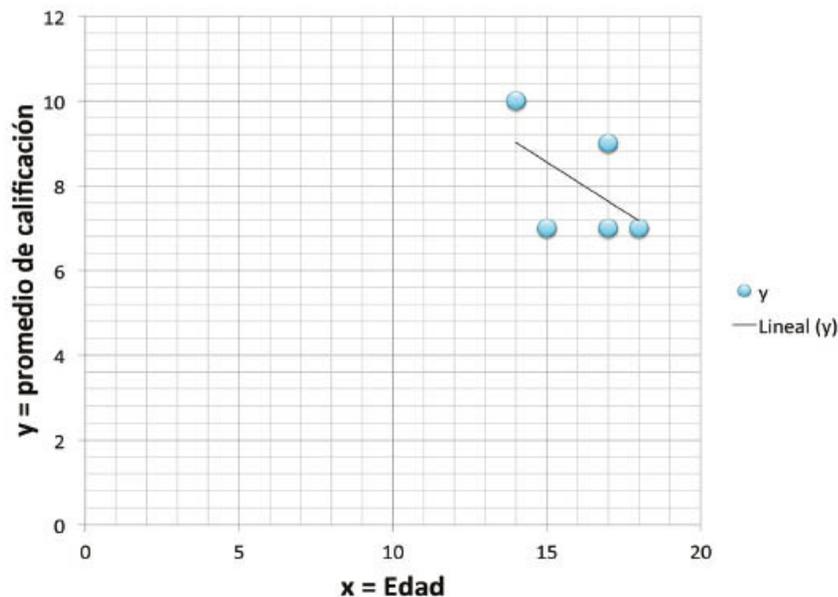
Marisol, alumna de cuarto semestre propone que se tomen las variables *Edad promedio* y *Promedio de calificaciones*, por lo que al calcular la correlación entre ambas variables y asignar un valor a esa medida de asociación tiene que desarrollar una serie de pasos que consisten en:

- Definir el rol de cada una de las variables. X es la edad promedio del grupo en cada semestre, mientras que Y es el promedio de calificaciones del grupo en cada semestre.
- Definir la media aritmética -en este caso muestral- de cada una de las variables X y Y. Toma en cuenta en que no estamos en posibilidad de trabajar con datos de *TODOS* los alumnos de telebachillerato comunitario. Para repasar la forma en que se realizan estos cálculos, te recomendamos remitirte a tu curso de Probabilidad y Estadística I, Bloque III, pág. 75.
- Calcular la diferencia de cada uno de los datos de la variable respecto a su propia media muestral.
- Multiplicar cada una de las dos diferencias resultantes, y sumarmas de acuerdo a la columna de la extrema derecha de la siguiente tabla. Ese resultado -4 se divide entre $(6-1)$, que corresponde al tamaño de la muestra menos 1, que es un ajuste cuando trabajamos con una muestra y no con datos de la población total.



Tabla de resolución de problema Estudiantes del Telebachillerato "Loma Bonita"					
Variable independiente (x)	Edad promedio				
Variable dependiente (y)	Promedio de calificaciones				
Análisis de covarianza $S_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$ donde: x_i = valor i -ésimo de la variable x \bar{x} = media muestral de la variable x y_i = valor i -ésimo de la variable y \bar{y} = media muestral de la variable y n = tamaño de muestra n=6 media aritmética de x=... \bar{x} =96/6=16.00 media aritmética de y=... \bar{y} =47/6=7.83	x	y	$(x, - \bar{x})$	$(y, - \bar{y})$	$(x, - \bar{x})(y, - \bar{y})$
	14	10	- 2	2.17	-4.34
	15	7	- 1	- 0.83	0.83
	15	7	- 1	- 0.83	0.83
	17	7	1	- 0.83	- 0.83
	17	9	1	1.17	1.17
	18	7	2	- 0.83	- 1.66
	suma =96	suma =47			- 4
	$S_{xy} = - 4/(6-1)$ $= - 4/(5)$ $= - 0.87$				Resultado = - 0.87

El signo de esta medición indica que existe una relación inversa entre las variables, lo que significa en concreto que cuando X (la edad promedio incrementa de valor), Y (el promedio de calificaciones disminuye) y viceversa.

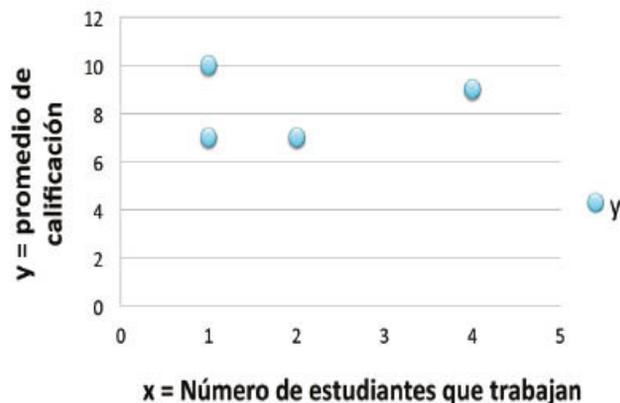


Espera a revisar los siguientes dos ejemplos para discutir lo que está detrás de estos resultados.

Carlos, alumno de sexto semestre, propone que se tomen las variables *Número de estudiantes que trabajan* y *Promedio de calificaciones*, por lo que al calcular la correlación entre ambas variables y asignar un valor a esa medida de asociación, siguiendo los pasos anteriormente descritos, es posible encontrar:

Tabla de resolución de problema Estudiantes del Telebachillerato "Loma Bonita"						
Variable independiente (x)	Número de estudiantes que trabajan					
Variable dependiente (y)	Promedio de calificaciones					
Análisis de covarianza $S_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$ donde: x_i = valor i -ésimo de la variable x \bar{x} = media muestral de la variable x y_i = valor i -ésimo de la variable y \bar{y} = media muestral de la variable y n = tamaño de muestra n=6 media aritmética de x=... \bar{x} =1.8 media aritmética de y=... \bar{y} =7.8	x	y	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	
	1	10	- 0.8	2.2	-1.8	
	1	7	- 0.8	- 0.8	0.7	
	2	7	0.2	- 0.8	- 0.1	
	1	7	- 0.8	- 0.8	0.7	
	4	9	2.2	1.2	2.5	
	2	7	0.2	- 0.8	- 0.1	
	suma =11	suma =47			1.8	
	$S_{xy} = 1.8/6-1$ $= 1.8/5$ $= 0.37$					Resultado = 0.37

El signo de esta medición indica que existe una relación positiva entre las variables, lo que significa que cuando X (número de estudiantes que trabaja incrementa de valor), Y (el promedio de calificaciones aumenta) y viceversa.





Actividad de aprendizaje 3

Instrucciones:

La tercera actividad de este bloque consistirá en reunirte con tu equipo y discutir y argumentar en torno a los resultados de estos dos últimos ejercicios a partir de la siguiente pregunta:

¿Estás de acuerdo con el sentido de cada uno de éstos resultados?

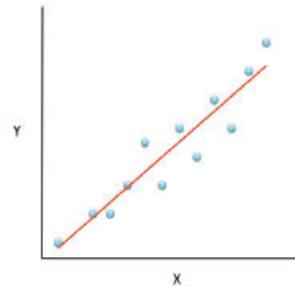
Sintetiza y expón frente a grupo los principales resultados de tus dos análisis.

Incluye la información recabada en tu portafolio de evidencias. Verifica tus respuestas en el apéndice al final del libro.

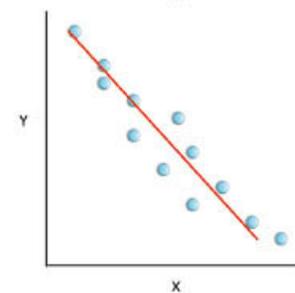


Sabías que...

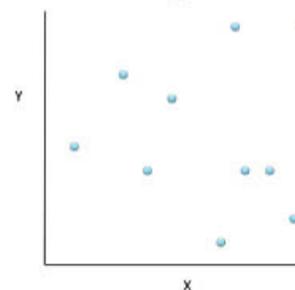
Si el valor de la covarianza es positivo, muestra que la relación lineal entre la variable X y la variable Y es directa.



En caso de ser negativo, entonces es inversa esto significa que si X aumenta de valor, Y disminuye, y viceversa.



Si el valor de la covarianza es cero, puede señalarse que no existe relación entre las variables.





Aprende más

Coeficiente de correlación lineal

Después de conocer el uso de una herramienta para apreciar si hay o no relación entre dos variables, sería bueno saber con qué fortaleza se presenta ésta.

Para ello podemos utilizar el coeficiente de correlación, una medida de la relación lineal entre dos variables. Indica cuán débil o fuerte es una relación lineal entre dos variables.



Coeficiente de correlación: mide la magnitud de la relación lineal entre un par de variables, indica que tan fuerte o débil es dicha relación

Debemos tener en cuenta que mientras más elementos utilicemos para caracterizar las variables, tendremos un análisis más nutrido, confiable y congruente.

Si retomamos el último ejemplo tenemos que, en términos más generales, a la covarianza que ya conocemos, solamente hay que agregar dos factores adicionales. La desviación estándar muestral de X y la desviación estándar muestral de Y. Te recordamos que los cálculos de estos parámetros se encuentran explicados en el bloque III. Aquí basta recordar que se utiliza la siguiente fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

De modo que:

Fórmula para calcular la correlación lineal

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

Donde:

S_{xy} = la covarianza muestral entre las variables X y Y

S_x = desviación estándar muestral de x

S_y = desviación estándar muestral de y

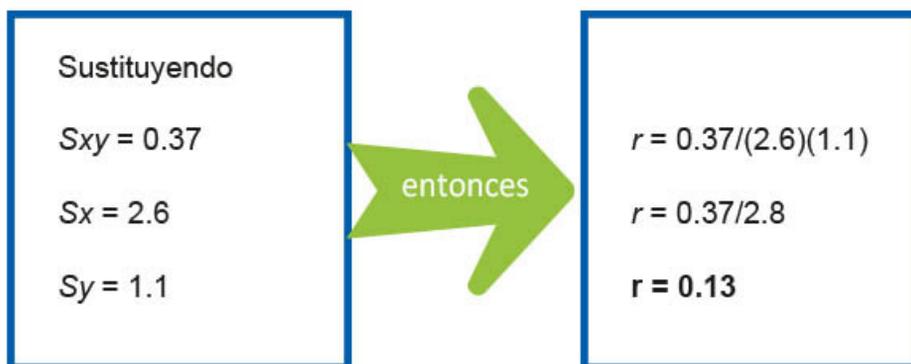
El rango de valores está entre -1 y +1

Retomando el ejemplo:

Estudiantes del Telebachillerato "Loma Bonita"	
Variable independiente (x)	Número de estudiantes que trabajan
Variable dependiente (y)	Promedio de calificaciones

En que:

$$\begin{aligned}S_{xy} &= 1.8/6-1 \\ &= 1.8/5 \\ &= 0.37\end{aligned}$$

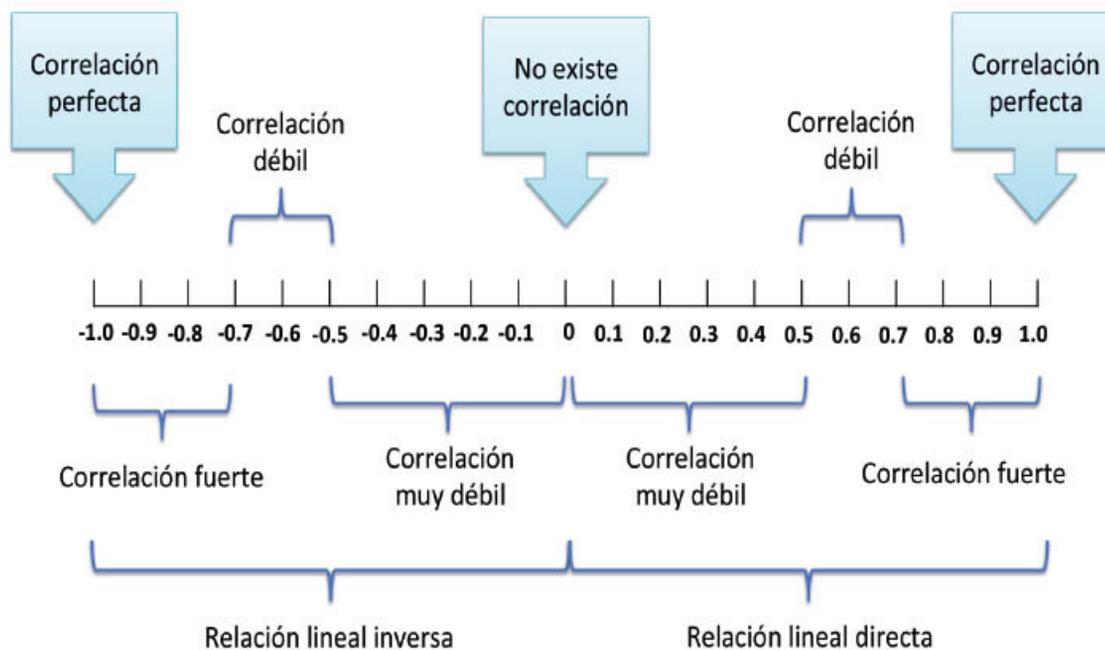


No olvides consultar la tabla de la página siguiente. A partir de ella entenderás que $r=0.13$, se corresponde a una correlación positiva lineal, pero muy débil.



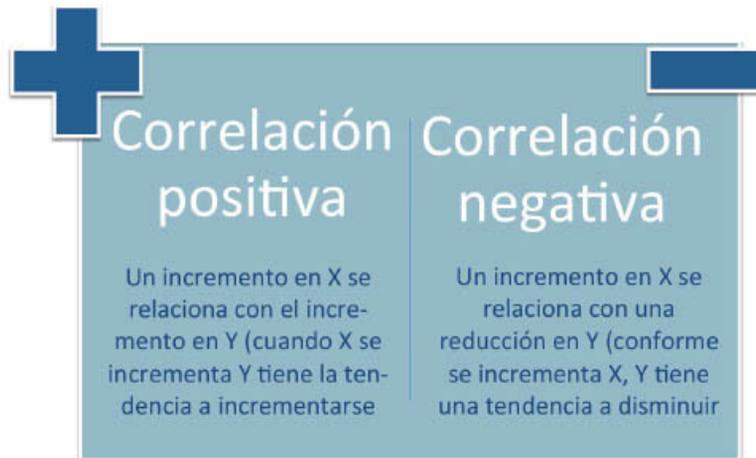
Sabías que...

Los resultados del cálculo de correlación lineal siempre estarán en un rango de valores de entre -1 y +1 por los que de manera gráfica el grado de fortaleza de la relación existente entre dos variables se representa de la siguiente manera:



Fuente: Tomado de Gutiérrez, B. A. (2012). *Probabilidad y Estadística (Enfoque por competencias)*, México, McGraw Hill.

Recapitulando: cuando lo que interesa es analizar una relación de asociación entre dos variables primero debemos definir cuál de ellas es la variable Y, variable dependiente, y cuál es la variable X, variable independiente. Una vez definido esto es posible establecer sus niveles de correlación:



Fuente: elaborado a partir de Shao, S. (1988) *Estadística para Economistas y Administradores de Empresas*, México. Herrero Hermanos SucS.



Sabías que...

Existe el análisis de correlación múltiple y parcial, el cual trata con tres o más variables, que considera una sola variable dependiente, relacionando dos o más variables independientes. Sin embargo, estos temas no son objeto de este curso.



Aprende más

Coeficiente de determinación

Para saber si una variable X es “buena” para explicar la variable Y, en estadística se utiliza el coeficiente de determinación.



Coeficiente de determinación: para saber si una variable X es “buena” para explicar la variable Y, se calcula el coeficiente de determinación, que se denota por r^2 .

En este contexto, la variable dependiente Y es la que se busca explicar, y en términos estadísticos es lo que se busca estimar o pronosticar. A su vez, la variable independiente X es la que brinda información para explicar Y y recibe el nombre de variable de predicción. El coeficiente de determinación, o r^2 tiene las características siguientes:

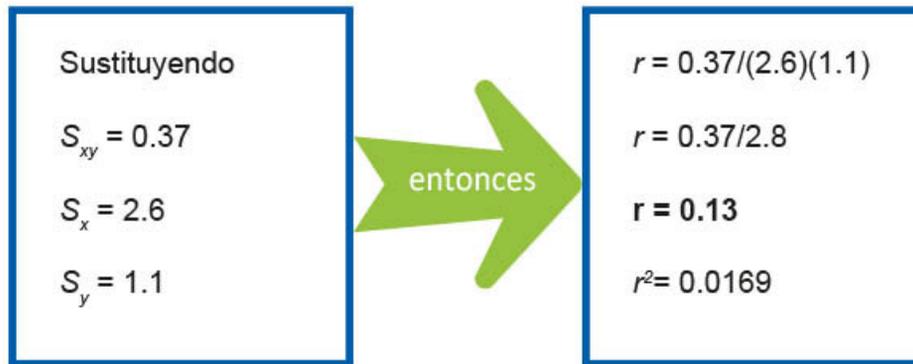
- Es el cuadrado del coeficiente de correlación.
- El rango de sus valores se ubica entre 0 a 1. Ese valor se interpreta como la explicación porcentual de la variabilidad de X.
- No ofrece información sobre la dirección de la relación entre las variables.

Al recordar el ejemplo:

Estudiantes del Telebachillerato “Loma Bonita”	
Variable independiente (x)	Número de estudiantes que trabajan
Variable dependiente (y)	Promedio de calificaciones

En que:

$$\begin{aligned} S_{xy} &= 1.8/6-1 \\ &= 1.8/5 \\ &= 0.37 \end{aligned}$$



Interpretación:

El coeficiente de determinación indica que la variable "Número de estudiantes que trabajan" explica el 1.69% de la variabilidad del "Promedio de calificaciones". En otras palabras, para poder explicar completamente el "Promedio de calificaciones" debemos considerar otros factores, no sólo "Número de estudiantes que trabajan".



Actividad de aprendizaje 4

Ahora que sabes la secuencia de pasos para realizar el análisis de la covarianza y la correlación, es momento de que realices tu propio análisis.

Elabora tu propuesta de análisis para que el Director del Telebachillerato "El Platanar" cuente con los resultados del análisis de las mismas variables utilizadas anteriormente: Número de estudiantes que trabajan y Promedio de calificaciones.

Al realizar el procedimiento y obtener tu propia información contarás con elementos para apoyar la correcta toma de decisiones.

Telebachillerato comunitario de "El Platanar"									
Alumnos	Número de alumnos	Edad promedio	Horas promedio de estudio	Promedio de calificaciones	Número de alumnos unidos (casados, unión libre)	Número de alumnos que son padres o madres	Número de estudiantes que trabajan	Estatura promedio de los varones	Estatura promedio de las mujeres
Primer semestre	14	13	0	9	0	0	2	1.60	1.45
Segundo semestre	20	14	0	7	0	1	5	1.61	1.44
Tercer semestre	20	15	2	8	1	1	1	1.65	1.45
Cuarto semestre	35	17	2	6	1	1	2	1.68	1.47
Quinto semestre	29	17	1	6	2	1	2	1.68	1.50
Sexto semestre	35	18	2	7	3	1	2	1.68	1.50

- Define la covarianza entre promedio de calificaciones y las variables Horas promedio de estudio y números de estudiantes que trabajan.
- Define los coeficientes de correlación lineal para cada caso.
- Ahora que sabes la forma de calcular el coeficiente de determinación, su alcance y significado, realiza los cálculos e interpretación. No dejes de utilizar el ejemplo previo.
- Interpreta los resultados obtenidos.
- ¿Estás de acuerdo con las implicaciones de los resultados? Sintetiza tus argumentos.
- Presenta tus resultados después de haberlos revisado y sintetizado con tus compañeros de equipo.
- Incluye la información recabada en tu portafolio de evidencias.

Verifica tus respuestas en el apéndice al final del libro.



Aprende más

Regresión lineal simple

El análisis de regresión se enfoca en la exploración, explicación y estudio de dependencia de una variable mediante una o más variables explicativas. De ahí el nombre de método de predicción basado en este modelo.

En éste apartado necesariamente se hace una introducción al método de regresión lineal simple, que recibe dicha denominación en razón de que:

- Se trata de una regresión debido a que se utiliza para su cálculo, información pasada.
- Es lineal, bajo el supuesto que así es la relación existente entre las variables X y Y que intervienen, lineal.
- Es simple, porque se usa sólo una variable independiente para explicar la variable dependiente.

Lo anterior significa que procederemos a ajustar una recta al conjunto de datos que se pueden registrar sobre un diagrama matemático que utiliza las coordenadas cartesianas para mostrar sus valores para un conjunto de datos. La característica fundamental de esa recta es que pasará lo más cerca de todos los puntos ubicados en el diagrama de dispersión. Para lograrlo usaremos el método de mínimos cuadrados.



Sabías que...

Francis Galton, quien vivió entre 1822 y 1911, introdujo el término regresión como una “regresión a la mediocridad” en el sentido de que si bien existía una tendencia en que los padres de estatura alta tenían hijos altos y padres de estatura baja tenían hijos bajos, la estatura promedio de los hijos al llegar a su edad adulta que nacieron de padres de una estatura dada, tendían a moverse hacia la estatura promedio de la población total.



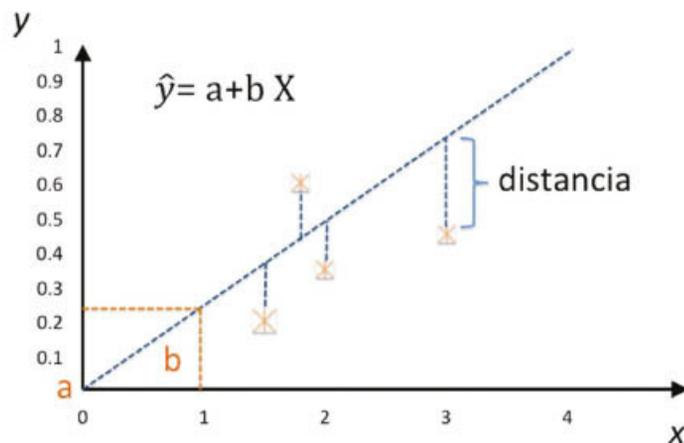
Aprende más

El método de mínimos cuadrados

El análisis de regresión consiste en definir la variable independiente X que ayude a explicar o a estimar la variable dependiente Y , siempre que exista una relación lineal entre ellas y siempre que se trate de variables cuantitativas.

El método de mínimos cuadrados se utiliza para determinar una ecuación de la recta de las siguientes características:

- Involucra para su cálculo, la noción de Y , igual, al valor de un dato i de Y .
- También implica definir un valor estimado de \hat{y} , que es un valor calculado sobre la recta de regresión formada por los puntos Y . Dicha recta es pasa por la mínima distancia que hay entre cada punto y la recta de regresión.



- Al minimizarse las distancias se obtiene a , la ordenada al origen:

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

- La pendiente de la recta, obtenida a partir de dividir la sumatoria de la multiplicación de las diferencias de cada variable X y su media con la diferencias obtenidas entre la variable Y y su respectiva media, entre la sumatoria al cuadrado de las diferencias de cada variable X y su media:

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

- La anterior expresión, junto con la siguiente (que se obtiene al manejar indicadores que ya se han calculado anteriormente), constituyen los coeficientes de regresión, a y b, respectivamente:

$$b = \frac{rS_y}{S_x}$$

Donde:

r = es el coeficiente de correlación

S_y = desviación estándar muestral de y

S_x = desviación estándar muestral de x

\bar{y} = media muestral de Y

\bar{x} = media muestral de X

Ejemplo:

Al recordar los cálculos que hemos obtenido en uno de los ejemplos con que hemos trabajado, es necesario sustituir los valores en las respectivas ecuaciones.

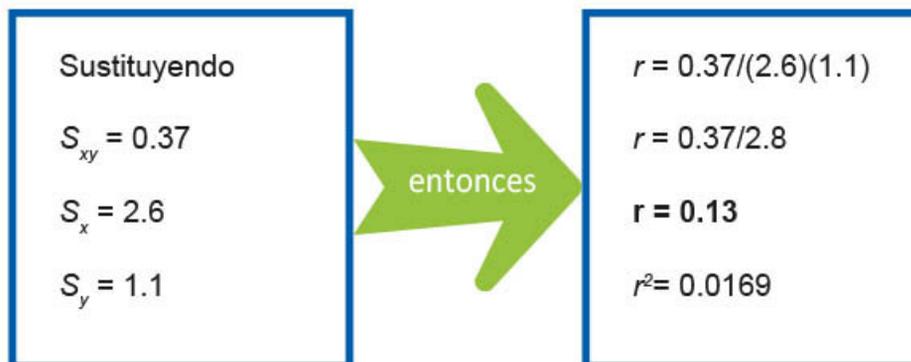
Tabla de resolución de problema Estudiantes del Telebachillerato "Loma Bonita"					
Variable independiente (x)	Número de estudiantes que trabajan				
Variable dependiente (y)	Promedio de calificaciones				
<p>Análisis de covarianza</p> $S_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$ <p>donde: x_i = valor i-ésimo de la variable x \bar{x} = media muestral de la variable x y_i = valor i-ésimo de la variable y \bar{y} = media muestral de la variable y n = tamaño de muestra</p> <p>n=6 media aritmética de x=...\bar{x}=1.8 media aritmética de y=...\bar{y}=7.8</p>	x	y	$(x, - \bar{x})$	$(y, - \bar{y})$	$(x, - \bar{x})(y, - \bar{y})$
	1	10	- 0.8	2.2	-1.8
	1	7	- 0.8	- 0.8	0.7
	2	7	0.2	- 0.8	- 0.1
	1	7	- 0.8	- 0.8	0.7
	4	9	2.2	1.2	2.5
	2	7	0.2	- 0.8	- 0.1
	suma =11	suma =47			1.8
	$S_{xy} = 1.8/6-1$ $= 1.8/5$ $= 0.37$				Resultado = 0.37

En que:

$$S_{xy} = 1.8/6-1$$

$$= 1.8/5$$

$$= 0.37$$



A partir de esos datos:

$$r = 0.13$$

$$S_y = 1.1$$

$$S_x = 2.6$$

$$\bar{Y} = 7.8$$

$$\bar{X} = 1.8$$

Sustituyendo en:

$$b = \frac{rS_y}{S_x} \quad b = \frac{(0.13)(1.1)}{2.6} = \frac{0.143}{2.6} = 0.055$$

Y: $\boxed{a = \bar{Y} - b\bar{X}}$ $a = (7.8) - (0.055)(1.8) = 7.71$

A partir de estos resultados, la ecuación de regresión es:

$$\hat{Y} = a + bX \quad \hat{Y} = (0.055)X + 7.71$$

Sólo es necesario tener presente que esta representación o modelo no es muy bueno, en razón de que su correlación es muy débil, y por tanto, su capacidad predictiva también es mala. En consecuencia, la estimación del promedio de calificaciones puede ser muy diferente a la real.



Actividad de aprendizaje 5

Ahora que sabes la forma de calcular mediante el método de mínimos cuadrados la ecuación de la recta de regresión realiza los cálculos e interpretación para:

Estudiantes del Telebachillerato "Loma Bonita"	
Variable independiente (x)	Número de estudiantes que trabajan
Variable dependiente (y)	Promedio de calificaciones

Toma en cuenta que para realizar tus cálculos será necesario retomar varios resultados de los ejercicios anteriores. Te invitamos que los integres en una tabla de resolución de problemas.

Cierre de bloque IV

Durante el desarrollo de este bloque pudiste recordar lecciones de cursos anteriores, así como nuevos métodos para conocer de qué manera se comportan los datos de dos variables, no sólo en la investigación, sino incluso en aplicaciones de la vida diaria.

Autoevaluación

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una X en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque I.

Interpretación del nivel de avance:

100-90% = lo logré el aprendizaje de manera independiente.

89-70% = requerí apoyo para construir mi aprendizaje.

69-50% = fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente.

49% o menos = no logré el aprendizaje.

		Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Identificas el uso y alcance de los métodos de representación tabular y gráfica para datos de dos variables.				
	Distingues los conceptos de Covarianza, Coeficiente de Correlación y, Coeficiente de determinación				
	Reconoces la importancia de la Regresión lineal simple.				
	Descubres las aplicaciones del Método de mínimos cuadrados.				

		Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Procedimentales	Contenidos				
	Desarrollas dos métodos de representación y comportamiento de datos para dos variables. Representación Tabular de contingencia y Representación por medio de diagramas de dispersión.				
	Explicas en qué situaciones se puede utilizar el procedimiento del cálculo de la covarianza, del coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación.				
	Comparas los procesos de cálculo de la covarianza, el coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación.				
	Analizas las propiedades del método de mínimos cuadrados.				
	Argumentas sobre los alcances del método de mínimos cuadrados.				
Actitudinales	Reflexionas sobre la importancia de contar técnicas para describir y analizar relaciones entre dos variables.				
	Muestras interés en manejar con claridad y soltura técnicas para describir y analizar relaciones entre dos variables.				
	Te involucras en el conocimiento de las técnicas para describir y analizar relaciones entre dos variables para la toma de decisiones.				

Una vez que hayas dado lectura a las preguntas que se te presentan enseguida, responde en forma breve a cada interrogante en las líneas correspondientes:

- ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

- ¿Cómo puedes hacer uso de lo aprendido de manera inmediata, en el presente y futuro?

- ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

A posteriori: (Del latín: por lo que viene después).

A priori: (Del latín: por lo que precede). Significa lo que está dado de antemano, antes de la experiencia, antes de los hechos.

Análisis bivariado: es aquel que se realiza para llegar a determinar qué tanta relación tienen o pueden llegar a tener un par de variables entre sí.

Análisis de covarianza: indica el tipo de relación lineal existente entre dos variables. Es una medida descriptiva de variación simultánea de las variables que permite determinar el tipo de asociación entre ellas.

Campana de Gauss: la campana de Gauss es empleada en estadística y probabilidad, y debe su nombre a su descubridor, el matemático, astrónomo y físico alemán Carl Friedrich Gauss.

Coefficiente de correlación: mide la magnitud de la relación lineal entre un par de variables, indica que tan fuerte o débil es dicha relación.

Coefficiente de determinación: para saber si una variable X es “buena” para explicar la variable Y se calcula el coeficiente de determinación, que se denota por r^2 . Tiene las características siguientes: Es el cuadrado del coeficiente de correlación, el rango de sus valores se ubica entre 0 a 1, ese valor se interpreta como la explicación porcentual de la variabilidad de X y, no ofrece información sobre la dirección de la relación entre las variables.

Datos colectivamente exhaustivos: es cuando uno de los eventos debe ocurrir.

Desviación estándar: es una medida de dispersión para variables; se integra mediante un conjunto de datos que se traducen como una medida de dispersión y nos ayuda a indicar cuánto puede dejarse los valores respecto al promedio (media), por tanto es útil para buscar probabilidades de que un evento ocurra; en los casos de una distribución binomial se calcula como la raíz cuadrada del número de ensayos por la probabilidad de éxitos por la probabilidad de fracasos.

Distribución de probabilidad: es un modelo teórico que describe la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio, es decir, nos da todas las probabilidades de todos los posibles resultados que podrían obtenerse cuando se realiza un experimento aleatorio. Se clasifican como discretas o continuas.

El espacio muestral: asociado a un experimento determinado representa el conjunto formado por todos los puntos o elementos muestrales. Un espacio muestral estará denotado por S.

Esperanza matemática: es un valor promedio y no es necesariamente un posible resultado del experimento.

Evento: en un espacio muestral discreto S es un conjunto de puntos muestrales, es decir, cualquier subconjunto de S.

Excluyente: significa que puede separar definitivamente. Refiere a términos como apartar, separar, descartar al que no sea poseedor de dicho requisito.

Experimento: es el proceso por medio del cual se realiza una observación. Ejemplo es tirar un dado, o dos, medir y determinar el número de bacterias por centímetro cúbico en un alimento determinado.

Método de mínimos cuadrados: se utiliza para determinar una ecuación de la recta de las siguientes características: involucra para su cálculo, la noción de Y , igual, al valor de un dato i de Y , también implica definir un valor estimado de Y , que es un valor calculado sobre la recta de regresión formada por los puntos Y , dicha recta es pasa por la mínima distancia que hay entre cada punto y la recta de regresión.

Parámetros: son los valores que se calculan para resumir la información recogida en un experimento aleatorio o en las distribuciones de probabilidad.

Simultáneo: Acciones, sucesos o procesos, ocurren o se desarrollan al mismo tiempo.

Tablas de contingencia: son arreglos que se emplean para registrar y analizar la relación entre dos o más variables, habitualmente de naturaleza cualitativa (nominales u ordinales). Tienen la propiedad de que están formados ya sea por un número finito o por uno contable de elementos muestrales. Cuando lanzamos un dado tenemos solamente un número finito de posibilidades: seis y éstas representan el espacio muestral.

Variable aleatoria: función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral, entendiendo esté último como el conjunto de soluciones posibles de un experimento

Variabes aleatorias continuas: Son aquellas que pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo o rango.

Variabes aleatorias discretas: Son las que sólo pueden tomar valores enteros.

¿Con qué conocimientos cuento?

1. Es una ciencia formal, es decir que como las Matemáticas y la Lógica construyen y comprueban nociones abstractas. La estadística ayuda a recopilar, analizar, interpretar y presentar información muy diversa que nos sirve en la vida cotidiana .
2. Se refiere a la posibilidad que existe entre distintas posibilidades, que un evento o hecho se produzca. Mide la certeza o duda de que ocurra o no un evento determinado. Establece una relación entre el número de eventos favorables y el número total de eventos posibles. La probabilidad mide la frecuencia con la que se puede obtener un resultado al realizar un experimento , sobre el cual se conocen resultados posibles en condiciones similares.
3. Variable independiente: alimento proporcionado; dependiente incremento de peso de los pollos.
4.
 1. La muestra son los 70 828 personas encuestadas. 2.- La Población son los residentes del Estado de Puebla con Seguro Popular, 3.- Es representativa de los residentes en el Estado de Puebla que tienen seguro popular. Al ser una muestra aleatoria es muy posible que sea representativa de esta población, pero con un margen de error de muestreo. El tamaño de muestra es grande.
5. a) El porcentaje total de la encuesta con No respuesta es de 59% ya que $75+119+160=354$ ($354/600$) *100 = 59% .

b) El porcentaje de no respuesta en empresas pequeñas es de 37.5%, empresas medianas es de 59.5% y en empresas grandes es de 80%. El porcentaje de no respuesta se incrementa con el tamaño de las empresas, entre mayor es el tamaño de la empresa mayor es el porcentaje de no respuesta.
6. (1) evento, (2) p (3) muestreo aleatorio simple (4) distinta

Actividad de aprendizaje 1

1. Población de interés los habitantes de un municipio, en edad de votar de 18 años y más. Definiría la muestra dependiendo del tamaño de la población de 18 años y más y elegiría al azar a quienes tendrían que ser seleccionado para entrevistar.

La recolección de datos: Redactaría primero un cuestionario en el que preguntara objetivamente sobre si están de acuerdo en otorgar pensiones a todos los adultos mayores (si o no). Y después obtendría las respuestas.

2. Población: hogares en la localidad

Muestra: entrevistaría a los jefes y/o jefas del hogar, o bien a la persona de 18 años y más de los hogares seleccionados en la muestra que puedan proporcionar la información relativa al consumo de agua en el hogar.

Recolección: la haría a partir de una muestra representativa aleatoria en la que a partir de un listado de hogares de la localidad, realizaría una muestra aleatoria eligiendo al azar los hogares a entrevistar

3. Población: la producción de focos de la fábrica y que se producen por lote. Elegiríamos al azar un lote. A partir de ahí haría una muestra.

Muestra: teniendo el total de focos producidos en el lote elegido al azar, se elegirían los focos que deben estar prendidos a lo largo de un tiempo equivalente al tiempo que duren prendidos. El total de focos encendidos en ese tiempo son el tamaño de la muestra. Y la duración en horas en que permanecen prendidos dependerá del tiempo que permanezcan encendidos hasta que todos estén fundidos. El promedio lo obtendremos calculando un promedio de las horas que permanecieron encendidos los focos entre el número de focos utilizados en la muestra. Y del resultado obtendremos el promedio = a la media aritmética.

Actividad de aprendizaje 2

Formen equipos de al menos 4 personas. Planteen un problema en el que apliques la probabilidad en tu comunidad y elaboren un árbol de probabilidad para solucionarlo. Como sabrás, algunos problemas pueden ser solucionados de una manera más fácil siguiendo este procedimiento.

Posteriormente discutan y realicen en el mismo equipo los siguientes ejercicios:

1. Árbol de probabilidad en el que se describa las dos actividades de Pedro como escritor y como redactor en un periódico. Toma como referencia el árbol de probabilidad que se encuentra en el texto.
2. Dibujar un Árbol de probabilidad de la comunidad con hombres y mujeres por separado y de cada uno se analizará las actividades que realiza, correr,

andar en bicicleta y, en los fines de semana pueden ambos jugar fútbol o voleibol. El árbol de probabilidad se parece al árbol de probabilidad que está en el texto.

3. Hacer un árbol de probabilidad de cómo Diana se puede vestir para ir al trabajo. En este caso se describe la falda negra combinada con una blusa rosada, blanca o azul. También podrá usar zapatos negros, blancos o rosados. El árbol de probabilidad se parece al árbol de probabilidad que está en el texto.

Incluye en tu portafolio de evidencias la solución de estos ejercicios.

Actividad de aprendizaje 3

Respuesta:

$$P_5 = n! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Es decir de 120 modos se pueden combinar los 5 equipos de trabajo, considerando el orden.

Actividad de aprendizaje 4

Elabora un árbol de problemas para solucionar estas permutaciones.

Actividad de aprendizaje 5

Elabora un mapa conceptual donde diferencies las combinaciones de las permutaciones y variaciones. Adicionalmente propón un ejemplo cercano utilizando estas técnicas de conteo. Diferencia entre permutaciones y combinaciones:

- Si el orden no importa, es una combinación.
- Si el orden importa es una permutación.

En una ensalada de frutas se combinan manzanas, plátanos, peras y uvas. No importa el orden en que las pusimos, es la misma ensalada, es decir, si ponemos uvas, peras y plátanos, ó peras plátanos y uvas. Resulta lo mismo. Pero si conocemos la combinación de una caja fuerte o cerradura digital, y ésta es 897, si importa el orden porque no es lo mismo 978 o 987 etc., tiene que ser exactamente 8-9-7 este ejemplo es claro y preciso para la diferencia entre combinaciones y permutaciones.

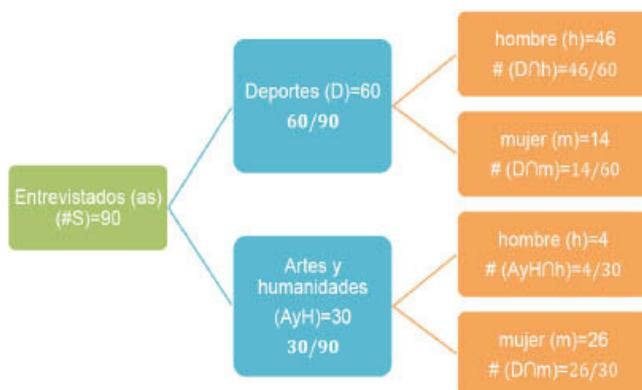
Actividad de aprendizaje 1

No hay un resultado específico pues los estudiantes retomarán datos que recolectaron en el curso anterior y aplicaron a distintos ejercicios. En lo que respecta a clasificar los eventos tenemos que:

1. A y B son excluyentes
2. A y D son no excluyentes
- B, C y D son no excluyentes

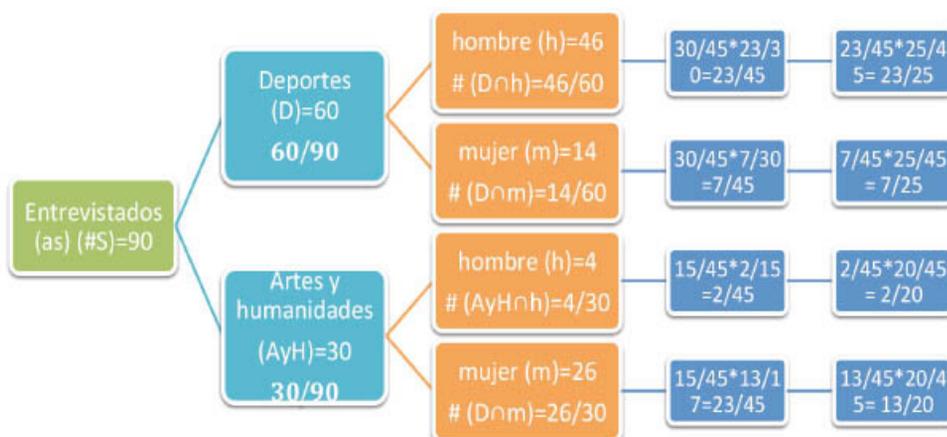
Actividad de aprendizaje 2

Árbol de probabilidad condicional.



De acuerdo a lo aprendido en el tema de probabilidad condicional, el estudiante resolverá el ejercicio a partir de una condición que a él o ella le interese identificar.

Actividad de aprendizaje 3



Actividad de aprendizaje 1

Para realizar de esta actividad se sugiere revisar los libros de texto de telebachillerato de cursos anteriores y de actual uso. Asimismo se recomienda el uso de diccionarios, o materiales bibliográficos que se encuentren en la biblioteca escolar o de tu comunidad. La búsqueda de ejemplos debe realizarse con base en las definiciones de variables aleatorias discretas y continuas para una correcta clasificación.

Actividad de aprendizaje 2

La construcción de un mapa conceptual tiene que realizarse a través de una investigación que te permita obtener información y ampliar tus conocimientos acerca del tema de distribución binomial, para comprender su aplicación y los diferentes elementos que lo componen; esto debe ser adicional a lo presentado en el texto de Probabilidad y Estadística II.

Actividad de aprendizaje 3

Tu investigación debe ser realizada con el objetivo de enumerar una serie de ejemplos que permitan presentar las diferentes formas de una distribución binomial y normal. Se recomienda el uso de material bibliográfico de tu biblioteca escolar o de tu comunidad, así como de herramientas como el internet.

Actividad de aprendizaje 1

Reunirse en equipos, de preferencia mixtos, para realizar una investigación documental. Puede ser también visitando una biblioteca o en búsqueda de internet en periódicos especializados en finanzas o de economía. Se trata de buscar datos en que se representen dos variables cualitativas y en cuya relación mutua se pueda establecer una relación en el estudio de situaciones reales.

Algunos ejemplos pueden derivar del estudio de edad y estatura entre los grupos de educación pública, estudios de contaminación o drogadicción, entre otros. Representar en una tabla de contingencia y un diagrama de dispersión los datos de las variables asociadas para cada tema.

Actividad de aprendizaje 2

- Lo que se solicita es que se seleccionen, de entre ocho posibilidades, tres variables que puedan estar asociadas al rendimiento de los alumnos, que aquí se asumirá como promedio de calificaciones.
- Platica con tus compañeros de equipo y sintetiza las razones por la que creen que existe una relación entre las variables seleccionadas.
- A partir de tu selección de variables dibujen un diagrama de dispersión para cada una de las variables identificadas y coméntalas. ¿en el gráfico se bosqueja una relación positiva, negativa o nula?
- Con tu equipo, discute y argumenta en torno a los resultados de estos dos últimos ejercicios a partir de la siguiente pregunta: ¿Estás de acuerdo con el sentido de cada uno de éstos resultados?
- Sintetiza y expongan frente a grupo los principales resultados de tus dos análisis.
- Al preparar tus respuestas y argumentación toma en cuenta que el valor de los indicadores, ni la dimensión de los mismos, no necesariamente concuerdan con nuestras expectativas iniciales.
- Una forma de asegurarnos que los resultados reflejan el comportamiento de las variables es incrementando el número de observaciones para realizar el levantamiento de datos.

Tabla de resolución de problema Estudiantes del Telebachillerato "El Platanar"						
Variable independiente (X)	Horas promedio de estudio					
Variable dependiente (Y)	Promedio de calificaciones					
<p>Análisis de covarianza</p> $S_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$ <p>donde: x_i = valor i-ésimo de la variable x \bar{x} = media muestral de la variable x y_i = valor i-ésimo de la variable y \bar{y} = media muestral de la variable y n = tamaño de muestra</p> <p>n=6 media aritmética de x=...\bar{x}=1.16 media aritmética de y=...\bar{y}=7.16</p>	x	y	$(x, - \bar{x})$	$(y, - \bar{y})$	$(x, - \bar{x})(y, - \bar{y})$	
	0	9	- 1.16	1.84	-2.134	
	0	7	- 1.16	- 0.16	0.1856	
	2	8	0.84	0.84	0.7056	
	2	6	0.84	- 1.16	- 0.974	
	1	6	- 0.16	- 1.16	0.185	
	2	7	0.84	- 0.16	- 0.13	
	suma =7	suma =43			- 2.161	
					$S_{xy} = - 2.16/6-1$ $= - 2.16/5$ $= - 0.43224$	Resultado = - 0.4322

Actividad de aprendizaje 4

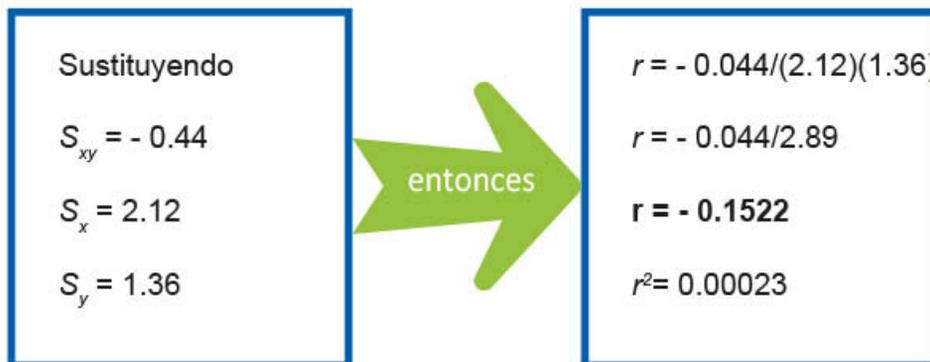
Tabla de resolución de problema Estudiantes del Telebachillerato "El Platanar"						
Variable independiente (X)	Número de estudiantes que trabajan					
Variable dependiente (Y)	Promedio de calificaciones					
<p>Análisis de covarianza</p> $S_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$ <p>donde: x_i = valor i-ésimo de la variable x \bar{x} = media muestral de la variable x y_i = valor i-ésimo de la variable y \bar{y} = media muestral de la variable y n = tamaño de muestra</p> <p>n=6 media aritmética de x=...\bar{x}=1.16 media aritmética de y=...\bar{y}=7.16</p>	x	y	$(x, - \bar{x})$	$(y, - \bar{y})$	$(x, - \bar{x})(y, - \bar{y})$	
	2	9	-0.3	1.84	-0.552	
	5	7	2.7	-0.16	-0.432	
	1	8	-1.3	0.84	-1.92	
	2	6	- 0.3	- 1.16	0.348	
	2	6	- 0.3	- 1.16	0.348	
	2	7	- 0.3	- 0.16	0.0078	
	suma =14	suma =43			- 2.20	
					$S_{xy} = - 2.2/6-1$ $= - 2.2/5$ $= - 0.44$	Resultado = - 0.44

En que:

$$S_{xy} = - 0.44$$

Tabla de resolución de problema						
x	y	$(x, - \bar{x})$	$(x, - \bar{x})^2$	$(y, - \bar{y})$	$(y, - \bar{y})^2$	$(x, - \bar{x})(y, - \bar{y})$
2	9	-0.3	.09	1.84	3.38	-0.552
5	7	2.7	7.29	-0.16	0.0256	-0.432
1	8	-1.3	2.99	0.84	.7056	-1.92
2	6	- 0.3	.09	- 1.16	1.34	0.348
2	6	- 0.3	.09	- 1.16	1.34	0.348
2	7	- 0.3	.09	- 0.16	.0256	0.0078
suma = 14	suma = 43		Suma= 10.64		Suma = 6.8168	- 2.20

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$



A partir de esos datos:

$$r = -0.01522$$

$$S_y = 1.36$$

$$S_x = 2.6$$

$$\bar{Y} = 7.16$$

$$\bar{X} = 2.3$$

Sustituyendo en: $b = \frac{rS_y}{S_x} = -0.00796123$

Y: $a = \bar{Y} - b\bar{X}$ $a = 7.16 + 0.00796123(2.3) = 7.17$

A partir de estos resultados, la ecuación de regresión es:

$$\hat{Y} = a + bX \quad \hat{Y} = 7.17 - (0.0079)X$$

- Baena Paz, G. (2004) *Prospectiva política: Guía para su Comprensión y Práctica*. México: Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Canovas, G (1988) *Probabilidad y Estadística, aplicación y métodos*. México: McGraw-Hill
- Fuenlabrada Trucios, S. y Fuenlabrada Velázquez, I. R. (2014) *Probabilidad y Estadística*. México: McGraw Hill.
- Guajarati Damodar N., (1997). *Econometría*. Colombia: Mc Graw Hill.
- Gutiérrez Venegas, A. L. (2012) *Probabilidad y Estadística, enfoque por competencias*. México: McGraw Hill.
- Hernández Rodríguez, O. (2003) *Estadística elemental para Ciencias Sociales*. México: Editorial UCR.
- Hernández-del-Valle, A. y Hernández-Lerma, O (2003). *Elementos de Probabilidad y Estadística*. México: Sociedad Matemática Mexicana.
- Huff, D., Puig, J. G., Ortega, O. F., & Geis, I. (2011). *Cómo mentir con estadísticas*. Ares y Mares.
- Ritchey, F. J. (2008). *Estadística para las Ciencias Sociales*. México: McGraw Hill.
- Sanchez, Octavio 2010 *Probabilidad y Estadística*. Mc Graw Hill, editores.
- Shao, S. (1988). *Estadística para Economistas y Administradores de Empresas*. México: Herreros Hnos.
- Stevenson, W. (1981) *Estadística para administración y economía*. México: Harla.
- Wadsworth, G. P. y Byan, J. G (1979) *Aplicaciones de la teoría de probabilidades y variables aleatorias*. España: Editorial Alhambra
- Yamane, T. (1979) *Estadística*. México: Harla.

- Angel A., Sedano M. (S.F) *La distribución normal*. UOC recuperado de http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Distrib_Normal.pdf
- Camacho Rosales. J. (2003) *Aplicaciones estadísticas en las Ciencias Sociales*. Consultado el 12 de octubre de 2015. Recuperado de <https://imarrero.webs.ull.es/sctm03.v2/modulo1/JCamacho.pdf>
- Coordinación de Ciencias Aplicadas, División de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería. UNAM, Departamento de Probabilidad y Estadística (2006). Consultado del 10 de octubre de 2015. Recuperado de <http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/CienciasAplicadas/ProbabilidadEstadistica/>
- Departamento de Tecnología de la Universidad de Granada (2003) *Distribución normal o campana de Gauss-Laplace*. Consultado el 12 de noviembre de 2015. Recuperado de: http://electronica.ugr.es/~amroldan/asignaturas/sacpc/apuntes/va_normal.pdf
- Instituto Nacional de estadística e informática (2006) *Glosario básico de términos estadísticos*. Consultado del 10 de octubre de 2015. Recuperado de http://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones_digitales/Est/Lib0900/Libro.pdf

- Maibaum, G. (1988) *Teoría de las probabilidades estadísticas y matemáticas*. Consultado el 09 de octubre de 2015. Recuperado de https://estadisticaunicaes.files.wordpress.com/2012/05/teoria_de_probab_y_estadistica_mate.pdf
- *Recursos en internet para la orientación Académica y profesional*. Consultado el 09 de octubre de 2015. Recuperado de: <http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T03.pdf>
- Rincón, L. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM. Consultado el 12 de octubre de 2015. Recuperado de <http://lya.fciencias.unam.mx/lars/>.
- Trading Center (2009) *¿Qué es la desviación estándar? y ¿cómo interpretarla?* Consultado el 11 de octubre de 2015. Recuperado de <https://tradingcenter.wordpress.com/2009/11/11/que-es-la-desviacion-estandar-y-como-interpretarla-1/>
- Vargas, J (2010) *Curso de Estadística Inferencial Ejercicios y Problemas Resueltos de Distribución Normal*. Consultado el 12 de noviembre de 2015. Recuperado de: <https://jrvargas.files.wordpress.com/2010/07/problemas-resueltos-de-dist-normal1.pdf>





Agregar datos de colofón en página 128

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Dirección General del Bachillerato



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

